ANNUAL BULLETIN OF RESEARCH INSTITUTE FOR SOCIAL SCIENCES
No. 54, 197-216, 2024

〈共同研究〉
「非線形力学系の新しい成果を応用した複雑な経済変動の解明と将来予測」

公債の持続可能性と経済の不決定性に関する研究：内生的経済成長モデルを用いた数値分析

西垣泰幸*、新井　潤**、伊藤敏和***

1．イントロダクション

公債発行の主たる目的は、長期間にわたり利用者に便益をもたらす社会資本や公共施設について、投資費用と利用者便益との時間的なずれを調整すること、また、不況期におけるマクロの景気刺激策のために、一時的に税収を超える公共支出を可能にすることにある。

日本においては、社会資本整備のための財源調達手段としては古くから利用されてきたが、不況対策の財源としては、高度成長期の終わりごろ、特に第１次石油危機後に、いわゆる赤字国債が徐々に累積しはじめた。その後80年代にとられた財政再建の努力にもかかわらず、1990年代初頭になると、いわゆる資産バブル崩壊後の大規模な景気対策にともなう公債と長期政府借入の残高が、GDP 比68％から113％へと急速に累増した。そして、2008年のリーマンショック後の緊急経済対策が始まると、さらに急激な累積が起こり、財務残高の GDP 比は2008年の182％から５年間で221％へと急増した。

諸外国においても、第１次石油危機以降赤字国債が再び発行されるようになり、90年代末、および2008年以降の世界同時不況を経て、赤字国債が累積されてきた。特にヨーロッパ諸国においては、ギリシャをはじめポルトガル、イタリア、スペインなどの国々において政府の財政破綻が起こり、国債発行の金利が急騰したり、必要な財政支出ができないなど、大きな社会問題となった。しかしながら、その後の財政再建の努力により、現在では政府債務残高は、一部の例外を除いては GDP 比150％以内にとどまっている。

財政規律を高め、その健全度や持続可能性を高めるために、様々な財政ルールが採用されている。日本においては、公債費以外の財政支出を税など公債以外の基本的財源により均衡させるという基礎的財政収支の均衡が財政目標とされてきた。また、欧州諸国においては、マーストリヒト基準により、加盟国と潜在的加盟希望国において政府債務残高の GDP 比を60％以内にとどめることが要請されている。

ところが、その後、2020年に始まる感染症の世界的な蔓延の中で、各国は感染防止や医療のための巨額の支出を余儀なくされた。その結果、日本の公債残高は、GDP 比で250％を超える巨額にまで達している。また、欧州諸国や米国においても、押しなべて、この期間に５％から10％の上昇が起こっている。このような社会経済的背景の中で、公債の持続可能性に関する研究が再び注目を浴びている。ここでは、西垣、新井、伊藤（2023）において実施した、生産的公共支出を成長のエンジンとする内生的経済成長

＊龍谷大学経済学部　教授
＊＊龍谷大学経済学部　准教授
＊＊＊龍谷大学　名誉教授

モデルを用いた、赤字公債発行の経済成長効果や、財政健全化のための公債発行ルールと赤字財政の持続可能性に関する研究を数値化することにより進展させたい。そして、長期均衡の存在やその安定性などをより詳細に検討することにより、赤字公債発行の経済成長効果や所得分配効果、赤字財政の持続性を可能にする定常成長均衡点の存在とそこへの収束と経済の発散などを検討する。

政府の生産的公共支出や社会資本を明示的に考慮した内生的経済成長モデルを用いて、公債調達の持続可能性を検討した研究については、比較的多数の文献が存在する。より詳しくは、西垣、新井、伊藤（2023）に譲るとして、ここでは簡単にその主要な流れを紹介することにとどめたい。

まず、生産的公共支出を成長のエンジンとする内生的経済成長モデルは、Barro（1990）、Alesina and Rodrick（1993）に始まり、所得税により調達された生産的公共支出がもたらす経済成長効果や、生産要素保有率が個人間で異なる場合の所得分配効果と、それが租税政策の決定にあたえる影響を検討している。Futagami, Iwaisako and Ohdoi（2008）は、生産的公共支出と公債発行を明示的に導入した内生的経済成長モデルを用いて、経済に複数の長期均衡が成立すること、そして、初期条件に依存して長期均衡の経済状況が大きく異なることを示した。他方、Bruce and Turnovsky（1999）、Greiner and Semmler（1999, 2000）、Turnovsky（1997, 2000）は、社会資本ストックを導入した内生的経済成長モデルにおいて、公債発行の財政ルールが経済成長にいかに影響を与えるかを分析している。また、Gosh and Mourmouras（2004）は、同様の設定において、財政ルールの最適性に関して研究した。

さらに、Nourry, Seegmuller and Venditi（2013）は、非線形の消費税が利用可能な場合に、均衡財政制約が経済成長にもたらす効果を分析し、複数均衡が成立し、経済は不安定性を高めることを示した。Gokan（2013）は、均衡財政が経済の不安定性に与える効果を検討し、労働所得税は均衡の安定性を高める効果を持つが資本所得税は長期均衡の不決定性と不安定性を高めることを示した。

西垣、新井、伊藤（2023）においては、Alesina and Rodrick と Futagami et al. による生産的公共支出による内生的経済成長モデルに、新たに消費税と公債残高の GDP 比による財政ルールを導入し、公債発行を含む財政調達方式が長期的な経済成長と所得分配に及ぼす影響と、赤字財政の持続可能性を検した。本研究では、Barro（1990）と Greiner and Semmler（2000）を参考に西垣、新井、伊藤モデルを数値化することにより、長期均衡の存在やその安定性などをより詳細に検討するとともに、公債発行の経済成長効果や所得分配効果、赤字財政の持続性を可能にする定常成長均衡点の存在とそれに対する長期的な収束と発散などを検討する。

本論文の構成は、次のように示される。第 2 節では、分析に用いる基本モデルが提示され、第 3 節ではその定常成長均衡が定義される。続いて第 4 節においては、公債残高の資本ストック比率を一定とする財政ルールのもとで、補助的に所得税と消費税を調達手段として利用する場合の公債発行の持続性、経済成長効果が検討される。第 5 節では、新規公債発行が内生的に決まる場合について公債の産出比率を一定とするような財政ルールのもとで、公債発行の持続性と経済成長効果が分析される。第 6 節においては、結語と今後の研究方針が示される。

2．基本モデル

本節においては、基本的なモデルを記述するが、モデルの構造とその動きを理解するための最低限の説明にとどめたい。より詳しい説明は、西垣他（2023）を参照されたい。

まず、経済には、資産の保有状況や労働供給量が異なる n 人の個人が存在し、その人口は一定で、個人は無限期にわたり生存すると仮定する。生産活動は、資本ストックと労働力に加えて、政府が提供する生産的公共支出を用いて 1 次同次の生産関数により行われる。

政府は、所得税、消費税に加えて公債発行により生産的公共支出を提供する。財政ルールとしては、

公債＝資本ストック比率を一定とするものと、公債残高の GDP 比率を一定とするものを考える。

（消費者）

t 期の個人 i の消費を $C_i(t)$ として、効用関数は次のように示される。

$$U(C_i)=\int_0^{\infty} e^{-\rho t}\frac{C_i(t)^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}dt \tag{1}$$

ここで、ρ は時間選好率であり、σ は異時点間の消費の代替の弾力性である。

この個人は t 期において資産 $m_i(t)$ を保有し、資本ストックあるいは公債の保有により運用する。また、労働供給 l_i を提供し労働所得を得る。個人が保有する資産と労働供給量は次のような式により示される。

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(t)=M_t \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} l_i=L \tag{3}$$

生産体系

財の生産は、資本ストック、労働供給、生産的公共支出を用いて、次のようなコブ＝ダグラス型生産関数により行われる。

$$Q_t=AK_t^{\alpha}(G_tL)^{1-\alpha} \tag{4}$$

ここで、Q_t は生産物、K_t は資本ストック、G_t は生産的公共支出を示している。財の生産は競争的に行われ、利潤最大条件は次のように示される。

$$r_t=\alpha AK_t^{\alpha-1}(G_tL)^{1-\alpha}=\alpha A(G_tL/K_t)^{1-\alpha} \tag{5}$$

$$w_t=(1-\alpha)AK_t^{\alpha}G_t(G_tL)^{-\alpha}=(1-\alpha)AG_t(G_tL/K_t)^{-\alpha} \tag{6}$$

生産関数の一次同次の仮定と人口一定の仮定より、以下では $L=1$ と置く。

政府行動

政府の財源調達手段としては、所得税（τ）、消費税（τ_c）、公債（B_t）が利用可能とする。したがって、政府の予算制約式は以下のように示される。

$$\dot{B}_t=rB_t-\tau(r_tM_t+w_t)-\tau_cC_t+G_t \tag{7}$$

ここで、C_t は個人の消費合計であり、$\sum_{i=1}^{n} c_i(t)=C_t$ としている。政府の財政ルールとしては、以下のものを考える。

（1）　資本ストック比率ルール：公債＝資本ストック比率（B_t/K_t）を一定とする

（2）　GDP 比率ルール：公債＝所得比率（B_t/Q_t）を一定とする

公債発行ルールは、公債の発行に一定の制限を設け、財政の健全性を保つためのものである。ここでは、その一つとして Futagami et al. と同様に公債残高の資本ストック比率を採用する。さらに、公債

残高の生産高に対する比率を一定とする財政ルールを検討する。これは、先に述べたように、EU 諸国などにおいて用いられている財政ルールと同様のものである。

市場均衡

個人の保有する資産は、資本ストックとして生産に提供されるか、公債を保有することにより運用される。したがって、以下の資産配分式が成立する。

$$M_t = K_t + B_t \tag{8}$$

個人の資本市場の裁定行動から、公債の利子率と資本ストックの収益率は等しくなる。

資源制約

出来上がった生産物は、個人に消費されるか、資本ストックとして投資されるか、あるいは生産的公共財として利用される。したがって、経済全体の資源制約式は、以下のように示される。

$$Q_t = C_t + \dot{K}_t + G_t \tag{9}$$

3．定常成長均衡

個人の効用最大化

個人は、市場で決まる利子率、賃金率、及び税率を所与として、無限期間にわたる効用最大化により各期の消費と貯蓄を決定する。

(3)、(4)式を利用すると、個人の所得は、資産の保有状況と以下のように示される。

$$\begin{aligned} Y_i(t) &= (1-\tau)[r_t m_i(t) + w_t l_i] \\ &= (1-\tau)m_i(t)\left[A\alpha(G_t/K_t)^{1-\alpha} + A(1-\alpha)(G_t/K_t)^{1-\alpha}\mu_i/(1+B_t/K_t)\right] \end{aligned} \tag{10}$$

ここで、$\mu_i \equiv \left(l_i/L\right/_{m_i/M})$ は個人の労働＝資産シェアーを表している。

(10)式を用いて、個人の予算制約式は次のように示される。

$$\dot{m}_i = (1-\tau)m_i(t)\left[A\alpha(G_t/K_t)^{1-\alpha} + A(1-\alpha)(G_t/K_t)^{1-\alpha}\mu_i/(1+B_t/K_t)\right] - (1+\tau_c)c_i(t) \tag{11}$$

(11)式を用いて、個人の通時的な効用最大化問題は、次のように示される。

$$\begin{aligned} &\max_{c_i, m_i} \int_0^\infty e^{-\rho t}\frac{C_i(t)^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}dt \\ s.t.\quad &\dot{m}_i = (1-\tau)m_i(t)\left[A\alpha(G_t/K_t)^{1-\alpha} + A(1-\alpha)(G_t/K_t)^{1-\alpha}\mu_i/(1+B_t/K_t)\right] - (1+\tau_c)c_i(t) \end{aligned} \tag{12}$$

(12)式に関する通時価値 Hamiltonian を作り、最大化のための一階の条件を求めると次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = &\frac{C_i(t)^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} + \theta\{(1-\tau)m_i(t)\left[A\alpha(G_t/K_t)^{1-\alpha} + A(1-\alpha)(G_t/K_t)^{1-\alpha}\mu_i/(1+B_t/K_t)\right] \\ &-(1+\tau_c)c_i(t)\} \end{aligned} \tag{13}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c}=c_t(t)^{-\sigma}-(1+\tau_c)\theta=0 \tag{14}$$

$$\dot{\theta}=\rho\theta-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial m}=\rho\theta-\theta(1-\tau)\alpha A\left(\frac{G_t}{K_t}\right)^{1-\alpha} \tag{15}$$

および、横断性条件である。

(14)、(15)式より消費の成長率に関する次式を得る。

$$\frac{\dot{c}}{c}=\frac{1}{\sigma}\left[(1-\tau)\alpha A\left(\frac{G_t}{K_t}\right)^{1-\alpha}-\rho\right] \tag{16}$$

(16)式より、個人の消費の成長率は、マクロの変数のみに依存することがわかり、資産や労働の分配状況には依存しないことがわかる。したがって、各個人は均衡成長経路において消費の成長率と同じ率で資産の蓄積を行うことがわかる。

$$\frac{\dot{m}}{m}=\frac{\dot{c}}{c}=\frac{1}{\sigma}\left[(1-\tau)\alpha A\left(\frac{G_t}{K_t}\right)^{1-\alpha}-\rho\right] \tag{17}$$

また、(16)、(17)式より、経済全体の消費（C_t）と、資産（M_t）についても同率で成長することがわかる。成長率を γ とすると、次式により表される。

$$\gamma\equiv\frac{\dot{C}_t}{C_t}=\frac{\dot{M}_t}{M_t}=\frac{1}{\sigma}\left[(1-\tau)\alpha A\left(\frac{G_t}{K_t}\right)^{1-\alpha}-\rho\right] \tag{18}$$

資本蓄積と公債発行

個人の予算制約式や市場均衡条件式を利用して、経済の定常成長経路の資本ストック、生産的公共支出、公債残高などの変数を求めることができる。まず、資産市場の均衡条件式(8)式を、政府予算制約式(7)式に代入することにより、公債発行に関する次式を得る。

$$\dot{B}_t=(1-\tau)r_tB_t-(\tau Q_t+\tau_cC_t-G_t) \tag{19}$$

(19)式において、$b_t\equiv B_t/K_t$ と置いて整理することにより、次式が得られる。

$$\frac{\dot{b}_t}{b_t}=(1-\tau)r_t+\left(\frac{G_t}{B_t}-\tau\frac{Q_t}{B_t}-\tau_c\frac{C_t}{B_t}\right)-\frac{\dot{K}_t}{K_t} \tag{20}$$

他方、資源制約式(9)より資本蓄積率に関する次式が得られる。

$$\frac{\dot{K}_t}{K_t}=A\left(\frac{G_t}{K_t}\right)^{1-\alpha}-\frac{C_t}{K_t}-\frac{G_t}{K_t} \tag{21}$$

(20)式に(21)式を代入し、$y_t\equiv G_t/K_t$、$x_t\equiv C_t/K_t$ とおいて整理することにより、次式が得られる。

$$\frac{\dot{b}_t}{b_t}=\left[(1-\tau)\alpha-1-\frac{\tau}{b_t}\right]Ay_t^{1-\alpha}+\left(1-\frac{1}{b_t}\right)y_t+\left(1-\frac{\tau_c}{b_t}\right)x_t \tag{22}$$

また、(19)式と(21)式より、次式が得られる。

$$\frac{\dot{x}_t}{x_t}=\frac{\dot{C}_t}{C_t}-\frac{\dot{K}_t}{K_t}=x_t-\left[1-\frac{(1-\tau)\alpha}{\sigma}\right]Ay_t^{\alpha-1}+y_t-\frac{\rho}{\sigma} \tag{23}$$

4．公債発行ルールと定常成長均衡

ここまでの考察により、この経済体系は、y_t、x_t、b_t の 3 つの状態変数により示されることがわかる。さらに、財政ルールを設定することにより、以上のうち 2 変数により経済体系を示すことができる。財政ルールとして、以下ではまず、公債残高の資本ストック比率（$\bar{b}$）を一定とするものを考える。その時、新規公債は次のような調整関数に従って発行、あるいは償還されることになる。

$$\dot{b}_t=-\phi\left(b_t-\bar{b}\right),\quad \frac{\dot{b}_t}{b_t}=-\phi\left(1-\frac{\bar{b}}{b_t}\right) \tag{24}$$

ここで、ϕ は正の調整係数である。(24)式を(22)式に代入して整理することにより、次式を得る。

$$x_t=\frac{1}{\left(1-\frac{\tau_c}{b_t}\right)}\left\{\left[1-\alpha(1-\tau)-\frac{\tau}{b_t}\right]Ay_t^{1-\alpha}-\left(1+\frac{1}{b_t}\right)y_t-\phi\left(1-\frac{\bar{b}}{b_t}\right)\right\} \tag{25}$$

以上の操作により、この経済の長期的動向は、(23)、(24)、(25)式により規定され、x_t, b_t, y_t が決定されることがわかる。

定常成長均衡

定常成長均衡においては、x_t, b_t, y_t が一定となり、C_t, K_t, G_t, B_t が一定の率で成長する。以下では、まず、公債残高が調整方程式(24)に従って調整され、目標公債残高（$\bar{b}$）が達成されると仮定する。そこで、(23)式に $\dot{x}_t=0$ を代入することにより、次式を得る。

$$x=\left[1-\frac{(1-\tau)\alpha}{\sigma}\right]Ay^{1-\alpha}-y+\frac{\rho}{\sigma} \tag{26}$$

次に、(24)式において $\dot{b}_t=0$ を代入することにより、$b_t=\bar{b}$ を得る。これを(25)式に代入することにより、次の関係を得る。

$$x=\frac{\bar{b}}{\bar{b}-\tau_c}\left\{\left[1-\alpha(1-\tau)+\frac{\tau}{\bar{b}}\right]Ay^{1-\alpha}-\left(1+\frac{1}{\bar{b}}\right)y\right\} \tag{27}$$

したがって、定常成長均衡の x, y は、(26)、(27)式から決まることがわかる。以下では、定常成長均衡の特性と、財政ルールすなわち公債発行目標と経済成長の関係を検討しよう。

4.1　所得税調達によるケース

以下では議論を明確にするために、政府が公債に加えて所得税を利用可能な場合と、消費税を利用可能な場合とに分けて分析しよう。まず、所得税が利用可能な場合を検討するために、(27)式において消費税 $\tau_c=0$ と置いて(26)式と連立させることにより、定常成長均衡における $\bar{b}$ と y の関係を次のように示すことができる[1)]。

$$\bar{b}=\frac{y(\tau Ay^{-\alpha}-1)}{\alpha(1-\tau)(1-1/\sigma)Ay^{1-\alpha}+\rho/\sigma} \tag{28}$$

(28)式において $\sigma\geq 1$ の場合には、分母は常に正になる。そこで、$y=0, (\tau A)^{1/\alpha}$ において $\bar{b}=0$ となる。したがって、図に示されるように、目標公債残高の設定により複数解が成立する可能性が示される。

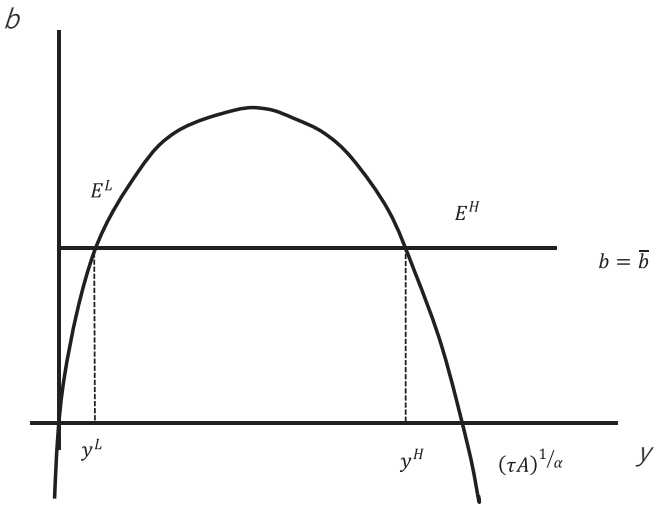

図 4－1　所得税調達ケースの複数均衡

先述のように、以下では、Barro（1990）と Greiner and Semmler（2000）を参考に、α＝0.4、σ＝1、ρ＝0.05 を考えよう。また、生産関数における定数項Ａについては、2022年度の日本のデータより1.5と概算した[2)]。所得税率 τ については、2022年度決算値より、0.25および0.3の２ケースを設定した[3)]。

(28)式に上記のパラメータ（τ＝0.25）を代入することにより、設定可能な公債＝資本ストック比率に関する以下の式を得る。

$$\bar{b}=y(7.5y^{-0.4}-20) \qquad (28')$$

この式より、公債残高目標の最大値として、y＝0.025 において $\bar{b}$＝0.320 を得た。また、比較のために τ＝0.3 のケースについては、y＝0.04 において $\bar{b}$＝0.505 を得た。これより、以下のような目標設定を行った。

表 4－1　所得税率と公債残高

公債残高の目標設定：$\bar{b}$		
所得税率	τ＝0.25	τ＝0.3
公債資本ストック目標値	0.25	0.3
最大値	0.320	0.505

次に、y と x の関係については(26)式により与えられ、この式に y が与えられれば、x が決まる。そして、$y \gtreqless \left\{(1-\alpha)\left[1-\frac{(1-\tau)\alpha}{\sigma}\right]A\right\}^{1/\alpha}$ において、$\frac{dx}{dy} \gtreqless 0$ となることが示される。

表 4－2　均衡の x、y

公債残高設定と y および x				
所得税率	$\tau=0.25$		$\tau=0.3$	
公債残高目標	$\bar{b}=0.25$		$\bar{b}=0.3$	
y	$y^L=0.007$	$y^H=0.048$	$y^L=0.006$	$y^H=0.092$
x	0.096	0.173	0.094	0.216
最大値	$\bar{b}=0.320$		$\bar{b}=0.505$	
y	0.025		0.04	
x	0.140		0.167	

次に、均衡の安定性について検討しよう。(23) 式より次式が得られる。

$$\dot{x}_t=x_t\left\{x_t-\left[1-\frac{(1-\tau)\alpha}{\sigma}\right]Ay_t^{1-\alpha}+y_t-\frac{\rho}{\sigma}\right\} \tag{29}$$

政府は公債残高を、逐次、(24)式により調整するので、(25)式に $b_t=\bar{b}$, $\tau_c=0$ を代入することにより以下の式を得る。

$$x_t=\left\{\left[1-\alpha(1-\tau)-\frac{\tau}{b_t}\right]Ay_t^{1-\alpha}-\left(1+\frac{1}{b_t}\right)y_t\right\} \tag{30}$$

したがって、目標公債残高が与えられた下で、x_t の動きは、(29)式と(30)式により規定される。これらの式を連立させ、整理することにより次の関係を得る。

$$\dot{x}_t\gtreqless 0 \quad\Leftrightarrow\quad \left[\alpha(1-\tau)\left(1-\frac{1}{\sigma}\right)Ay_t^{1-\alpha}+\rho/\sigma\right]\left[\frac{\tau Ay_t^{1-\alpha}-y_t}{\alpha(1-\tau)(1-1/\sigma)Ay_t^{1-\alpha}+\rho/\sigma}-\bar{b}\right]\gtreqless 0$$

したがって $y^L<y_t<y^H$ ならば $\dot{x}_t>0$ となり、$y_t<y^L$, $y_t>y^H$ ならば、$\dot{x}_t<0$ となることがわかる。

以上の議論を準備として、定常成長均衡点の安定性に関して、以下の図のように示すことができる。

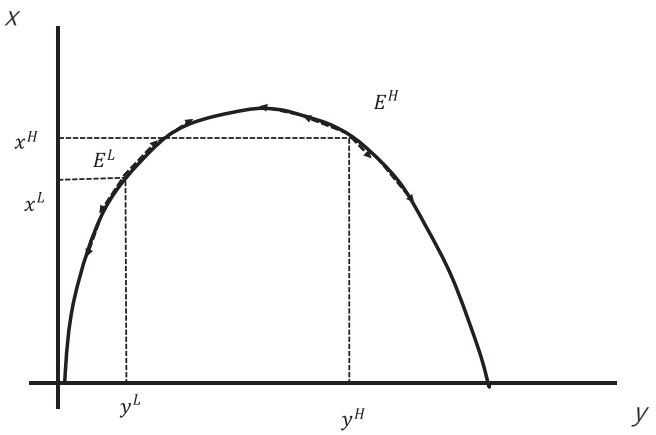

図 4－2　所得税調達の場合の均衡（ケース 1）

図４－２においては、均衡は２点とも不安定点であり、均衡の存在は示すことができるが、その安定性と均衡点への収束は示すことができない。

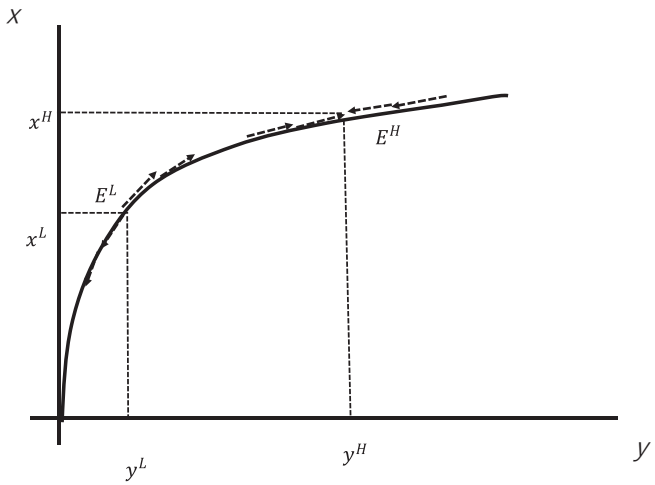

図４－３　所得税調達の場合の均衡（ケース２）

逆に、図４－３においては、E^L 均衡は不安定点であるが、E^H 点は安定均衡である。したがって、定常成長均衡が２点存在するが、比較的高い公共支出＝資本ストック比率のもとで、比較的高い消費＝資本ストック比率を実現できる長期定常成長均衡点において、解の安定性と均衡点への収束を示すことができる。

表４－３　定常成長均衡解の安定性

定常成長均衡の安定性				
所得税率	$\tau=0.25$		$\tau=0.3$	
公債残高目標	$\bar{b}=0.25$		$\bar{b}=0.3$	
y	$y^L=0.007$	$y^H=0.048$	$y^L=0.006$	$y^H=0.092$
x	0.096	0.173	0.094	0.216
安定性	不安定	安定	不安定	安定
最大値	$\bar{b}=0.320$		$\bar{b}=0.505$	
y	0.025		0.04	
x	0.140		0.167	
安定性	安定		安定	

(26')式より、表４－２に示される均衡点の安定性は、図４－３に示される関係を示すことがわかる。そこで、表４－３に示されている安定均衡点を比較すると、所得税率が同じなら公債＝資本ストック比率が低い均衡点において、より高い y と x を実現することができることを意味している。これは、公債＝資本ストック比率が低い方が、より高い公共支出＝資本ストック比率の下で、より高い消費資本ス

トック比率が達成できることを意味している。

また、所得税率が高いケースの方が、より高い公債資本ストック比率を設定することができ、その結果より高い消費＝資本ストック比率を実現できることを示している。これは、本モデルにおいては、公共支出が生産力を持つため、より高い税収の下でより高い公債資本ストック比率を実現することが、消費の可能性を高めることを意味している。

4.2　消費税調達によるケース

引き続いて、消費税が利用可能な場合を検討しよう。そのために、(27)式において所得税 $\tau=0$ と置いて(26)式と連立させることにより、定常成長均衡における $\bar{b}$ と y の関係を次のように示すことができる。

$$\bar{b}=\frac{y[\tau_c(1-\alpha/\sigma)Ay^{-\alpha}-(1+\tau_c)]+\tau_c\rho/\sigma}{\alpha(1-1/\sigma)Ay^{1-\alpha}+\rho/\sigma} \tag{31}$$

(31)式において $\sigma\geq 1$ の場合には、分母は常に正になる。そこで、$y=0$ において $\bar{b}=\tau_c$ となる。また、(31)式右辺第１項は、$y\leq\left[\frac{\tau_c}{1+\tau_c}(1-\frac{\alpha}{\sigma})\right]^{1/\alpha}$ において正となり、逆の場合には負となる。したがって、図に示されるように、ここでも複数解が成立する可能性が示される。

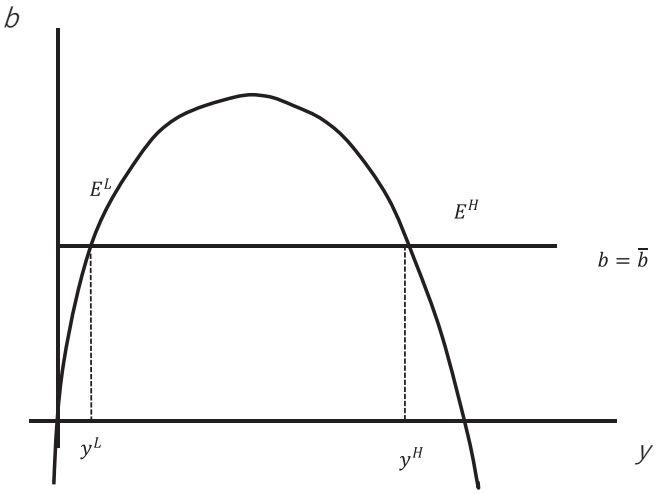

図４－４　消費税調達ケースの複数均衡

以下では、4.1節と同様のパラメータに加えて $\tau_c=0.3$、0.4 を仮定し、(31')に代入することにより、設定可能な公債＝資本ストック比率に関する以下の式（$\tau_c=0.3$）を得る[4)]。

$$\bar{b}=y(5.4y^{-0.4}-26)+0.3 \tag{31'}$$

この式より、公債残高目標の最大値は、y＝0.05 において $\bar{b}=0.395$ を得た。また、比較のために $\tau_c=0.4$ のケースについては、y＝0.09 において $\bar{b}=0.574$ を得た。これより、下の表のような目標設定を行った。

表 4－4　公債残高の目標設定

公債残高の目標設定：$\overline{b}$		
消費税率	τ_c＝0.3	τ_c＝0.4
公債＝資本ストック目標値	0.25	0.3
公債＝資本ストック最大値	0.395	0.574

表 4－4 より、公債＝資本ストック比率の最大値は、同時に用いる消費税率に依存して変化し、消費税率が高いほど、より高い比率を設定することが可能となることがわかる。これは、前小節と同様に、より高い公債残高を維持するために、より大きな公債利払いが必要となることを意味するものと考えられよう。

次に、y と x の関係については、(26)式により与えられる。(26)式において τ＝0 と置くことにより、以下の式を得る。

$$x=(1-\frac{\alpha}{\sigma})Ay^{1-\alpha}-y+\frac{\rho}{\sigma} \tag{32}$$

(32)式において、$y \lessgtr [(1-\alpha)(1-\alpha/\sigma)A]^{1/\alpha}$ について、$\frac{dx}{dy} \gtrless 0$ となることがわかる。

次に、(32)式にパラメータ（τ_c＝0.3）を代入することにより、以下のように示すことができる。

$$x=0.9y^{0.6}-y+0.05 \tag{26”}$$

(26”)式より、公債＝資本ストック比率の設定と定常成長均衡の y および x の関係が示される。

表 4－5　公債＝資本ストック比率の設定と y および x

公債残高設定と y および x				
所得税率	τ_c＝0.3		τ_c＝0.4	
公債残高目標	$\overline{b}$＝0.25		$\overline{b}$＝0.3	
y	y^L＝0.001	y^H＝0.063	y^L＝0.001	y^H＝0.053
x	0.025	0.123	0.094	0.142
最大値	$\overline{b}$＝0.395		$\overline{b}$＝0.574	
y	0.06		0.09	
x	0.086		0.094	

表 4－5 には、仮定した 2 つの消費税率について、公債＝資本比率を適切に設定することにより複数解が生じることが示されている。またそれらの解は、消費税率に依存して異なることがわかる。

次に、均衡の安定性について検討しよう。(23)式より次式が得られる。

$$\dot{x}_t = x_t\left\{x_t - (1-\frac{\alpha}{\sigma})Ay_t^{1-\alpha} + y_t - \frac{\rho}{\sigma}\right\} \tag{33}$$

政府は公債残高を、逐次、(24)式に基づいて調整するので、(25)式に $b_t=\bar{b}, \tau=0$ を代入することにより以下の式を得る。

$$x_t = \frac{1}{(1-\tau_c/\bar{b})}\left\{(1-\alpha)Ay_t^{1-\alpha} - \left(1+\frac{1}{\bar{b}}\right)y_t\right\} \tag{34}$$

したがって、目標公債残高が与えられた下で、x_t の動きは、(33)式と(34)式により規定される。これらの式を連立させ、整理することにより次の関係を得る。

$$\dot{x}_t \gtreqless 0 \quad \Leftrightarrow \quad [\alpha(1-1/\sigma)Ay^{1-\alpha}+\rho/\sigma]\left[\frac{y[\tau_c(1-\alpha/\sigma)Ay^{-\alpha}-(1+\tau_c)]+\tau_c\rho/\sigma}{\alpha(1-1/\sigma)Ay^{1-\alpha}+\rho/\sigma}-\bar{b}\right]\gtreqless 0$$

したがって、ここでも $y^L<y_t<y^H$ ならば $\dot{x}_t>0$ となり、$y_t<y^L, y_t>y^H$ ならば、$\dot{x}_t<0$ となることがわかる。

以上の議論を準備として、定常成長均衡点の安定性に関して、以下の図のように示すことができる。

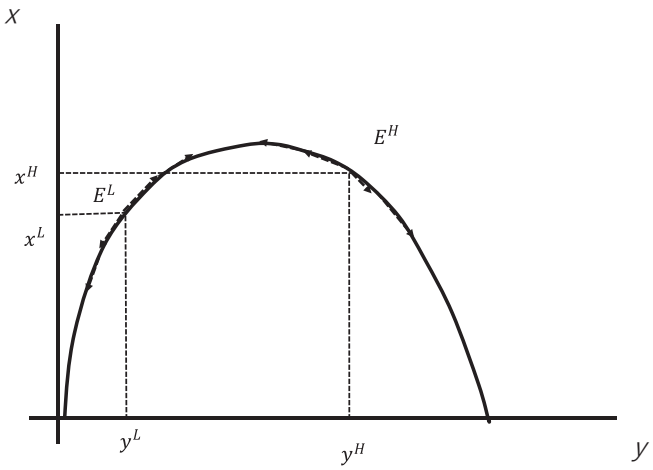

図 4－5　消費税調達ケースの長期均衡（ケース 1）

図 4－5 においては、均衡点は 2 点とも不安定点であり、定常成長均衡の存在は示すことができるが、その安定性と均衡点への収束は示すことができないことがわかる。

逆に、図 4－6 においては、y_L 均衡は不安定点であるが、y_H 点は安定均衡である。したがって、定常成長均衡が 2 点存在し、その一方は安定性と均衡点への収束を示すことができる。したがって、ここでも定常成長均衡が 2 点存在し、比較的高い公共支出＝資本ストック比率のもとで、比較的高い消費＝資本ストック比率を実現できる長期定常成長均衡点において、安定性と均衡点への収束を示すことができた。

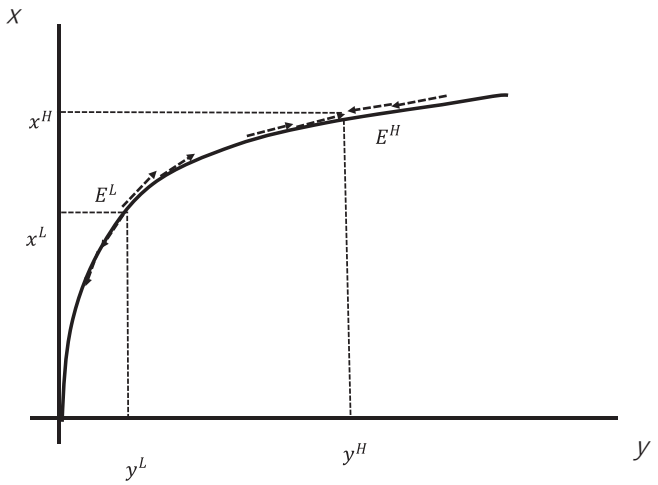

図４－６　消費税調達ケースの長期均衡（ケース１）

表４－６　消費税ケースの定常成長均衡点の安定性

定常成長均衡の安定性				
所得税率	τ_c＝0.3		τ_c＝0.4	
公債残高目標	$\overline{b}$＝0.25		$\overline{b}$＝0.3	
y	y^L＝0.001	y^H＝0.063	y^L＝0.001	y^H＝0.053
x	0.025	0.123	0.094	0.142
安定性	不安定	安定	不安定	安定
最大値	$\overline{b}$＝0.395		$\overline{b}$＝0.574	
y	0.06		0.09	
x	0.086		0.094	
安定性	安定		安定	

(32')式より、表４－４に示される均衡点の安定性は、図４－６に示される関係を示すことがわかる。そこで、表４－６に示されている安定均衡点を比較すると、消費税率が同じなら公債資本ストック比率が低い均衡点においてより高い y と x を実現することができることを意味している。これは、公債＝資本ストック比率が低い方が、より高い公共支出＝資本ストック比率の下でより高い消費資本ストック比率が達成できることを意味している。

また、消費税率が高いケースの方が、より高い公債資本ストック比率を設定することができ、その結果より高い消費＝資本ストック比率を実現できることを示している。これは、本モデルにおいては、公共支出が生産力を持つため、より高い税収によりより高い公債資本ストック比率を実現することが、消費の可能性を高めることを意味している。

ここまで見てきたように、公債残高の資本ストック比率を一定に保つような財政ルールの下では、複

数の長期定常均衡が存在するが、そのうち一方は不安定均衡であるが、もう一方の均衡点は動学的に安定であることが分かった。また、安定的な定常成長均衡点において、比較的高い公共支出＝資本ストック比率のもとで、相対的に高い消費＝資本ストック比率が実現できることがわかり、このような財政ルールのもとで、公債発行の持続性や生産的公共支出の有効性を示すことができた。

他方、公債と同時に用いる租税に関しては、所得税と消費税の差異はどのように考えられるのであろうか。簡単のため $\sigma=1$ とすると、図４－１において最も高い $\bar{b}$ を与える y は、$[(1-\alpha)\tau A]^{1/\alpha}$ であり、図４－４においては $\left[(1-\alpha)\frac{\tau_c}{(1+\tau_c)}A\right]^{1/\alpha}$ となることが示される。したがって、消費税率を適切に設定することにより、所得税調達と同じ均衡を作りだすことができることがわかる。このことは、公債残高の資本ストック比率を一定に保つような財政ルールの下では、補助的に用いる税が所得税であっても、消費税であっても定常成長均衡の公共支出＝資本ストック比率が同じになることを意味している。ところで、(34)式を見ると、税による影響は、むしろ消費＝資本ストック比率に大きな影響を与える可能性がある。また、公債発行が内生的な場合（$\dot{b}\neq 0$）の場合に起こる可能性が考えられる。ここで行った定常成長均衡点の数値による分析結果をもとに、以下のように経済成長率や所得分配の係数を示すことができる。

表４－７　定常成長均衡点の経済成長、所得分配効果

財政ルール	公債資本ストックルール							
税	所得税方式				消費税方式			
税率	0.25		0.3		0.3		0.4	
$b(B/K)$	0.25	0.32	0.3	0.505	0.25	0.395	0.3	0.594
$y(G/K)$	0.048	0.025	0.092	0.04	0.063	0.06	0.05	0.09
経済成長率：γ	2.28	0	5.03	1.08	6.42	8.77	4.94	9.15
所得分配（wL/rM）	1.2	1.14	1.15	0.99	1.2	1.08	1.15	0.94

表４－７から、経済成長や所得分配効果について、以下のようなことが言えるであろう。まず、公債＝資本ストック比率については、より低い率の下で経済成長率が高くなる傾向がある。また、所得分配効果についても、より低い公債=資本ストック比率のもとで労働所得比率が高くなっている。この傾向は、所得税や消費税の税率に関してもみられる。これは、公債発行と同時に用いる租税の収入が高いほど公債＝資本ストック比率が高くなることと関連しているものと思われる。

公債発行のこのような状況を検討するため、次節においては公債発行が内生的に決まり、財政ルールとして公債残高の GDP 比率が一定に保たれるような状況を想定し、公債の持続可能性や補助的に用いる租税による経済成長効果の度を検討しよう。

５．公共支出ルールと定常成長均衡

本節では、新規公債発行が経済の中で内生的に決まる状況のもとで、公債調達の経済成長効果や持続可能性を検討する。公債発行が内生的な状況で、財政ルールとして生産的公共支出を政府が政策的にコントロールし、公債残高の GDP 比率を一定に保つことを考える。本節ではこのような設定のもとで、公債の持続可能性や経済成長効果を検討する。

公債残高の政策目標値を β とすると、$\beta=b_t/Ay_t^{1-\alpha}$ となり、$y_t=(b_t/\beta A)^{1/1-\alpha}$ と示される。ここではこの関係を、より簡単に $\overline{y_t}=(b_t/\beta A)^{1/1-\alpha}$ として、これを公共支出の政策目標と考える。

(22)式および(24)式において、$y_t=(b_t/\beta A)^{1/1-\alpha}$ と置くことにより以下の式を得る。

$$\frac{\dot{b}_t}{b_t}=\left(1-\frac{\tau_c}{b_t}\right)x_t-\frac{(1-\tau)\alpha}{\beta}b_t-\tau\beta+\left(\frac{b_t}{\beta A}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}-\tau\left(\frac{1}{\beta A}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}b_t^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{35}$$

$$\frac{\dot{x}_t}{x_t}=x_t-\left[1-\frac{(1-\tau)\alpha}{\sigma}\right]\left(\frac{b_t}{\beta}\right)+\left(\frac{b_t}{\beta A}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}-\frac{\rho}{\sigma} \tag{36}$$

この経済の長期的動向は、(35)、(36)式により規定され、x_t, b_t が決定される。

定常成長均衡

定常成長均衡においては、x_t, b_t, が一定となり、C_t, K_t, G_t, B_t が一定の率で成長することになる。そこで、まず、(36)式に $\dot{x}_t=0$ を代入し定常成長の x, b を用いて表記することにより、次式を得る。

$$x=\left[1-\frac{(1-\tau)\alpha}{\sigma}\right]\left(\frac{b}{\beta}\right)+\left(\frac{b}{\beta A}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}+\frac{\rho}{\sigma} \tag{37}$$

次に、(35)式に $\dot{b}_t=0$ を代入することにより、次の関係を得る。

$$x=\frac{b}{b-\tau_c}\left\{[1-\alpha(1-\tau)]\left(\frac{b}{\beta}\right)+\tau\beta-\left(\frac{b}{\beta A}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}-\tau\left(\frac{1}{\beta A}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}b^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right\} \tag{38}$$

したがって、定常成長均衡の x, b は、(37)、(38)式から決まることがわかる。以下では、定常成長均衡の特性と、公債の GDP 比率一定という財政ルールがもたらす経済成長と財政の持続可能性の関係を検討しよう。

5.1　所得税調達によるケース

以下の議論においても、結果を明確に示すために、政府が公債に加えて所得税を利用可能な場合と、消費税を利用可能な場合とに分けて分析しよう。

まず、所得税調達ケースについて、(38)式に $\tau_c=0$ を代入することにより、以下の式を得る。

$$x=[1-\alpha(1-\tau)]\left(\frac{b}{\beta}\right)+\tau\beta-\left(\frac{b}{\beta A}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}-\tau\left(\frac{1}{\beta A}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}b^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{39}$$

以下では、前節と同様に $\alpha=0.4$、$\sigma=1$、$\rho=0.05$、A$=1.5$、$\tau=0.25$ を仮定して、このケースの定常均衡について検討したい。また、財政ルールとしては、公債残高の GDP 比 β を 0.6 とするケースについて検討しよう[5)]。

これらのパラメータを(38)式、(39)式に代入することにより次のような 2 式を得る。

$$(\dot{b}=0)\qquad x=1.167b-1.192b^{1.67}+0.298b^{0.67}+0.15 \tag{39'}$$

$$(\dot{x}=0)\qquad x=1.167b-1.192b^{1.67}+0.05 \tag{38'}$$

上記 2 本の式により、まず均衡の b を求めると、$b^{0.67}=-0.336$ となり、正の解が得られないことがわかる。また、$\tau=0.3$ とするケースや、あるいは β を 0.3, 1 などに変化させても、同様に正の公債残

高が得られない。したがって、一般的に想定できるパラメータの範囲内においては、定常成長均衡解が得られないと考えられる。

5.2　消費税調達によるケース

続いて、財源調達手段として公債に加えて消費税が利用可能な場合を検討しよう。そのために、(35)、(36)式において所得税 $\tau=0$ と置くことにより、以下の2式を得る。

$$\frac{\dot{b}_t}{b_t}=\left(1-\frac{\tau_c}{b_t}\right)x_t-(1-\alpha)\left(\frac{b_t}{\beta}\right)+\left(\frac{b_t}{\beta A}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{40}$$

$$\frac{\dot{x}_t}{x_t}=x_t-\left(1-\frac{\alpha}{\sigma}\right)\left(\frac{b_t}{\beta}\right)+\left(\frac{b_t}{\beta A}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}-\frac{\rho}{\sigma} \tag{41}$$

まず、(41)式において $\dot{x}_t=0$ を代入することにより、b と x の関係が次のように示される。

$$x=\left(1-\frac{\alpha}{\sigma}\right)\left(\frac{b}{\beta}\right)-\left(\frac{b}{\beta A}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}-\frac{\rho}{\sigma} \tag{42}$$

ここで、$b\lessgtr\left[\frac{(1-\alpha)(1-\alpha/\sigma)}{\beta}\right]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}(A\beta)^{\frac{1}{\alpha}}$ において、$\frac{dx}{dy}\gtrless 0$ となり、$b=0$ において $x=\rho/\sigma$ が得られるので、$\dot{x}=0$ 線の概形を図5－1のように求めることができる。

次に、(40) 式に $\dot{b}_t=0$ を代入することにより、次の関係を得る。

$$x=\frac{b}{b-\tau_c}\left[\frac{1-\alpha}{\beta}b-\left(\frac{b}{\beta A}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right] \tag{43}$$

(43)式において、$b\geq\tau_c and\ b\leq A^{\frac{1}{\alpha}}\rightarrow\frac{dx}{db}<0$ となることが示されるので、$\dot{b}=0$ 線の概形を図5－1のように示すことができる。

図5－1には、2つの均衡点が存在し、複数均衡が成立していることがわかる。このうち、相対的に大きな消費＝資本ストック比率と比較的小さな公債残高が存在する場合の均衡点 E^L は、鞍点均衡点であり、この均衡点の近傍の左上方と右下方の初期点からから出発し、この均衡点に収束する鞍点経路が存在する。そして、この収束経路を外れると、右上方の領域には別の均衡点 E^H に収束する動学経路があり、それも外れる場合には、消費＝資本ストック比率が徐々に低下し、公債＝資本ストック比率が無限に拡大してゆく経路が存在していることがわかる。

次に、均衡点 E^H は、相対的に小さな消費＝資本ストック比率と比較的高い公債残高が存在する場合の均衡点を示している。この図の位相関係を検討すると、この均衡点も鞍点均衡点であり、この均衡点の左上方と右下方にある初期点からから出発する鞍点経路が存在し、この均衡点に収束する。そして、この収束経路を外れると、先ほどと同様に、この図の右上方に示される領域においては、消費＝資本ストック比率が徐々に低下し、公債＝資本ストック比率が無限に拡大してゆく経路が存在していることがわかる。

次に、前小節と同様に $\alpha=0.4$、$\sigma=1$、$\rho=0.05$、A＝1.5、$\tau_c=0.3$ を仮定して、このケースの定常均衡について検討しよう。ここでも、財政ルールとしては公債残高の GDP 比 β を 0.6 とするケースについて検討しよう。

これらのパラメータを、(42)、(43)式に代入することにより、以下のような方程式を得る。

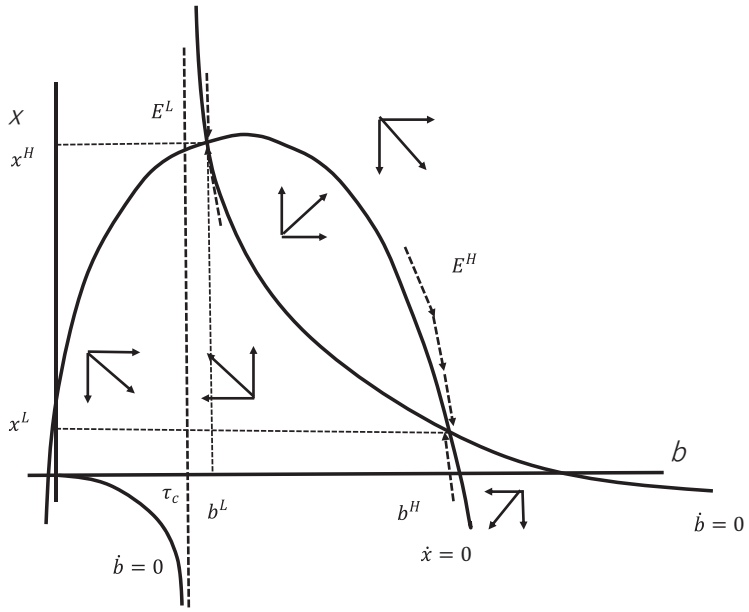

図５－１　公債および消費税調達ケースの長期均衡

$$(\dot{b}=0) \qquad x=\frac{b}{b-0.3}(b-1.192b^{1.67}) \tag{43'}$$

$$(\dot{x}=0) \qquad x=b-1.192b^{1.67}-0.05 \tag{42'}$$

これらの２式から得られる定常成長均衡点は、次の表にまとめられる。

表５－１　GDP 比一定ルールの定常成長均衡

消費税ケースの定常成長均衡		
消費税率	$\tau_c=0.3$	$\tau_c=0.4$
b	0.666	0.708
x	0.112	0.088
y	0.605	0.675
安定性	安定	安定

表５－１に示された定常成長均衡点を比較すると、より高い消費税率が、より高い公債残高の資本ストック比率と公共支出資本ストック比率を実現することがわかる。ところが、公債残高の GDP 比率一定ルールの下での消費税調達の場合には、消費税率が低い均衡の方が実現できる消費＝資本ストック比率が大きいことがわかる。

この定常成長均衡点の数値による分析結果について、以下のように経済成長率や所得分配の係数を示すことができる。

表 5－2　定常成長均衡の経済成長、所得分配効果

財政ルール	公債 *GDP* 比率ルール	
税	消費税方式	
税率	0.3	0.4
$b(B/K)$	0.666	0.708
$y(G/K)$	0.605	0.675
経済成長率：γ	39.4	43.4
所得分配（wL/rM）	0.9	0.88

表 5－2 から、公債残高の資本ストック比率を一定とする内生的経済成長モデルの経済成長や所得分配効果について、以下のようなことが言えるであろう。まず、公債＝資本ストック比率については、より高い率の下で経済成長率が高くなっている。また、所得分配効果については、より低い公債＝資本ストック比率のもとで労働所得比率が高くなっている。したがって、このモデルにおいて消費税を用いる状況においては、公債発行の経済効果において経済成長という効率性効果と所得分配という公平性効果の間に、トレードオフが存在していることを意味していると考えられる。この傾向は、消費税の税率に関してもみられる。これは、公債発行と同時に用いる租税の収入が高いほど公債＝資本ストック比率が高くなることと関連しているものと思われる。

6　結語

ここでは、生産的公共支出を成長のエンジンとする内生的経済成長モデルを用いて、公債発行がもたらす不決定性、複数均衡や経済成長効果を検討してきた。公債残高の資本ストック比率を一定に保つような財政ルールの下では、複数の長期定常均衡が存在し、一方は不安定均衡であり、もう一方の均衡点は動学的に安定であり、安定的な定常成長均衡点において、比較的高い公共支出＝資本ストック比率と消費＝資本ストック比率が実現できることがわかった。他方、公債と同時に用いる租税に関しては、所得税と消費税に関しては、公債残高の資本ストック比率を一定にとどめるような財政ルールの下では大きな差は生じない。

数値による分析においては、公債＝資本ストック比率が低い均衡点において、より高い公共支出＝資本比率と消費＝資本ストック比一率を実現することができることがわかった。また、所得税率が高いケースの方が、より高い公債資本ストック比率を設定することができ、その結果より高い消費資本ストック比率を実現できることがわかった。これは、公共支出が生産力を持つため、より高い税収により、より高い公債＝資本ストック比率を実現し、消費の可能性を高めることを意味している。他方、消費税ケースにおいても、公債資本ストック比率の最大値は、消費税率が高いほど、より高い比率を設定することが可能となり、公債＝資本ストック比率が高い場合に、より高い公共支出＝資本ストック比率と消費＝資本ストック比率を実現できる可能性が示されている。

経済成長や所得分配効果について、まず、より低い公債＝資本ストック比率の下で経済成長率が高くなる傾向がある。また、所得分配効果についても、同様の効果が得られる。この傾向は、所得税や消費税の税率に関してもみられる。これは、公債発行と同時に用いる租税の収入が高いほど、公債＝資本ストック比率が高くなることと関連しているものと思われる。

ところが、公債発行が内生的に決まり、財政ルールとして公債残高のGDP比率を一定に保つようなモデルにおいては、所得税ケースについては、一般的に正の公債残高をもたらす均衡解は存在しないことがわかった。他方、消費税のケースにおける不決定性や複数均衡、また、定常成長均衡の安定性に関する興味深い結論が得られた。

数値による分析においては、より高い消費税率が、より高い公債残高の資本ストック比率と公共支出資本ストック比率を実現することがわかる。ところが、消費税率が低い均衡の方が、実現できる消費資本ストック比率が大きいことがわかる。経済成長や所得分配効果について、まず、より高い公債＝資本ストック比率の下で経済成長率が高くなっている。また、所得分配効果については、より低い公債=資本ストック比率のもとで労働所得比率が高くなっている。したがって、公債発行の経済効果において、経済成長という効率性効果と所得分配という公平性効果の間に、トレードオフが存在していることを意味していると考えられる。この傾向は、消費税の税率に関してもみられる。

今後の課題として、公債発行を内生変数とするモデルにおいては、定常成長均衡やその経済成長効果に関して、より厳密な分析が必要となる。また、さらに詳細な数値解析やキャリブレーションを用いた動学的経路の分析を行うことにより、公債発行の持続性に関する興味深い結論が得られる可能性が考えられる。さらに、本モデルは、資産保有状況が異なる個人を明示的に扱うことが可能な設定となっており、経済成長効果に加えて、同時に所得分配効果の研究も可能である。これらの課題については、来年度以降取り組んでゆきたい。

注

1）　このケースは、Futagami et al.（2008）においても分析されているが、ここでは我々独自の分析である消費税調達ケースとの比較のために示すことにしたい。

2）　(4)式の生産関数より、$\left(Q_t/K_t\right)=Ay_t^{1-\alpha}$ と示されるが、2022年において名目 GDP は557.2兆円、資本ストック（民間資本＋公的固定資産）は1525.6兆円、中央政府と地方政府の政府支出純計は148.7兆円であるので、これらより概算し A＝1.5 とした。

3）　2022年度において国税合計は74.17兆円、地方税合計は48.22兆円であり、これを当該年度の国民所得409.0兆円と比較することにより0.3弱の値を得る。これより上記の２ケースを仮定した。

4）　先述のように、2022年度において国税合計は74.17兆円、地方税合計は48.22兆円であり、これを当該年度の民間最終消費支出315.8兆円と比較することにより0.4弱の値を得る。これより上記の２ケースを仮定した。

5）　先述のように EU においては公債残高が GDP 比60％に規制されている。

参考文献

Alesina, A. and D. Rodrick (1994) “Distributive Politics and Economic Growth,” *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 109, pp. 465–490.

Barro, R. J. (1990) “Government Spending in a Simple Model of Endogenous Growth,” *Journal of Political Economy*, Vol. 98, pp. s103–s125.

Bruce, N. and S. Turnovski (1999) “Budget Balance and Welfare and the Growth Rate: ‘Dynamic Setting’ of the long run government budget,” *Journal of Money, Credit and Banking,* Vol, 31, pp. 162–186.

Futagami, K., Iwaisako T. and R. Ohdoi (2008) “Debt Policy Rule, Productive Government Spending, and Multiple Growth Paths,” Macroeconomic Dynamics, Vol. 12, pp. 445–462.

Ghosh, S. and I. Mourmouras (2004) “Endogenous Growth, Welfare and Budgetary Regimes,” *Journal of Macroeconomics*, Vol. 26, pp. 624–635.

Gokan, Y. (2013) “Indeterminacy, Labor and Capital Income Taxes, and Non-linear Tax Schedules,” *Journal of Macroeconomics*, Vol. 36, pp. 138–149.

Grainer A. and W. Semmler (1999) “An Endogenous Growth Model with Public Capital and Government Borrowing,” *Annals of Operations Research*, Vol. 88, pp. 65–79.

———— (2000) “Endogenous Growth, Government Debt and Budgetary Regimes,” *Journal of Macroeconomics*, Vol.

22, pp. 363–384.
Turnovski, S. (2000) *Methods of Macroeconomic Dynamics, 2nd ed.* Cambridge M.A. MIT Press.
Nourry, C., Seegmuller T. and A. Venditti (2013) "Aggregate Instability under Balanced-Budget consumption Taxes: A re-examination," *Journal of Economic Theory*, Vol. 148, pp. 1972–2006.
西垣泰幸、新井潤、伊藤敏和（2023）「公債の持続可能性と経済の不決定性に関する研究：内生的経済成長モデルによる分析（ノート）」、『社会科学研究年報』、第53号、pp. 263–278。