ANNUAL BULLETIN OF RESEARCH INSTITUTE FOR SOCIAL SCIENCES
No. 53, 263-278, 2023

〈共同研究〉
「非線形力学系の新しい成果を応用した複雑な経済変動の解明と将来予測」

公債の持続可能性と経済の不決定性に関する研究：内生的経済成長モデルによる分析（ノート）

西垣泰幸*・新井　潤**・伊藤敏和***

1．イントロダクション

公債発行は、不況期におけるマクロの景気刺激策のために一時的に税収を超える公共支出を可能とする手段として、また、長期間にわたり利用者に便益をもたらす社会資本や公共施設の投資費用と利用者便益との時間的なずれを調整する手段として利用されてきた。

日本においては、高度成長期の終わりごろ、特に第１次石油危機後に、不況対策のための財政赤字が徐々に累積しはじめた。その後80年代にとられた財政再建の努力にもかかわらず、1990年代初頭になるといわゆる資産バブル崩壊後の大規模な景気対策にともなう公債と長期政府借入の残高がGDP比68％から113％へと急速に累増した。そして、2008年のリーマンショック後の緊急対策が始まると、さらに急激な累積が起こり、債務残高のGDP比は2008年の182％から５年間で221％へと急増した。

諸外国においても、第１次石油危機以降赤字公債が再び発行されるようになり、90年代の世界同時不況を経て、特にヨーロッパの国々においては、ギリシャをはじめポルトガル、イタリア、スペインなどの国々で2000年代の政府債務破綻が起こり、政府債務の調達金利が急騰したり、必要な財政支出ができないなど、大きな社会問題となった。しかしながら、その後の財政再建の努力により、現在では政府債務残高は、一部の例外を除いてはGDP比150％以内にとどまっている。

財政規律を高め、その健全度や持続可能性を高めるために、様々な財政ルールが採用されている。日本においては、公債費以外の財政支出を税など公債以外の基本的財源により賦うという基礎的財政収支の均衡が財政目標とされてきた。また、欧州諸国においては、マーストリヒト基準において、加盟国と潜在的加盟希望国において、政府債務残高のGDP比を60％以内にとどめることが要請されている。

その後、2020年に始まった感染症の世界的な蔓延の中で、各国は感染防止や医療のための巨額の支出を余儀なくされた。その結果、日本の債務残高は、GDP比でみて250％を超える巨額にまで達している。また、欧州諸国や米国においても押しなべて、５％から10％の上昇が起こっている。このような背景の中で公債の持続可能性に関する研究が再び注目を浴びている。ここでは、生産的公共支出を導入した内生的経済成長モデルを用いて、公債発行の持続可能性と公債発行がもたらす経済の不決定性を検討する。

政府の生産的公共支出や社会資本を明示的に考慮した内生的経済成長モデルを用いて、公債調達の持続可能性を検討した研究は比較的多数が存在する。

＊龍谷大学経済学部　教授
＊＊龍谷大学経済学部　准教授
＊＊＊龍谷大学　名誉教授

まず、生産的公共支出を成長のエンジンとした内生的経済成長モデルは、Barro（1990）、Alesina and Rodrick（1993）に始まる。そして、所得税により調達された生産的公共支出が存在する場合には、所得税率と経済成長率との間に逆U字の関係（ラッファーカーブ）が存在すること、また、Alesina and Rodrick は要素保有率が個人間で異なる状況を想定し、長期的な所得分配効果と注意投票者モデルにおける政策決定を検討している。Futagami, Iwaisako and Ohdoi（2008）は、生産的公共支出と公債発行を明示的に導入した内生的経済成長モデルを用いて、資本公債比率を一定とするような財政規律が経済成長に与える効果を検討し、複数の長期均衡が成立し、経済の初期条件に依存して、長期均衡の経済状況が大きく異なることを示した。これに対して、Bruce and Turnovsky（1999）、Greiner and Semmler（1999, 2001）、Turnovsky（1997, 2000）は、社会資本ストックを導入した内生的経済成長モデルにおいて、公債発行の財政ルールが経済成長にいかに影響を与えるかを分析している。また、Gosh and Mourmouras（2004）は、同様の設定において、財政ルールの最適性に関して研究した。

他方、Nourry, Seegmuller and Venditi（2013）は、消費税により調達される均衡財政制約が経済成長にもたらす効果を分析し、非線形の消費税を用いて均衡財政ルールにより財政支出を提供するならば、複数均衡が成立し、経済は不安定性を高めることを示した。Gokan（2013）は、非線形の労働、資本所得税を用いて均衡財政が経済の不安定性に与える効果を検討し、労働所得税は均衡の安定性を高める効果を持つが資本所得税は長期均衡の不決定性と不安定性を高めることを示した。

ここでは、Alesina and Rodrick と Futagami et al. による生産的公共支出を導入した内生的経済成長モデルに、新たに消費税と公共支出に関する財政ルールを導入し、公債発行を含む財政調達方式が長期的な経済成長と所得分配に及ぼす影響を検討する。本研究は Alesina and Rodrick と比較して、新たに消費税調達と公債発行の経済成長効果と所得分配効果を検討することであり、Futagami et al. に比較して、新たに消費税を導入し公債発行の持続可能性を検討するとともに、公共支出ルールを加えて経済成長効果を検討すること、さらには、これらについて所得分配効果を検討することである[1)]。

本論文の構成は、次のように示される。第2節では、分析に用いる基本モデルが提示され、第3節ではその定常成長均衡が定義される。続いて第4節においては、公債残高の資本ストック比率を一定とする財政ルールのもとで、補助的に所得税と消費税を調達手段として利用する場合の公債発行の持続性、経済成長効果が検討される。第5節では、新規公債発行が内生的に決まる場合について公債の GDP 比率を一定とするような財政ルールのもとで、公債発行の持続性と経済成長効果が分析される。第6節においては、結語と今後の研究方針が示される。

2．基本モデル

資産の保有状況や労働供給量が異なる n 人の個人が存在すると仮定する。人口は一定で、個人は無限期にわたり生存するとする。

生産活動は、資本ストックと労働力に加えて、政府が提供する生産的公共支出を用いて1次同次の生産関数により行われる。

政府は、所得税、消費税に加えて公債発行により財源を得て、生産的公共支出を提供する。財政ルールとしては、公債＝資本比率を一定とするように公債発行に上限を加えるものと、公共支出＝資本比率が一定になるように公共支出を提供し、その費用の一部を公債により調達するものを考える。

消費者

t 期の個人 i の消費を $c_i\,(t)$ として、効用関数は次のように示される。

$$U(C_i) = \int_0^{\infty} e^{-\rho t}\,\frac{C_i(t)^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}\,dt \qquad (1)$$

ここで、ρ は時間選好率であり、σ は異時点間の消費の代替の弾力性である。

この個人は t 期において資産 $m_i(t)$ を保有し、資本ストックあるいは公債の保有により運用する。また、労働供給 l_i を提供し労働所得を得る。個人が保有する資産と労働供給量は次のような式により示される。

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(t) = M_t \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} l_i = L \quad (3)$$

生産体系

財の生産は、資本ストック、労働供給、生産的公共支出を用いて、次のようなコブ＝ダグラス型生産関数により行われる。

$$Q_t = AK_t^{\alpha}(G_t L)^{1-\alpha} \quad (4)$$

ここで、Q_t は生産物、K_t は資本ストック、G_t は生産的公共支出を示している。財の生産は競争的に行われ、利潤最大条件は次のように示される。

$$r_t = \alpha A K_t^{\alpha-1}(G_t L)^{1-\alpha} = \alpha A(G_t L/K_t)^{1-\alpha} \quad (5)$$

$$w_t = (1-\alpha)AK_t^{\alpha}G_t(G_t L)^{-\alpha} = (1-\alpha)AG_t(G_t L/K_t)^{-\alpha} \quad (6)$$

生産関数の一次同次の仮定と人口一定の仮定より、以下では L= 1 と置く。

政府行動

政府の財源調達手段としては、所得税（τ）、消費税（ τc）、公債（B_t）が利用可能とする。したがって、政府の予算制約式は以下のように示される。

$$\dot{B}_t = rB_t - \tau(r_t M_t + w_t) - \tau_c C_t + G_t \quad (7)$$

ここで、C_t は個人の消費合計であり、$\sum_{i=1}^{n} c_i(t) = C_t$ としている。政府の財政ルールとしては、以下のものを考える。

（1）公債発行ルール：公債＝資本ストック比率（B_t/K_t）を一定とする

（2）政府支出制約：公共支出＝資本ストック比率（G_t/K_t）を一定とする

公債発行ルールは、公債の発行に一定の制限を設け、財政の健全性を保つためのものであり、その基準としては公債残高の GDP 比などがある。ここでは、Futagami et al. と同様に公債残高の資本ストック比率を採用する。他方、公共支出制約は、公共支出の拡大に対して一定の上限を設けることにより間接的に財政の健全性を保つことを期待するものと、財政支出の効果に着目し、一定の以上の政策効果を確保するために支出の規模としての目標を設定するものである。公共支出に関するルールとしては、例えば、公共投資の GDP 比の設定などがあげられよう。

市場均衡

個人の保有する資産は、資本ストックとして生産に提供されるか、公債を保有することにより運用される。したがって、以下の資産配分式が成立する。

$$M_t = K_t + B_t \tag{8}$$

個人の資本市場の裁定行動を考えると、これら２つの運用方法から得られる収益は一致し、公債の利子率と資本ストックのそれは等しくなる。

資源制約

出来上がった生産物は、個人に消費されるか、資本ストックとして投資されるか、あるいは生産的公共財として利用される。したがって、経済全体の資源制約式は、以下のように示される。

$$Q_t = C_t + \dot{K}_t + G_t \tag{9}$$

３．定常成長均衡

個人の効用最大化

個人は、市場で決まる利子率、賃金率、及び税率を所与として、無限期間にわたる効用最大化より各期の消費と貯蓄を決定する。

（３）、（４）式を利用すると、個人の所得は、資産の保有状況と以下のように示される。

$$\begin{aligned} Y_i(t) &= (1-\tau)[r_t m_i(t) + w_t l_i] \\ &= (1-\tau)[A\alpha(G_t/K_t)^{1-\alpha} m_i(t) + A(1-\alpha)G_t(G_t/K_t)^{-\alpha} l_i] \\ &= (1-\tau)m_i(t)[A\alpha(G_t/K_t)^{1-\alpha} + A(1-\alpha)(G_t/K_t)^{1-\alpha} K_t l_i] \\ &= (1-\tau)m_i(t)\left[A\alpha(G_t/K_t)^{1-\alpha} + A(1-\alpha)(G_t/K_t)^{1-\alpha}\,\mu_i/(1+B_t/K_t)\right] \end{aligned} \tag{10}$$

ここで、$\mu_i \equiv \left(l_i/L \,/\, m_i/M\right)$ は個人の労働＝資産シェアーを表している。

（10）式を用いて、個人の予算制約式は次のように示される。

$$\begin{aligned} \dot{m}_i = (1-\tau)m_i(t)&\left[A\alpha(G_t/K_t)^{1-\alpha} + A(1-\alpha)(G_t/K_t)^{1-\alpha}\,\mu_i/(1+B_t/K_t)\right] \\ &-(1+\tau_c)c_i(t) \end{aligned} \tag{11}$$

（11）式を用いて、個人の通時的な効用最大化問題は、次のように示される。

$$\begin{aligned} &\max_{c_i, m_i} \int_0^\infty e^{-\rho t}\,\frac{C_i(t)^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}\,dt \\ s.t.\quad &\dot{m}_i = (1-\tau)m_i(t)\left[A\alpha(G_t/K_t)^{1-\alpha} + A(1-\alpha)(G_t/K_t)^{1-\alpha}\,\mu_i/(1+B_t/K_t)\right] \\ &\qquad -(1+\tau_c)c_i(t) \end{aligned} \tag{12}$$

（12）式に関する通時価値 Hamiltonian を作り、最大化のための一階の条件を求めると次のようになる。

$$\mathcal{H} = \frac{C_i(t)^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} + \theta\{(1-\tau)m_i(t)\left[A\alpha(G_t/K_t)^{1-\alpha} + A(1-\alpha)(G_t/K_t)^{1-\alpha}\,\mu_i/(1+B_t/K_t)\right] - (1+\tau_c)c_i(t)\} \tag{13}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c} = c_i(t)^{-\sigma} - (1+\tau_c)\theta = 0 \tag{14}$$

$$\dot{\theta} = \rho\theta - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial m} = \rho\theta - \theta(1-\tau)\alpha A\left(\frac{G_t}{K_t}\right)^{1-\alpha} \tag{15}$$

（14）、（15）式より消費の成長率に関する次式を得る。

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\sigma}\left[(1-\tau)\alpha A\left(\frac{G_t}{K_t}\right)^{1-\alpha} - \rho\right] \tag{16}$$

（16）式より、個人の消費の成長率は、マクロの変数のみに依存することがわかり、資産や労働の分配状況には依存しないことがわかる。したがって、各個人は均衡成長経路において消費の成長率と同じ率で資産の蓄積を行うことがわかる。

$$\frac{\dot{m}}{m} = \frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\sigma}\left[(1-\tau)\alpha A\left(\frac{G_t}{K_t}\right)^{1-\alpha} - \rho\right] \tag{17}$$

また、（16）、（17）式より、経済全体の消費（C_t）と、資産（M_t）についても同率で成長することがわかる。示される成長率を γ と表すことにする。

$$\gamma \equiv \frac{\dot{C}_t}{C_t} = \frac{\dot{M}_t}{M_t} = \frac{1}{\sigma}\left[(1-\tau)\alpha A\left(\frac{G_t}{K_t}\right)^{1-\alpha} - \rho\right] \tag{18}$$

資本蓄積と公債発行

個人の予算制約式や市場均衡条件式を利用して、経済の定常成長経路の資本ストック、生産的公共支出、公債残高などの変数を求めてゆこう。まず、資産市場の均衡条件式（８）式を、政府予算制約式（９）式に代入することにより、公債発行に関する次式を得る。

$$\dot{B}_t = (1-\tau)r_t B_t - (\tau Q_t + \tau_c C_t - G_t) \tag{19}$$

（19）式において、$b_t \equiv B_t/K_t$ と置いて整理することにより、次式が得られる。

$$\frac{\dot{b}_t}{b_t} = (1-\tau)r_t + \left(\frac{G_t}{B_t} - \tau\frac{Q_t}{B_t} - \tau_c\frac{C_t}{B_t}\right) - \frac{\dot{K}_t}{K_t} \tag{20}$$

他方、資源制約式（６）より資本蓄積率に関する次式が得られる。

$$\frac{\dot{K}_t}{K_t} = A\left(\frac{G_t}{K_t}\right)^{1-\alpha} - \frac{C_t}{K_t} - \frac{G_t}{K_t} \tag{21}$$

（20）式に（21）式を代入し、$y_t \equiv G_t/K_t$、$x_t \equiv C_t/K_t$ とおいて整理することにより、次式が得られる。

$$\frac{\dot{b_t}}{b_t} = \left[(1-\tau)\alpha - 1 - \frac{\tau}{b_t}\right] A y_t^{1-\alpha} + \left(1 - \frac{1}{b_t}\right) y_t + \left(1 - \frac{\tau_c}{b_t}\right) x_t \tag{22}$$

また、(19) 式と (21) 式より、次式が得られる。

$$\frac{\dot{x_t}}{x_t} = \frac{\dot{C_t}}{C_t} - \frac{\dot{K_t}}{K_t} = x_t - \left[1 - \frac{(1-\tau)\alpha}{\sigma}\right] A y_t^{\alpha-1} + y_t - \frac{\rho}{\sigma} \tag{23}$$

4．公債発行ルールと定常成長均衡

財政ルールとして、公債発行の上限を、目標公債残高の資本ストック比率（$\bar{b}$）として設定するものを考える。その時、新規公債は次のような調整関数に従って発行、あるいは償還されることになる。

$$\dot{b_t} = -\phi\left(b_t - \bar{b}\right), \quad \frac{\dot{b_t}}{b_t} = -\phi\left(1 - \frac{\bar{b}}{b_t}\right) \tag{24}$$

ここで、ϕ は正の調整係数である。(24) 式を (22) 式に代入して整理することにより、次式を得る。

$$x_t = \frac{1}{(1-\tau_c/b_t)}\left\{\left[1 - \alpha(1-\tau) - \frac{\tau}{b_t}\right] A y_t^{1-\alpha} - \left(1 + \frac{1}{b_t}\right) y_t - \phi\left(1 - \frac{\bar{b}}{b_t}\right)\right\} \tag{25}$$

この経済の長期的動向は、(23)、(24)、(25) 式により規定され、x_t, b_t, y_t が決定される。

定常成長均衡

定常成長均衡においては、x_t, b_t, y_t が一定となり、C_t, K_t, G_t, B_t が一定の率で成長することになる。そこで、まず、(23) 式に ($\dot{x_t}$)=0を代入することにより、次式を得る。

$$x = \left[1 - \frac{(1-\tau)\alpha}{\sigma}\right] A y^{1-\alpha} - y + \frac{\rho}{\sigma} \tag{26}$$

次に、(24) 式において ($\dot{b_t}$)= 0 を代入することにより、b_t=$\bar{b}$ を得る。これを (25) 式に代入することにより、次の関係を得る。

$$x = \frac{\bar{b}}{\bar{b}-\tau_c}\left\{\left[1 - \alpha(1-\tau) + \frac{\tau}{\bar{b}}\right] A y^{1-\alpha} - \left(1 + \frac{1}{\bar{b}}\right) y\right\} \tag{27}$$

したがって、定常成長均衡の x, y は、(26)、(27) 式から決まることがわかる。以下では、定常成長均衡の特性と、財政ルールすなわち公債発行目標と経済成長の関係を検討しよう。

4.1　所得税調達によるケース

以下では議論を明確にするために、政府が公債に加えて所得税を利用可能な場合と、消費税を利用可能な場合とに分けて分析しよう。まず、所得税が利用可能な場合を検討するために、(27) 式において消費税 τ_c= 0と置いて (26) 式と連立させることにより、定常成長均衡における $\bar{b}$ と y の関係を次のように示すことができる[2)]。

$$\bar{b} = \frac{y(\tau A y^{-\alpha} - 1)}{\alpha(1-\tau)\left(1 - {}^{1}/_{\sigma}\right) A y^{1-\alpha} + {}^{\rho}/_{\sigma}} \tag{28}$$

（28）式において$\sigma \geq 1$の場合には、分母は常に正になる。そこで、$y=0$, $(\tau A)^{1/\alpha}$ において$\bar{b}=0$となる。したがって、図に示されるように、複数解が成立する可能性が示される。

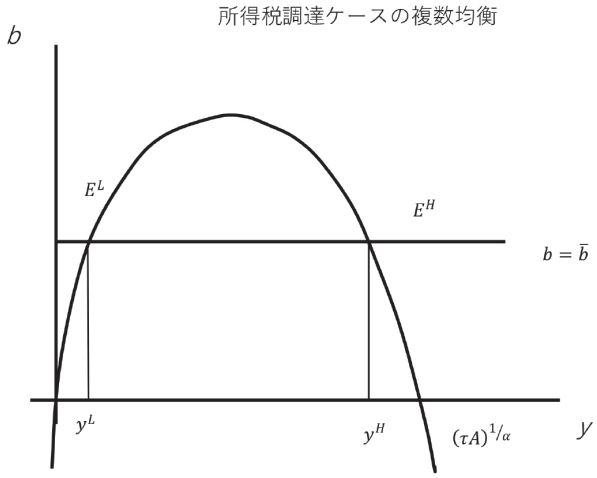


図 4-1　所得税調達ケースの複数均衡

次に、yとxの関係については、（26）式により与えられ、この式にyを代入すれば、xが決まる。そして、$y \lessgtr \left\{(1-\alpha)\left[1-\frac{(1-\tau)\alpha}{\sigma}\right]A\right\}^{1/\alpha}$ において、$\frac{dx}{dy} \gtrless 0$となることが示される。

次に、均衡の安定性について検討しよう。（23）式より次式が得られる。

$$\dot{x_t} = x_t\left\{x_t - \left[1-\frac{(1-\tau)\alpha}{\sigma}\right]Ay_t^{1-\alpha} + y_t - \frac{\rho}{\sigma}\right\} \tag{29}$$

政府は公債残高を、逐次、（24）式により調整するので、（25）式に$b_t=\bar{b}$, $\tau_c=0$を代入することにより以下の式を得る。

$$x_t = \left\{\left[1-\alpha(1-\tau)-\frac{\tau}{b_t}\right]Ay_t^{1-\alpha} - \left(1+\frac{1}{b_t}\right)y_t\right\} \tag{30}$$

したがって、目標公債残高が与えられた下で、x_tの動きは、（29）式と（30）式により規定される。これらの式を連立させ、整理することにより次の関係を得る。

$$\dot{x_t} \gtrless 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\alpha(1-\tau)\left(1-{}^1/_\sigma\right)Ay_t^{1-\alpha} + {}^\rho/_\sigma\right]\left[\frac{\tau Ay_t^{1-\alpha}-y_t}{\alpha(1-\tau)\left(1-{}^1/_\sigma\right)Ay_t^{1-\alpha}+{}^\rho/_\sigma} - \bar{b}\right] \gtrless 0$$

したがって$x^L, y_t < y^H$ならば（$\dot{x_t}$）>0となり、$y_t<y^L, y_t>y^H$ならば、$\dot{x_t}$）>0となることがわかる。

以上の議論を準備として、定常成長均衡点の安定性に関して、以下の図のように示すことができる。

図4-2においては、均衡は2点とも不安定点であり、定常成長均衡の存在は示すことができるが、その安定性と均衡点への収束は示すことができない。

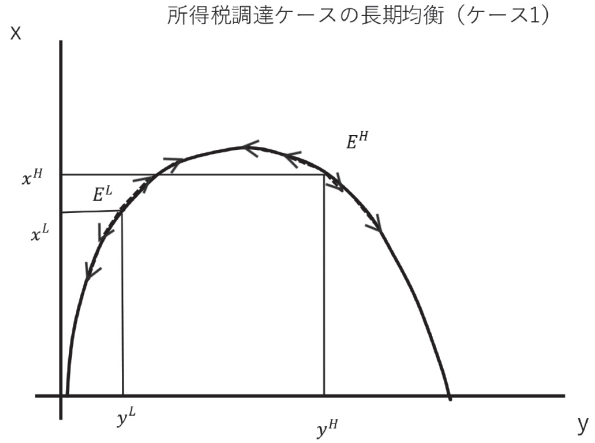


図 4-2　所得税調達の場合の均衡（ケース 1）

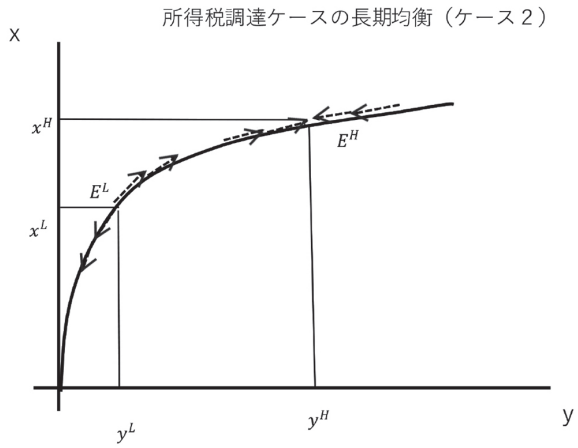


図 4-3　所得税調達の場合の均衡（ケース 2）

逆に、図4-3においては、E^L 均衡は不安定点であるが、E^H 点は安定均衡である。したがって、定常成長均衡が 2 点存在するが、比較的高い公共支出＝資本ストック比率のもとで、比較的高い消費＝資本ストック比率を実現できる長期定常成長均衡点において、安定性と均衡点への収束を示すことができる。

4.2　消費税調達によるケース

引き続いて、消費税が利用可能な場合を検討しよう。そのために、(27) 式において所得税 $\tau = 0$ と置いて (26) 式と連立させることにより、定常成長均衡における $\bar{b}$ と y の関係を次のように示すことができる。

$$\bar{b} = \frac{y[\tau_c(1-{}^{\alpha}/_{\sigma})Ay^{-\alpha}-(1+\tau_c)]+\tau_c{}^{\rho}/_{\sigma}}{\alpha(1-{}^{1}/_{\sigma})Ay^{1-\alpha}+{}^{\rho}/_{\sigma}} \tag{31}$$

(31) 式において $\sigma \geq 1$ の場合には、分母は常に正になる。そこで、$y = 0$ において $\bar{b} = \tau_c$ となる。また、

（31）式右辺第１項は、$y \leq \left[\frac{\tau_c}{1+\tau_c}\left(1-\frac{\alpha}{\sigma}\right)\right]^{1/\alpha}$において正となり、逆の場合には負となる。したがって、図に示されるように、ここでも複数解が成立する可能性が示される。

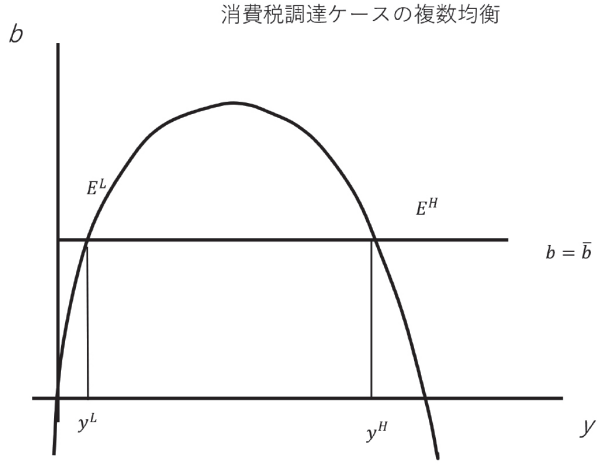


図 4-4　消費税調達ケースの複数均衡

次に、yとxの関係については、（26）式により与えられる。（26）式において $\tau=0$ と置くことにより、以下の式を得る。

$$x = \left(1-\frac{\alpha}{\sigma}\right)Ay^{1-\alpha} - y + \frac{\rho}{\sigma} \tag{32}$$

$y \gtreqless \left[(1-\alpha)\left(1-\alpha/\sigma\right)A\right]^{1/\alpha}$ において、$\frac{dx}{dy} \gtreqless 0$となることがわかる。

次に、均衡の安定性について検討しよう。（23）式より次式が得られる。

$$\dot{x_t} = x_t\left\{x_t - \left(1-\frac{\alpha}{\sigma}\right)Ay_t^{1-\alpha} + y_t - \frac{\rho}{\sigma}\right\} \tag{33}$$

政府は公債残高を、逐次、（24）式により調整するので、（25）式に $b_t=\bar{b},\ \tau=0$ を代入することにより以下の式を得る。

$$x_t = \frac{1}{\left(1-\tau_c/\bar{b}\right)}\left\{(1-\alpha)Ay_t^{1-\alpha} - \left(1+\frac{1}{\bar{b}}\right)y_t\right\} \tag{34}$$

したがって、目標公債残高が与えられた下で、x_tの動きは、（33）式と（34）式により規定される。これらの式を連立させ、整理することにより次の関係を得る。

$$\dot{x_t} \gtreqless 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\alpha\left(1-1/\sigma\right)Ay^{1-\alpha} + \rho/\sigma\right]\left[\frac{y[\tau_c(1-\alpha/\sigma)Ay^{-\alpha}-(1+\tau_c)]+\tau_c\rho/\sigma}{\alpha(1-1/\sigma)Ay^{1-\alpha}+\rho/\sigma} - \bar{b}\right] \gtreqless 0$$

したがって、ここでも $y^L<y_t<y^H$ ならば $\dot{x_t}>0$ となり、$y_t<y^L,\ y_t>y^H$ ならば、$\dot{x}<0$ となることがわかる。

以上の議論を準備として、定常成長均衡点の安定性に関して、以下の図のように示すことができる。

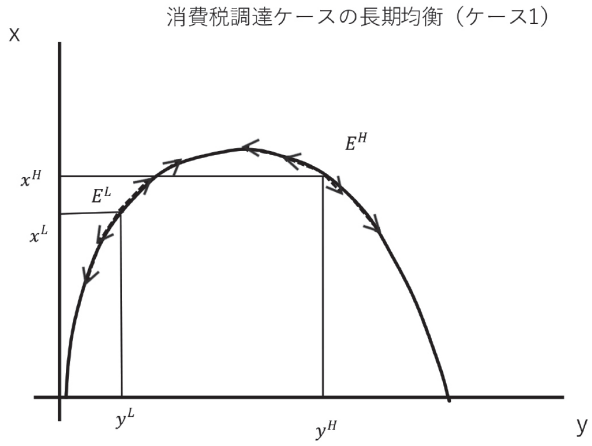


図 4-5　消費税調達ケースの長期均衡（ケース 1）

図4-5においては、均衡点は 2 点とも不安定点であり、定常成長均衡の存在は示すことができるが、その安定性と均衡点への収束は示すことができないことがわかる。

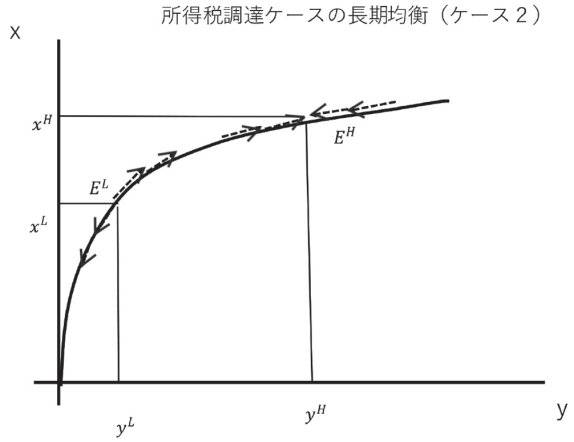


図 4-6　消費税調達ケースの長期均衡（ケース 1）

逆に、図4-6においては、y^L 均衡は不安定点であるが、y^H 点は安定均衡である。したがって、定常成長均衡が 2 点存在し、その一方は安定性と均衡点への収束を示すことができる。したがって、ここでも定常成長均衡が 2 点存在し、比較的高い公共支出＝資本ストック比率のもとで、比較的高い消費＝資本ストック比率を実現できる長期定常成長均衡点において、安定性と均衡点への収束を示すことができた。

ここまで見てきたように、公債残高の資本ストック比率を一定に保つような財政ルールの下では、一定の条件の下で複数の長期定常均衡が存在するが、そのうち一方は不安定均衡であるが、もう一方の均衡点は動学的に安定であることが分かった。また、安定的な定常成長均衡点において、比較的高い公共支出＝資本ストック比率のもとで、相対的に高い消費＝資本ストック比率が実現できることがわかり、このような財政ルールのもとで、公債発行の持続性や生産的公共支出の有効性を示すことができた。

他方、公債と同時に用いる租税に関しては、所得税と消費税の差異はどのように考えられるのであろ

うか。簡単のため σ=1とすると、図4-1において最も高い $\bar{b}$ を与える y は、$[(1-\alpha)\tau A]^{1/\alpha}$ であり、図4-4においては $\left[(1-\alpha)\frac{\tau_c}{(1+\tau_c)}A\right]^{1/\alpha}$ となることが示される。したがって、消費税率を適切に設定することにより、所得税調達と同じ均衡を作りだすことができることがわかる。このことは、公債残高の資本ストック比率を一定に保つような財政ルールの下では、補助的に用いる税が所得税であっても、消費税であっても定常成長均衡の公共支出＝資本ストック比率が同じになることを意味している。ところで、(34) 式を見ると、税による影響は、むしろ消費＝資本ストック比率に大きな影響を与える可能性があること。また、公債発行が内生的な場合（$\dot{b}\neq 0$）の場合に起こる可能性が考えられる。このような状況を検討するため、次節においては公債発行が内生的に決まり、財政ルールとして公債残高のGDP比率が一定に保たれるような状況を想定し、公債の持続可能性や補助的に用いる租税による経済成長効果の度を検討しよう。

5．公共支出ルールと定常成長均衡

本節では、新規公債発行が経済の中で内生的に決まる状況のもとで、公債調達の経済成長効果や持続可能性を検討する。公債発行が内生的な状況で、財政ルールとして生産的公共支出を政府が政策的にコントロールし、公債残高のGDP比率を一定に保つことを考える。したがって公共支出＝資本ストック比率（$\bar{y}$）を政策目標として設定し、公共支出を提供するものを考える。その時、所得税や消費税の税収を超える政府支出については新規公債発行により調達するものと考える。本節ではこのような設定のもとで、公債の持続可能性や経済成長効果を検討する[3)]。

公債残高の政策目標値を δ とすると、$\delta=b_t/Ay_t^{1-\alpha}$ となり、$y_t=(b_t/\delta A)^{1/1-\alpha}$ と示される。ここではこの関係を、より簡単に $\bar{y_t}=\beta b_t$ として、これを公共支出の政策目標と考える。

（22）式および（24）式において、$y_t=\beta b_t$ と置くことにより以下の式を得る。

$$\frac{\dot{b_t}}{b_t}=\left(1-\frac{\tau_c}{b_t}\right)x_t-\left[1-(1-\tau)\alpha+\frac{\tau}{b_t}\right]A(\beta b_t)^{1-\alpha}+\left(1-\frac{1}{b_t}\right)\beta b_t \tag{35}$$

$$\frac{\dot{x_t}}{x_t}=x_t-\left[1-\frac{(1-\tau)\alpha}{\sigma}\right]A(\beta b_t)^{1-\alpha}+\beta b_t-\frac{\rho}{\sigma} \tag{36}$$

この経済の長期的動向は、(35)、(36) 式により規定され、x_t, b_t が決定される。

定常成長均衡

定常成長均衡においては、x_t, b_t, が一定となり、C_t, K_t, G_t, B_t が一定の率で成長することになる。そこで、まず、(36) 式に $\dot{x_t}$= 0 を代入し定常成長の x,b を用いて表記することにより、次式を得る。

$$x=\left[1-\frac{(1-\tau)\alpha}{\sigma}\right]A(\beta b)^{1-\alpha}-\beta b+\frac{\rho}{\sigma} \tag{37}$$

次に、(35) 式に $\dot{b_t}$= 0 を代入することにより、次の関係を得る。

$$x=\frac{b}{b-\tau_c}\left\{\left[1-\alpha(1-\tau)+\frac{\tau}{b}\right]A(\beta b)^{1-\alpha}-\left(1+\frac{1}{b}\right)\beta b\right\} \tag{38}$$

したがって、定常成長均衡の x,b は、(37)、(38) 式から決まることがわかる。以下では、定常成長均

衡の特性と、公債の GDP 比率一定という財政ルールがもたらす経済成長と財政の持続可能性の関係を検討しよう。

5.1　所得税調達によるケース

以下の議論においても、結果を明確に示すために、政府が公債に加えて所得税を利用可能な場合と、消費税を利用可能な場合とに分けて分析しよう。

まず、(37) 式より、b と x の関係を求めることにより、$\dot{b}=0$ において $x=\rho/\sigma$ が得られる。また、(37) 式右辺第 1 項と第 2 項について以下の関係が得られる。

$$\left[1-\frac{(1-\tau)\alpha}{\sigma}\right]A(\beta b)^{1-\alpha}-\beta b=(\beta b)^{1-\alpha}\left\{\left[1-\frac{(1-\tau)\alpha}{\sigma}\right]A-(\beta b)^{\alpha}\right\} \tag{39}$$

したがって、以下のような関係が得られる。

$$\left[1-\frac{(1-\tau)\alpha}{\sigma}\right]A(\beta b)^{1-\alpha}-\beta b \gtreqless 0 \leftrightarrow b \lesseqgtr \frac{\left\{\left[1-\frac{(1-\tau)\alpha}{\sigma}\right]A\right\}^{1/\alpha}}{\beta} \tag{40}$$

次に、(38) 式において消費税 $\tau_c=0$ と置くことにより、x と b に関する次式を得る。

$$x=-\beta(\beta b)^{-\alpha}[\tau A-(\beta b)^{\alpha}]+(\beta b)^{1-\alpha}\{[1-\alpha(1-\tau)]A-(\beta b)^{\alpha}\} \tag{41}$$

(41) 式の右辺第 1 項については、以下のような符号条件が当てはまる。

$$\lim_{b\to 0}(\beta b)^{-\alpha}=-\infty,\ b \lesseqgtr \frac{(\tau A)^{1/\alpha}}{\beta} \leftrightarrow \tau A-(\beta b)^{\alpha} \gtreqless 0$$

また、右辺第 2 項については、次のような符号条件を示すことができる。

$$b \lesseqgtr \frac{[[1-\alpha(1-\tau)]A]^{1/\alpha}}{\beta} \leftrightarrow [1-\alpha(1-\tau)]A-(\beta b)^{\alpha} \gtreqless 0$$

したがって、(37) 式および (41) 式の位相図を描くにあたっては、両式の挙動に関するより詳細な分析が必要になるが、以下では起こりうる 2 つの場合について概観を示そう。その 1 番目の概形は、次の図のように示される。

図5-2には、相対的に大きな消費＝資本ストック比率と比較的小さな公債残高が存在する場合の $\dot{x}=0$、$\dot{b}=0$線を描いている。また、この図の位相関係については矢印により示している。均衡点 E は、安定均衡点であり、この均衡点の近傍の初期点からから出発する動学的経路はこの均衡点に収束する。そして、この収束経路を外れると、この図の右上方に示される領域においては、消費＝資本ストック比率が徐々に低下し、公債＝資本ストック比率が無限に拡大してゆく経路が存在していることがわかる。

次に、第5-3図には、相対的に小さな消費＝資本ストック比率と比較的高い公債残高が存在する場合の $\dot{x}=0$、$\dot{b}=0$線を描いている。

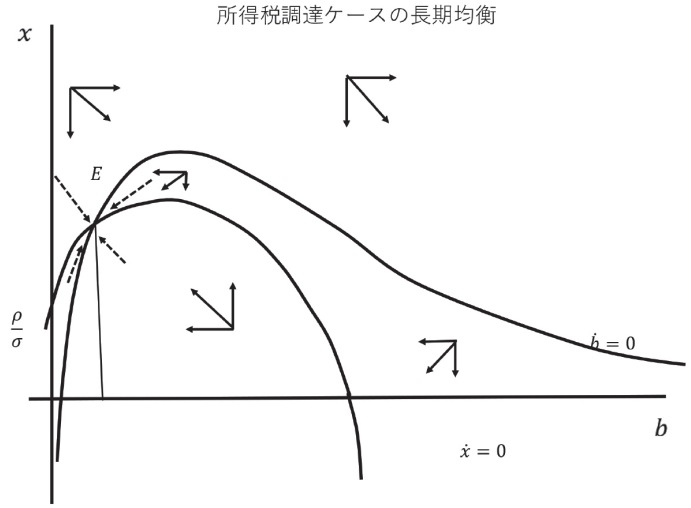


図 5-2　公債および所得税調達ケースの長期均衡（ケース 1）

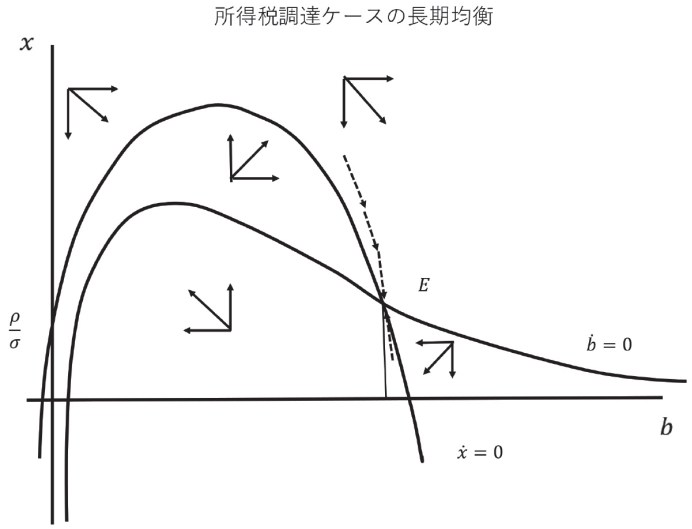


図 5-3　公債および所得税調達ケースの長期均衡（ケース 2）

上図と同様に、この図の位相関係については矢印により示されている。均衡点 E は、鞍点均衡点であり、この均衡点の左上方と右下方にある初期点からから出発する鞍点経路が存在し、この均衡点に収束する。そして、この収束経路を外れると、先ほどと同様に、この図の右上方に示される領域においては、消費＝資本ストック比率が徐々に低下し、公債＝資本ストック比率が無限に拡大してゆく経路が存在していることがわかる。

5.2　消費税調達によるケース

続いて、財源調達手段として公債に加えて消費税が利用可能な場合を検討しよう。そのために、(35)、(36) 式において所得税 $\tau = 0$ と置くことにより、以下の 2 式を得る。

$$\frac{\dot{b_t}}{b_t} = \left(1 - \frac{\tau_c}{b_t}\right) x_t - \left(1 - \frac{\alpha}{\sigma}\right) A(\beta b_t)^{1-\alpha} + \beta b_t - \beta \tag{42}$$

$$\frac{\dot{x_t}}{x_t} = x_t - \left(1 - \frac{\alpha}{\sigma}\right) A(\beta b_t)^{1-\alpha} + \beta b_t - \frac{\rho}{\sigma} \tag{43}$$

まず、(43) 式において $\dot{x_t}$= 0 を代入することにより、b と x の関係が次のように示される。

$$x = (1 - \frac{\alpha}{\sigma}) A(\beta b)^{1-\alpha} - \beta b + \frac{\rho}{\sigma} \tag{44}$$

ここで、$\beta b \lessgtr \left[(1-\alpha)(1-{}^{\alpha}/_{\sigma})A\right]^{1/\alpha}$ において、$\frac{dx}{dy} \gtrless 0$となり、$\dot{b}$= 0 において $x = \rho/\sigma$ が得られるので、$\dot{x}$= 0 線の概形を下記の図のように求めることができる。

次に、(42) 式に $\dot{b_t}$= 0 を代入することにより、次の関係を得る。

$$x = \frac{b}{b-\tau_c}\{(\beta b)^{1-\alpha}[(1-\alpha)A - (\beta b)^{\alpha}] + \beta\} \tag{45}$$

(45) 式において、$b \lessgtr \frac{[(1-\alpha)A]^{1/\alpha}}{\beta} \leftrightarrow (1-\alpha)A - (\beta b)^{\alpha} \gtrless 0$ となることが示されるので、$\tau_c < \left[(1-\alpha)A\right]^{1/\alpha} \beta$ のケースを想定しよう。以上の考察より $\dot{x}$= 0、$\dot{b}$= 0 線の概形は次のような図に示すことができる。

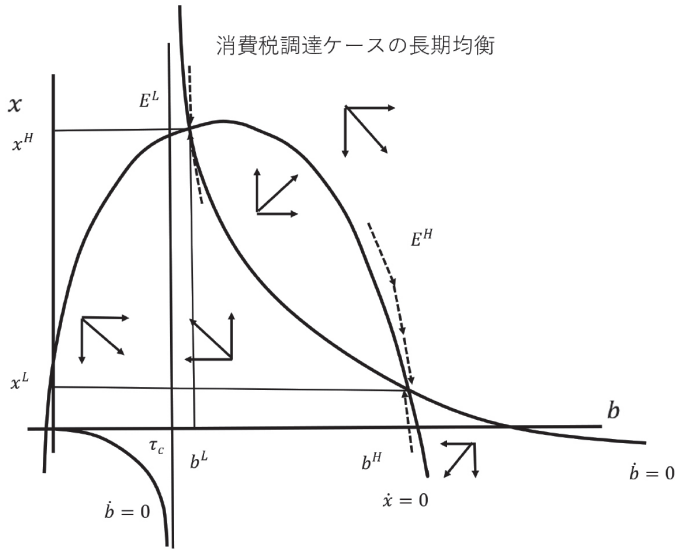


図 5-4　公債および消費税調達ケースの長期均衡

図5-4には、2つの均衡点が存在し、複数均衡が成立していることがわかる。このうち、相対的に大きな消費＝資本ストック比率と比較的小さな公債残高が存在する場合の均衡点 E^L は、鞍点均衡点であり、この均衡点の近傍の左上方と右下方の初期点からから出発し、この均衡点に収束する鞍点経路が存在する。そして、この収束経路を外れると、右上方の領域には別の均衡点 E^H に収束する動学経路があり、それも外れる場合には、消費＝資本ストック比率が徐々に低下し、公債＝資本ストック比率が無限に拡大してゆく経路が存在していることがわかる。

次に、均衡点 E^H は、相対的に小さな消費＝資本ストック比率と比較的高い公債残高が存在する場合の均衡点を示している。この図の位相関係を検討すると、この均衡点も鞍点均衡点であり、この均衡点の左上方と右下方にある初期点からから出発する鞍点経路が存在し、この均衡点に収束する。そして、この収束経路を外れると、先ほどと同様に、この図の右上方に示される領域においては、消費＝資本ストック比率が徐々に低下し、公債＝資本ストック比率が無限に拡大してゆく経路が存在していることがわかる。

6．結語

ここでは、生産的公共支出を成長のエンジンとする内生的経済成長モデルを用いて、公債発行がもたらす不決定性、複数均衡や経済成長効果を検討してきた。公債残高の資本ストック比率を一定に保つような財政ルールの下では、複数の長期定常均衡が存在し、一方は不安定均衡であり、もう一方の均衡点は動学的に安定であることが分かった。また、安定的な定常成長均衡点において、比較的高い公共支出＝資本ストック比率と消費＝資本ストック比率が実現できることがわかった。

他方、公債と同時に用いる租税に関しては、所得税と消費税に関しては、公債残高の資本ストック比率を一定にとどめるような財政ルールの下では大きな差は生じない。ところが、公債発行が内生的に決まり、財政ルールとして公債残高の GDP 比率が一定に保つようなモデルにおいては、消費税のケースにおける不決定性や複数均衡、また、定常成長均衡の安定性に関する興味深い結論が得られた。

後者のモデルに関しては、定常成長均衡やその経済成長効果に関しては、より厳密な分析が必要となる。また、数値解析やキャリブレーションを用いた動学的経路の分析を行うことにより、公債発行の持続性に関する興味深い結論が得られる可能性が考えられる。また、本モデルは、資産保有状況が異なる個人を明示的に扱うことが可能な設定となっており、経済成長効果に加えて、同時に所得分配効果の研究も可能である。これらの課題については、来年度以降取り組んでゆきたい。

注

1）さらに、これらの研究は対数線形型の効用関数を用いているが、ここではより一般的な *CES* 型効用関数を想定する。

2）このケースは、*Futagami et al.*（2008）においても分析されているが、ここでは我々独自の分析である消費税調達ケースとの比較のために示すことにしたい。

3）このような財政目標は、しばしば経済成長政策の一環としてとられてきた。

参考文献

Alesina, A. and D. Rodrick（1994）“Distributive Politics and Economic Growth,” *Quarterly Journal of Economics,* Vol. 109, pp. 465–490.

Barro, R. J.（1990）“Government Spending in a Simple Model of Endogenous Growth,” *Journal of Political Economy,* Vol. 98, pp. s103-s125.

Bruce, N. and S. Turnovski（1999）“Budget Balance and Welfare and the Growth Rate: ‘Dynamic Setting’ of the long run government budget,” *Journal of Money, Credit and Banking,* Vol, 31, pp. 162–186.

Futagami, K., Iwaisako T. and R. Ohdoi（2008）“Debt Policy Rule, Productive Government Spending, and Multiple Growth Paths,” Macroeconomic Dynamics, Vol. 12, pp. 445–462.

Ghosh, S. and I. Mourmouras（2004）“Endogenous Growth, Welfare and Budgetary Regimes,” *Journal of Macroeconomics,* Vol. 26, pp. 624–635.

Gokan, Y.（2013）“Indeterminacy, Labor and Capital Income Taxes, and Non-linear Tax Schedules,” *Journal of Macroeconomics,* Vol. 36, pp. 138–149.

Grainer A. and W. Semmler（1999）“An Endogenous Growth Model with Public Capital and Government Borrowing,” *Annals of Operations Research,* Vol. 88, pp. 65–79.

————— (2000) "Endogenous Growth, Government Debt and Budgetary Regimes," *Journal of Macroeconomics,* Vol. 22, pp. 363–384.
Turnovski, S. (2000) Methods of Macroeconomic Dynamics, 2nd ed. Cambridge M.A. MIT Press.
Nourry, C., Seegmuller T. and A. Venditti (2013) "Aggregate Instability under Balanced-Budget consumption Taxes: A re-examination," *Journal of Economic Theory,* Vol. 148, pp. 1972–2006.