有限と無限の間

― 量子物理学に関するいくつかの非自明な問題を巡って ―

藤　本　　　忠

概要

代数的量子論の視点から、（特に我が国の）物理学のテキストであまり表立って指摘されていない、いくつか基本的問題を整理し、分析を加える。
Keywords：重ね合わせ、ベクトル状態、セクター理論、真空表現、因子環

1　はじめに

かつて、梅澤博臣がコペンハーゲンで R.Haag に会った際、Haag が「なぜ場は散乱の前と後で自由場のように振舞うのか、考えている」と述べたことにショックを受けたとのこと［8; 江沢洋による末尾＜思い出＞］。それは、梅澤のその後の発言によると、日本の物理学は理論の運用、つまり理論を具体的問題に適用してそれを解くことばかりに終始していることへの反省も含まれているらしい。確かに、解かれていない問題を数学を使って解くこと、基礎づけることは重要な仕事であるが、時として、基本的な問題があまり顧みられず、無視されてしまうことが多い。数学が表示する構造にあまりに目を奪われすぎると、そこに潜む物理的背景、つまり自然そのものへの眼差しが軽視されてしまうことに繋がる。また、場合によっては誤解を引き起こしたままに計算ばかりが精緻になることもある。個人的な例を挙げれば、私も永らくフェルミオンが相対論的因果律ゆえに直接の対象になりえないことを知らなかったし（フェルミオンを記述する CAR 代数に関しては知っていたが)、このフェルミオンをきちんと物理的背景に埋め込むには「代数的場の

量子論」における「セクター理論」が一つの重要な方法であることも、当初は知らなかった[1]。また、量子物理学における所謂「重ね合わせ」というベクトル状態の一つの形態（線形代数においては、一つの基底ベクトルで表現できるエンタングル状態と関係する）が、どのような観測量と関係しているかに関して、数学だけを理解していても解決できない問題がある点も、明瞭に認識できていなかったように思われる。こうした問題の背景には、数学の理解も不可欠なのだが、それに加えて、一種の哲学的考察、つまり、先の Haag の問いではないが、数学的構造と物理の背景をつなぐ自然観が必要であるのではないかと考えている。この点をあまり強調しすぎると、空理空論へと落ち込んでしまうのだが、だからといって数式や物理の式変形だけを眺めていても、そこにある種の（それが深いかどうかは理論の一般性と関係するから軽々にはいえないが）考察がなければ、納得できない点が量子物理学には多々ある。

我が国の最近の理工系の書物についていえば、数式の詳細な解説や行き届いた問題集が多数出版されて、それは大変重宝するのだが、いくつかの例外を除いて、上記のような問題を欧米に比して深く記しているテキストがあまりないように見受けられる。例えばセクター理論や重ね合わせの背景を丁寧に書いてあるテキストの多くは、日本の［10, 30］を除いては、欧米の［26, 32, 33, 42, 33, 37］であるし、量子化に関しても、整理されたテキストは［2, 20, 21］等を除いてあまり見当たらない。［10］では極めて重要な指摘がなされているが、日本の物理学のテキストの中で［10］に書かれてある諸問題が普通に扱われているとは言い難い。あまり読まれているとはいえない［7］が、異例といえるかもしれない。

この小論は、目の前の具体的な問題を解く多くの応用物理学者にはあまり参考にならないだろう。但し、量子化もあまり自明な問題ではなく今でも考えれば、よくわからない事柄をあちこちに地雷のように内包していることを記すのは重要だろう。そこには、数学に関する厳密な無限、例えば、可算無限や、連続次元、無限の非同値問題、などが含まれている。

以下、歴史的な問題を概観した後で、多くの物理学のテキストで字数が割かれていない概念について、そこに内在する諸問題を挙げ、整理していく。後半では、特に代数的場の量子論の観点から、私が理解し、またこの角度から解釈しうる新しい見方を提示できればと考えている。尤も、問題の中には、仮象問題も含まれているかもしれないが、ご寛恕の上、ご指摘をお願いしたい。

なお、本論では代数的場の量子論を主要な方法とする。それは、代数的場の量子論の背後には、数学の作用素環、特にフォン・ノイマン環の理論があり、無限と有限の関係、理論と観測の関係を考察するのに適切な手段であると私が考えているからである。背景となる数学の前提として［5, 9, 17, 36］を挙げておく。

2　量子物理学に関する諸問題

2.1　歴史の観点から

自然科学に関しては、人文社会科学に比して、とりわけ昨今、ある学問領域の成立史は余興に属することである、という風潮が強まっているように感じる。特に、日本においては上記のように理論の適用が第一義的な問題圏にあり、その理論の背景については特に知らなくても、計算は（ある制限された領域内では）十分可能であると見なされる。例えば、有限粒子系の量子物理学（通常これが「量子力学」といわれる）、それも非相対論的量子力学においては、ヒルベルト空間の表現論について、外的因子がない限り(2) ＜ストーン－フォン・ノイマンの一意性定理＞により、表現は唯一である。従って、物理の対象に応じてヒルベルト空間上の表現問題を考慮する必要はない。摂動が入る力学系においても、それゆえ、最初に定めたヒルベルト空間の表現の中で作用素のスペクトルがどういう振る舞いをするかを計算することが重要となる（ちなみに、あっさり書いたが、例えば［47］に書かれてあるような問題はすでに今日基本であり、「構成的場の量子論」で計算される作用

素解析は、猛烈に細かい計算を強いられるので、計算をフォローするのは、私にはかなり難儀である。）ここで述べておきたいのは、こういう計算は、今の場合、数理科学のヒルベルト空間上のスペクトル理論の専門的な知識とセンスが大事であって、当座は歴史的背景は必要ないということである。尤も、初期の数理物理学の開拓者にとって、歴史的経緯は重要なのだが、一定の成果の上に築き上げられた今日の数理物理学の具体的問題圏においてはM. ヤンマーの歴史書は、特に必読ではないだろう［27, 28］。

しかし、きれいに切り取られた教科書の中にも、ややもすると混乱を招く記述もあり、それが量子物理学の問題を考える上で仮象問題を引き起こしかねない定義や定理もある。

2.2　量子化の問題

科学史としての厳密な歴史的考察をするに越したことはないのだが、本論の主旨に鑑みると、そこまで精緻な論述はをここでする必要ではない。ただ、［20, 21］についても、その歴史的記述が妥当かどうかは、［27, 28］などで確認しておく必要はある。

さて、量子物理学の中で最も重要なのは物理量を従来の古典物理学から分かつ方法である。この物理量の量子化には、自由度という点から、そして形式の点から二つに分かれる。前者については質点系としての量子化（有限自由度の量子力学）と場の量子論（無限自由度の量子論）であり、後者についてはハイゼンベルグの行列力学とシュレディンガーの波動力学である。まずこの後者に関して質点系の量子論に限定して簡単に触れる。朝永振一郎のテキストは昨今の量子論のテキストではほとんど触れられていない極めて重要な指摘がいくつもなされている。

ハイゼンベルクの行列力学は、ある量子的粒子（質点）(3) の運動量 p と位置 x を、対角化され得る（つまり自己共役作用素となる）フーリエ級数の成分の拡大版として理解する。これが今日、$[p_k, x_l] = i\delta_{kl}$ と表現される CCR の

ハイゼンベルクの表記である。一方、シュレディンガーは、ド・ブロイの波動方程式と極めて似ている楕円型の微分方程式を古典物理における物質の波動論から発見し、より計算が容易な形で提示した。その際、運動量が、微分方程式の中で微分作用素となる。この二つの形式は、同値であることが後年判明する。ところで、ハイゼンベルクの形式もシュレディンガーの形式も、両者ともに依拠した基準がゾンマーフェルトの、あるいはボーアの量子化条件であった(4)。この量子化の条件が、フーリエ係数や波動の一定の周期を可能にし、それが所謂「離散的」物理量をもたらすことを可能にするのである。質点系の量子化の問題は、先に述べた＜ストーン－フォン・ノイマンの一意性定理＞により、外場が絡む一部の問題をの除いて（この例外こそ実は、量子物理学の本質を垣間見させる問題だが）基本的にはその形式は解決されたとみることもできるし、後述する作用素環による定式化によれば、I 型フォン・ノイマン環によるいわば閉じた世界に対応する。

ところで、量子物理学の発端は、黒体からの放射、つまり輻射熱がその始まりであったことから見て取れるように、エネルギーの量子化の背後には、それを取り囲む背景にすでに「場 field」の概念が付随していた。従って、ハイゼンベルクも、パウリとともに、1929 年から 30 年にかけて、場の量子化の研究を本格的にはじめている［43, 44］。ここでは、有限質点系の粒子象とともに輻射場が考えられ、現在でも、例えば［19］にみられるように、量子場の理論に移行する過程として、外場の理論が持ち込まれ、最終的には、（後述するが）相対論的量子力学から場の理論へというプロセスで場の量子論が導入されることが多い。この場の量子論と質点の量子論との間に横たわる溝・ギャップについて整理する。

［6; 5 章］や［7; 1 章］にも明瞭に記されており、いくつかの場の量子論のテキストでも陰に書かれているが（例えば［18; 3 章]）、質点系の量子論と決定的に異なるの点は、時空を表記する c 数の扱いである。先の、質点系の CCR である ［p_k, x_l］$= i\delta_{kl}$ に現れる添え字は、その粒子が複数ある場合の番号であり、1 粒子であればもちろん不要である。実際に量子化されているのは、

ある粒子の位置と運動量である。あるいはそれを基に組み立てられているエネルギー（ハミルトニアン）の量子化である。この質点系を無限個に拡張することは、その CCR 代数が意味を持つフォック空間での狭い定義域を定めれば可能であるが（これについては［1; 4 章］)、それは無限個の調和振動子を考える離散的な格子構造が前提される。しかし、一般の場の量子論においては、この格子から連続な場へと一気に拡張され、そこで必要なのは、先の添え字である k, l を空間座標と見直すことである。ある時間・空間における場の量は、座標 x 時間 t において示される $\varphi(x, t)$ とその正準共役量 $\pi(x, t)$ との間の CCR である $[\varphi(x, t), \pi(y, t)] = i\delta(x-y)$, (test function は略）で表現される。

つまり、質点系の量子力学で量子化されている位置を示す作用素（数学としては L^2 空間上の線形作用素）が場の量子論では量子化されているのではなく、c 数として残っているのである。一般に、場の量子化を質点系の量子化を第一量子化というのに対して第二量子化といわれてきたが、これはもちろん量子化を 2 度するという意味ではない。しかし、質点系の量子化と決定的に異なる点を考慮すると、質点系の量子化を CCR において形式的に真似ていることを鑑みても、「第一」とは異なる意味を含んでいるという点や、本来、無限が有限を含んでいるとみるべきだという点、を重視すれば、呼称は異なっていてしかるべきかもしれない。

この場の量子化に絡む更なる考察は後述するが、朝永の重要な指摘をここで再度注意しておくべきであろう。まずそれは、シュレディンガー方程式とド・ブロイ場の波動方程式との決定的違いの問題である。ここでその指摘を整理する。それは、［21; § 50］に記されているが、1 粒子問題に限れば、シュレディンガー方程式は、ド・ブロイの波動方程式とまったく同じ形をしており、当初、物理学者でさえ両者の違いに気が付かなかった点である。ところが、粒子間の相互作用を考えた場合、前者は常に線形（重ね合わせ）が保たれ、後者は破れる。この理由は、シュレディンガー方程式に現れる関数とド・ブロイ方程式のそれがまったく異なることから来ることが、後に再認

識される。つまり、シュレディンガー方程式の関数 $\psi(x, t)$ は実在波ではないのである。実際、電磁場に関するシュレディンガー―方程式は、空間上の場所とは何ら関係がない（これはつまり。ド・ブロイの方程式で導かれる古典場を量子化することに当たる）。要するに、ド・ブロイの関数は古典場であって、シュレディンガーのそれは、確率波であったのである。これは今日、当然の結果として受け入れられている。朝永の記述には、さらにこれが、ド・ブロイの波動方程式が、粒子象（調和振動子：生成消滅作用素）と手を結んで、光子に代表されるボーズ場に再度実現されることを論じている。つまり、ド・ブロイの方程式の古典場の量子化が、結果的に、質点系の量子論である当初のシュレディンガー方程式の限界を打ち破った、という物語として理解される。

今日の物理学の教科書の多くは、有限系の非相対論的量子力学の方程式であるシュレディンガー方程式が場の理論へ、直接、拡張されたように記されており (5)、実際、結果的には同じであるから間違いではないが、しかし、場の量子化というプロセスは、質点系の量子論である当初のシュレディンガー方程式では見えてこないはずである。朝永は、場と粒子を記述する量子論の方程式が同じであっても、＜質点系の関数（確率関数）＞と＜量子化された場＞の間には、同じ方程式の形の裏に潜む溝・ギャップを啓発しているのである。この点は、今日、［10］に記されているように、ヒルベルト空間を先にみることを強調することの問題に通じており、物理的実体の把捉に関して、我々の認識が意外と表層的な形式に翻弄される程度に脆弱であることを示しているように思われるのである (6)。

（問題）：無限が有限を内包する立場からみれば、粒子系の量子化からの拡張でななく、量子場の制限としての粒子象が正しいのではないか。だとすれば、質点系の CCR はどういった意味を持つのか。また、場の量子化における時間と空間のパラメータは単純な c 数と理解してよいのか。

（方向）：場の量子論における核型性条件の一般化と split property の考察、そして時空パラメータを一種の秩序変数として把捉すること。あるいは、粒

子系の位置と運動量を意味する作用素は、場の作用素の制限された状況として捉え直すこと。

2.3　純粋状態と混合状態

純粋状態（pure state）と混合状態（mixed state）については、私は以前ノート［24］でまとめたが、この二つが、所謂ベクトル状態のある種のタイプとして定義される。ただ、物理学や数理物理学のテキストによって、やや定義の仕方に違いがある。［30］のテキストでは、ベクトル状態 ω は、ヒルベルト空間の単位ベクトルにより $\omega(A)=(\psi、A\psi)$ として表現される状態（期待値＜ A ＞）と定義しており、トレース 1 の正作用素（密度作用素）と正規直交基底を使って表している。

純粋状態は、ヒルベルト空間論に準拠すると、密度作用素 $\Sigma\rho=1$ の特別な場合に相当し、あるヒルベルト空間のサイズの最小の射影作用素がその密度作用素になっている場合となる。位相の問題を考えず、ヒルベルト空間といっても、有限次元に限定して考えれば、空間次元を d とし、分解表示を、$\rho=\Sigma^{l}p_k$,（但し、$0\leq p_k\leq 1$, $\Sigma p_k=1$）としたとき、

$$< A > = tr(\rho A) = \Sigma_1^d p_k(\psi_i, A\psi_i) = \Sigma_k^s \Sigma_1^d p_k(e_i, \psi_k)(\psi_k, Ae_i) \qquad (2.1)$$

と表現できる一般の期待値（混合状態）のうち (7)、純粋状態は、この k の中のベクトルの和から一つの成分を ψ_1 としたとき、

$$< A > = tr(\rho A) = \Sigma_1^d (e_i, \psi_1)(\psi_1, Ae_i) = (\psi_1, A\psi_1) \qquad (2.2)$$

となる状態である。つまり混合状態のミニマムな状態（端点）である。

従って、ベクトル状態は、端の点を考えれば（クレイン-ミルマンの端点定理）純粋状態であり、凸結合状態であれば混合状態である。時にベクトル

状態が純粋状態と同義にされることがあるが、一般には、ベクトル状態の二様として純粋状態、混合状態が定義されていると考えるのが普通である。［10］ではそのように明瞭定義されている。

有界作用素の極限をとる作業において、正規状態（$\omega(\sup A_n) = \sup \omega(A_n)$ となる状態）が可算個のベクトル状態の混合として混合状態を定義しているのが［30］であるが、この箇所を読むとベクトル状態を端点と定義しているように見受けられる。

以上は概念の定義の問題だから、物理的にはあまり意味のある話ではない (8)。こうした定義とその理論のより一般的な議論は［4; 2章］、［36; chapter2］を参照されたい。

ここで問題にされるべき重要な点は、重ね合わせ（superpotition）問題と超選択則（superselection）に関してである。［24, 25］の中で整理しておいた。

（問題）：重ね合わせ問題の多くが、質点系の量子論と場の量子論、さらに有限系の量子論、無限系の量子論の区別にあまり大きな注意を払われないままなされている。

（方向）：真空期待値（真空状態）の理解あるいはそれと関連する作用素環の考察が一つのヒントを与えそうだ。

2.4　セクター理論と重ね合わせの一般論

ここで要点をまとめておく。代数的場の量子論は、その思想として、（局所的）観測量を第一に考え、ヒルベルト空間におけるベクトルを観測量の表現において導出する。物理量 A の表現 $\pi(A)$ は、一般にフォン・ノイマン環を含む C^* 環からの *準同型として定義される。より正確には、$\mathcal{A}$ を C^* 環、$\mathcal{H}$ をヒルベルト空間として, $\mathcal{A}$ から有界作用素 $\mathcal{B}$（$\mathcal{H}$）への *準同型として定義される。この表現に基づいて、正線形汎関数である状態 ω が定義される。

状態に関して最も基本的なのは、GNS 構成法である。これは「状態は適当な表現のベクトル状態である」という定理である。

定理 A

C^*環 $\mathcal{A}$ の任意の状態 ω に対して、ヒルベルト空間 $\mathcal{H}_\omega$ と、そのヒルベルト空間上の $\mathcal{A}$ の表現 π_ω、および $\mathcal{H}_\omega$ の単位ベクトル Ω_ω が存在して、次をみたす。

(1) 任意の $A\in\mathcal{A}$ に対して、$\omega(A)=(\Omega_\omega, \pi_\omega(A)\Omega_\omega)$

(2) Ω_ω は π_ω の巡回ベクトルである、

すなわち $\pi_\omega(\mathcal{A})\Omega_\omega := \{\pi_\omega(A)\Omega_\omega | A\in\mathcal{A}\}$ は $\mathcal{H}_\omega$ の中で稠密。

この (1)(2) をみたす時、$(\mathcal{H}_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega)$ はユニタリ同値類として一意である。

定理 B

2 つの状態 ω_1. ω_2 が重ね合わせ不可能であるためには、それぞれに付随する GNS 表現 $\pi_{\omega 1}, \pi_{\omega 2}$ を結ぶ（がユニタリ写像を含む）intertwitting map[a] が 0 しかない場合（これは素とか無縁表現といわれる：disjointness）と同値である。

[a] 既約表現の場合にはユニタリ非同値が意味を持つが、そうでない場合も含めて考える。これについては［10］を参照のこと。

逆に、二つの表現が素でなければ、直交する射影が表現に付随しないので、異なる部分空間に分離されない。つまり重ね合わせ可能となる。

ある物理量の表現 $\pi(A)$ が既約表現であれば、その可換環は複素数の定数倍しかないので、$[u, \pi(A)]=0$ をみたす代数（保存量：ハミルトニアンなど）が存在し、u は今の場合、$CI=\pi(A)'$ （C は複素数）となり、重ね合わせ（コヒーレント）を表現する。u は異なる表現空間の分離を示すメルクマールになるので、一般に「超選択則（電荷）」と呼ばれる。異なる表現空間、つまり重ね合わせの効かない部分空間（これがセクター（sector）といわれる (9)）への分割・分類理論が「セクター理論」である。もう少し厳密に述べれば、セクターとは、超選択則（電荷）によって分類された同一類に属する重ね合わせ可能部分空間である。I 型フォン・ノイマン環に限定すれば、セクター

は「観測可能代数（自己共役表現）の因子環への既約分解表現」ということになる[10]。

ここで、注釈が必要である。上の＜定理 A ＞における GNS 構成法は、(2.1)、(2.2) に従うと、密度状態で示されるベクトル状態へも拡張されるが［30］、その場合、［4; 定理 2.19］にあるように、それは二つ以上の単位ベクトルで表示される混合状態となるため（純粋状態は重ね合わせ可能状態であるから基底ベクトルは一つである。)、表現は「既約」ではない。もし、強い意味での（ユニタリ同値）既約の一意性を求めるならば、最初から、この＜定理 A ＞は I 型フォン・ノイマン環を前提している、と理解されなければならない。その場合は、同時に、＜定理 B ＞も既約表現を背景とする定理として理解しなければならない［10, 30］。［30］では、実際、既約表現と 1 粒子状態が状態の定義の後で議論されている点を踏まえれば、I 型理論がメインである。

さて、この GNS 構成法に基づくベクトル状態の期待値について、$\ker\omega := \{A \in \mathrm{A} | \omega(A^*A) = 0\}$ となる左イデアルを定め、$A \in \ker\omega$ となる状態を「真空」と定義する。その状態が真空状態（真空期待値）である[11]。

2.5　真空の表現に関する問題

真空状態を司る真空の表現について考える[12]。まず、物理学における場の量子論の真空についてまとめたい。この点に関しては［13, 14, 16］に詳細な説明がある。

1）真空はハミルトニアンの固有値（エネルギー）の下限を示す。

2）真空状態は（特殊）相対論的不変性の要請から、時空併進不変性とローレンツ不変性を持つ。

の二点が基本である。

これにもとづいて、真空がどの慣性系から観ても同じであること、すなわち、ある局所場 $A(x)$ を任意にとったとき、真空期待値 $< 0|A(x)|0 > = < 0|A$

$(0)|0>$ が成立する。つまりその真空期待値は時空座標に依存しないことが出てくる [(13)]。この性質が代数的場の量子論の中で一般化されて、Reeh-Schlieder の定理となっている。この定理によれば、ある有界領域 D において物理量 $A(D)$ を真空ベクトル Ω に作用させると、$A(D)\Omega$ はその作用値を含むヒルベルト空間で稠密になる（$\overline{A(D)\Omega}=\overline{A\Omega}$）。つまり巡回ベクトルになる［39］。すなわち、

定理 C1　Reeh-Schlieder

真空状態 ψ に対して、弱加法性 [a] のを仮定すると、真空ベクトル Ω_ψ は任意の有界領域 D で $\pi(\mathcal{A}(\mathcal{D}))$ の巡回ベクトルであり、$\pi(\mathcal{A}(\mathcal{D}))''$ の分離ベクトルである [b]。この定理でわかることは、実は、ある有限領域における真空表現は一意であることになり、セクターの表現として、例えばスカラー場においては一意である [c]

[a] これに関しては［30; Def:4.13］を参照。

[b] フォン・ノイマン環の一般論からいうと、フォン・ノイマン環に含まれる任意の直交射影が高々可算である σ- 有限であること、あるいはフォン・ノイマン環の忠実な正規状態が存在することと、巡回かつ分離ベクトルの存在は、同値となる。さらに、その作用の表現の二重可換子環に対しては分離ベクトルになる。また制限非斉次ローレンツ群による変換と平行移動によって（前方）光円錐の閉集合にスペクトルが含まれる条件をみたすと。巡回かつ分離ベクトルをもつ。これを「標準表現」といったりする。

[c] ところで、真空が厄介なのは、ある保存量 Q に下で、$Q|0>=0$ とならない場合があり、これが自発的対称性の破れを引き起こす。

真空状態のクラスター分解は、真空表現の既約表現がフォン・ノイマン環がI型の場合は、既約表現の定義から考えると唯一となる [(14)]。ただ、有限自由度に関しては、既約表現は先に述べたように＜ストーン - フォン・ノイマンの一意性定理＞によるユニタリ同値性より唯一である。つまり、真空セクターも一つしかない [(15)]

真空状態のセクターに関するさらに詳細な分析は［45］にある。そこでは、相対論的因果性、相対論的共変性、エネルギー・運動量のスペクトル条件、の三つを前提して（Araki-Hagg の局所性条件）、真空セクターが、各コヒーレンス部分空間との共通部分の中で（$H_{0,\gamma} := H_0 \cap H_\gamma \neq 0$）, I_∞型のフォン・ノイマン環の因子環に分解されることが示されている[16]（$\mathcal{A} = \oplus \mathcal{A}_\gamma, H = \oplus H_\gamma$）。真空の超選択則のセクターは、以上の意味で、特別なのである。

真空が一意であることは、しかし実はあまり自明なことではないようである。これは、物理学としてみたとき、真空の縮退た無限体積系での真空ベクトルの問題と関係しているように思われる。場の量子論の中では、真空は「対称性の自発的破れ」に関して大切な役割をする。その際、真空の選び方が問題になる。真空は絶対的に一意なのか、縮退のような状態が普通であり、一意な真空を選択することには意味がないのか、よくわかっていない。自由場を扱う場合にはグローバルに一意性を仮定しても問題はないが、相互作用場を仮定した途端に真空偏極が生じる。縮退状態は一意の真空が重ね合わさった場合とみることも可能だが、現実の世界は相互作用が常に生じているから、いわば縮退真空が分解して各々の真空になると考えることもできる。

（縮退）真空は、空間の体積が無限大の極限ではばらけ、例えば真空1（$|0_1>$）と真空2（$|0_2>$）（その他の真空も同じ）は直交するので、そこに局所的作用素を作用させてもすべて直交する［14, 16］。したがってグローバルには真空の重ね合わせは解消し、真空の直交性により、相互の真空は非同値になる。つまり、ここに真空セクターが現れる、と解釈できる。

この問題と連関している例を考えてみたい。

2.6 混合状態とフォン・ノイマン環

純粋状態は重ね合わせを可能とするが、純粋状態は一意な既約分解を前提とし（一意性を求めなければ既約自体はありうるが）、I 型フォン・ノイマン環においてしか実現されない。この点は、量子論の解釈に関するテキストに

関しても系統だって記述されていない。作用素環の観点からみた場合、なぜI型のみなのか明瞭である。まずIII型の場合を考える。

定理D

III型フォン・ノイマン環は純粋状態をもたない[a]。

[a]III型フォン・ノイマン環は常にそれが作用する巡回かつ分離ベクトルをもつことに注意［48; 2.9.28］。

【補題】［46; 10.2.10］：ω がフォン・ノイマン環（C^*環でもよい）$\mathcal{A}$ の状態としたとき、その核 kernel が $\mathcal{A}$ の極大左イデアルであるのは、ω が純粋状態であるときに限る。

【定理Dの証明】(17)

＜I型の場合＞：ω を $\mathcal{A}$ の状態で $\mathcal{L}_\omega$ を $\mathcal{A}$ の極大左イデアルとする。純粋状態のイデアルに、ある閉部分イデアル空間は含まれるが［46; 10.2.9］、その部分イデアルが極大であるから、純粋状態のイデアルと一致する。反対に、ω を純粋状態とし $\mathcal{K}$ を $\mathcal{A}$ のある閉イデアル部分空間とし（［46; 10.2.9］より）、$\mathcal{L}_\omega \subseteq \mathcal{K} \subset \mathcal{A}$ とする。ここで別に $\mathcal{A}$ の純粋状態 τ があるとすると（その保証は、［46; 10.2.9］に示される）、τ は $\mathcal{K}$（そして $\mathcal{L}_\omega$ で）0となる。つまり、$\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}_\omega$。従って、$\mathcal{L}_\omega$ は極大である(18)

＜III型の場合＞：I型の場合はと異なり原始的でないフォン・ノイマン環 $\mathcal{B}$ をIII型とする。そして、φ_x をその任意の状態とする（あるベクトル x をもつ）。さらに、s_{x} を $\mathcal{B}$ における φ_{x} の台射影（supprt projection）とする。この台は $\mathcal{B}$ のすべての射影Pの交わり（meet）を定義し、最大下界の上で φ_{x} $(P)=1$ となる。次に、$\mathcal{L}_{\mathrm{x}}$ を φ_a の左イデアルとすると、$\varphi(B^*B)=0$, $(\mathcal{L}_x$ 上）であるが、射影が原始的ではないから、その台射影について、ある $P \neq 0$ が存在し、$P \leq S_{\mathrm{x}}$ となる。

ここで、射影 P の値域のあるベクトル y を選ぶ。この時当然、$S_y \leq P$ である。ここでもし、$\mathcal{B}$ がI型であれば、台射影の否定であるイデアルについて、

$\mathcal{L}_x \subset \mathcal{L}_y$ とならなければならないが、そうなれば、$\mathcal{B}$ は原始的射影を持たない仮定に反する。□

作用素環の理論によると III 型フォン・ノイマン環は II 型とその*自己同型群（接合積の理論）［17］に帰せられるのだが、II 型の典型的例は、一般に量子統計力学に登場し、さらに、II 型はその射影が（それは III 型も同じだが）連続次元をもち、有限型でもトレースが連続値を持つという不思議な性質を持つ。つまりこのことは、既約分解が 1 次元射影に依存しているという I 型の視点から考えると、純粋状態が既約分解の（一意性）の上できちんと決まるというのは、ほとんど限定された事態であることがわかる。

（問題）：重ね合わせという量子物理学の問題が、多くの場合、一般にこの既約分解を前提にした純粋状態で理解されている。このため無限次元の場の量子論のもつ話が、あたかもイレギュラーの塊であるかのように解されてしまう。そのため、整合的な理解がなかなかできにくい。

（方向）：むしろ逆に、重ね合わせという物理現象は、「純粋状態」＝「既約」という理論を＜無限自由度＞の量子物理学中でどう位置付けるのかという問題抜きにして語ってはならないのではないかと思われる。

2.7　純粋状態と既約分解そして混合状態

［10］には、熱・統計物理学の理解を包括的に含んだ説明がなされている。この説明は大変重要であるが、それについては［25］で整理をしておいたし、ここではそこまで議論を包括的に展開する余裕はない。ただ、重ね合わせ問題とその所謂「非因果的」収縮問題といわれるテーマを、単にヒルベルト空間の上のベクトルを粒子像の延長だけで考えることは疑問である。

最初にこの点についていくつか指摘しておきたい。

1）まず、先の「歴史的経緯」を振り返る箇所で瞥見したように、シュレディンガー方程式の関数は状態関数であり実在波を表現しているのではない。従って直接的に量子的対象を示しているとは言い難い。この問題は、量

子力学における実在とは何か、という問題において過去幾度も取り上げられてきた（例えば、[22, 29]）。しかしこの問題を状態関数の解釈だけで考えるのは袋小路に陥るだけだと私は考えている。その理由は、ヒルベルト空間の理論においては重ね合わせや混合状態を決める原理など存在しないからである (19)。

2）次に、ミクロとマクロの境界を所謂「手で入れる」ような不自然な解釈を自然が許しているとは思われない点であり、また、因果的問題を古典的因果論で測ろうとする点で、いささか強引であろうと考えられるからである。質点系の量子論では位置と運動量が作用素であるのに、場の量子論では粒子系の様相がそのまま移譲されていない点も問題であろう。

3）また、超選択則に従えば、シュレディンガーの猫に関して以下のように理解できるだろう。生死の分別は古典確率が機能している。もし観測前の場面で猫が生きているか死んでいるかを同時に可能とする純粋に「重ね合わせ状態」が用意できるとすると、それは、II 型、III 型の代数とは対応しておらず、例えばユニバレンス超選択則を応用するなら、既約状態の代数が用意され、それが真空状態と重ね合わせ可能かどうか、あるいは超選択電荷 $u = CI$ が何を意味しているか考察しければばならない。重ね合わせ状態は放射性物質のレベルであり、猫はマクロな対象だという反論もありそうだが、だとしたらラジウムなどのミクロな放射性元素を観測する代数を指定しなければ意味がない。仮に、猫も量子的対象だというならば、＜生きた猫のベクトル＞＋＜死んだ猫のベクトル＞は I 型状態に準じて考えらるべきだ。だとすると、それは、後述することになるが、ミクロ系で閉じたままの理論となる可能性があり観測不可能となるだろう。

以上より、観測の問題は、単にある閉じた系、あるいは有限自由度の系で完結することは出来ず、無限自由度の場の理論を考慮に入れてはじめて全体像がみえる問題であろう。

2.8　粒子と場：再考

ここで、別の角度から、量子物理学における粒子像と場の問題を考えてみたい。尤も、これから論じる問題は半ば常識ではあるが［42; VI］、それが量子化や量子物理学の全体像を再考するというところまでは考えられていないようである。特に相対論的要請をみたす質点系の粒子に対しては、すでに粒子像は実際のところ成立していない［37; Chapter8］。

この点は、また別の論考で考える予定ではあるが、ここで［19］を参考に概略を記す。数理物理学としては［49; 1.8］に詳細な記述がある。ただ日本の相対論的量子力学のテキストにはこういう基本的論述が見られない。

粒子系を考える場合、相対論的量子学において、m を静止質量として $\hbar/4mc$,（$\hbar := h/2\pi$）以下には局在化できない。これは、a を空間のある領域の一次元的大きさとしたとき、不確定性関係から、空間のある有限領域を動く粒子のエネルギーの平均値が $< E > = \frac{<p>}{2m} \approx \frac{\hbar^2}{8ma^2}$ と見積もられ、（単純計算すれば）もし、局在化可能であれば、$\frac{p^2}{2m} > 2mc^2$ となり、相対論的エネルギーの定義と矛盾する。それゆえ、例えば、光子（$m = 0, v = c$）の場合は、粒子像は不可能である。裏返せば、相対論的要請（アインシュタインの因果律）を破れば、粒子像は可能となる。そこで相対論的粒子、あるいは相対論的な場の量子論では、漸近的な意味での粒子像が導入される。

ここで、一般に、粒子像が有限粒子系（所謂、普通に理解されているシュレディンガー方程式による量子力学）に限定されていると仮定すると、その局在的な物理量を表現する代数は I 型フォン・ノイマン環である。

一方で、場の量子論において、この I 型で理解できる真空表現の領域は時間的・光的であり、それ以外（wedge 領域）は、III 型である［32］。だとすると、真空表現に限っていえば、空間的領域と時間的・光的領域において、そこに粒子像を実現させる描像が存在することになる。

2.9 Split property

Split property（SPと略：「分裂包含」ともいわれる）は、核型性条件（nuclearity condition）[20]とセットで論じられるべきだが、準備も必要であるので、後者に関しては今後の考察とする。ここでは前者を整理して、そこから解釈されうる量子像を考察する。SPの包括的な理論は［38］にある。その成立から考えるには［34］の論文から追うべきだろう。証明は準備がかなり必要であるので省略する。

定理E［31, 32］

$\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}$ がsplitといわれるのは、あるI型因子環Mが存在して、$\mathcal{A}\subseteq\mathcal{M}\subseteq\mathcal{B}$ となる場合、その場合のみに限る。

これは例えば、$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ が I_N 型のフォン・ノイマン環であれば、SPは当然起こりうることであるから、この $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ が非I型因子環である場合が興味深い対象となる。この定理Eを局所場の理論に適用すれば、ある $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ と $\mathcal{B}(\mathcal{O})$ の間にある作用素がI型であることになる。さらに、進んだ議論になると（この場合は。中間に二つのフォン・ノイマン環が挟まれることが証明の上で必要になるが）、$\mathcal{B}$ が核型性条件をもてば、つまり、$\mathcal{B}$ からあるヒルベルト空間へトレースノルムで有界にあるような写像が構成できれば、$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ の間にI型因子環が存在することも知られている。

ちなみに、核型性条件の写像は、写像 $\Theta_\beta, \beta>0$、に対して $\Theta_\beta(A):=e^{-\beta H}A\Omega$,（$A\in\mathcal{A}$）とあらわされる[21]。

この定理Eを物理として眺めると、III型の（相対論的）無限量子系の中に粒子像が埋め込まれているとみることもできるし、［10］にあるように「殆ど有限次元」としてみて、繰り込み理論の橋渡し、と理解することもできる。本論の主旨からいえば、この条件は、実は、広く極小射影、原始的射影をもたない無限次元のIII型世界のキャンバスの上に、粒子像が浮かんでくる画として理解できるのではないか。もっとも、この核型性作用素の収束は、H

と β、そしてトレースノルムのオーダーにより、ここをどう解釈するかで変化する。

3　展望

最後に、以上の解釈を踏まえて、いくつかの見通しを論じておきたい。まず、質点系の量子論、つまり一般に有限自由度を意味する量子力学と無限自由度の場の量子論の関係についてである。今回は、量子統計物理学にはまったく言及しなかったが、量子統計物理学に登場する作用素環の殆どがII型であること、また相対論的場の量子論においてはIII型が一般的であること、を考え合わせれば、有限粒子系を扱うI型の世界は、代数的場の量子論からみたとき、かなり制限された世界であり、理想的な世界だが現実の世界（実験室で作られる世界は現実的世界とは普通いわない）ではあまりお目にかかれない世界だろうということである。

量子力学の生成史においては、まず、質点系の量子論が先に登場したが、これは人間がものを考える際に、いきなり複雑な問題を解こうとしないことと同じである。ただ実際、事の起こりは黒体輻射であった訳であり、その意味では最初から場の問題が背後にあった。

3.1　内部と外部

量子物理学の観測問題において、常にテーマとなるのは量子的世界と古典的世界の境界問題である。私も以前は、この境界をやや厳格に保持していたように思う。しかしその境界の意味は、無限量子系と作用素の問題を考察する中でやや変化してきた。

尤も、そういう見方をとってしまった理由は私の菲才だけでなく、本論冒頭で記したように量子物理学、特に我が国の物理学のテキストにみられる理論運用重視のスタイルの陥穽にはまり込んでしまったことも理由かもしれな

い。ところで、そもそも自由粒子の量子論というのは、我々が決して「観測」できない世界である。だが、観測できないことがその世界が実在しない、と軽々に語るような実在論はあまりに稚拙だろう。それは、かつてM. ハイデガーが［23］の冒頭で論じたように、カントが特殊形而上学の諸対象の理論的論証不可能性という意味での不可知論を論じたことをもって、そうした対象が「虚無」であると断言することの危うさを論じたのと同じである。

むしろ、I型の量子的世界、さらに狭くいえば＜ストーン-フォン・ノイマンの一意性＞で完結する「oneセクターの内部世界」を外部世界から切り離して論じることのほうが、かえって危険かもしれない。それは、柄谷行人の謂いではないが、一種の外部世界を切り捨てた内部世界の一種の自己免疫疾患の多発という喩えにも連なるように思えてならない(22)。I型の有限粒子系の世界、oneセクターの世界で、この複雑な現実を覆いつくすことは、人間の思考の平板化であり、原理的にも不可能なことは、数学が示している。さて、そこで、量子的世界とこの現実の古典的な世界を分断なく捉えるにはどうしたらよいのか。

A）一つは、ミクロ・マクロという構造を無限自由度の捉えがたい世界から質点系の世界が構築されるという見方へつなぐという考え方、

B）二つは、時間と空間の再構成、

と私は考えている。こういう展望に対して、当面は、

A）にとっては「接合積（crossed prduct⋊）: 半直積ともいう」とその拡張。B）に対しては、秩序変数と時間と空間のパラメータ理解。

A）については、［10］に中で、別の角度から議論がなされている。ここでは、次の点だけ整理しておく。代数上の接合積という数学は、積空間を作るテンソル積に対してそこに、ダイナムズムを導入しているとみることができる。［5］にある例だが、a を $|a| \neq 0$ となる0でない有理数で、変換 $t \in \mathbf{R} \mapsto a^n + b \in \mathbf{R}$（$b \in \mathbf{Q}$, $n \in \mathbf{Z}$）からなる群 G の $\mathcal{A} = L^{\infty(\mathbf{R}, \mu)}$ 上への作用を構成すると、

$\mathrm{A} \rtimes_{\alpha} G$ はIII型になる、（$\alpha = \{\alpha_t\}$ が作用）。

この純粋に数学的な群－測度構成法が物理モデルとして意味があるかどうか不明だが、この作用は、I 型を III 型へと繋いでいる。混合状態である観測の状態を、閉じた量子系からどう繋ぐか、という方法に重要なツールである。

B）については、以下の考え方をどう拡張すべきか、という問題となるだろう。［11］に書かれている秩序変数の理解は、熱・統計力学の見方を必要とするので背景の知識は省かざるを得ないが、この見方は、有限粒子系の量子物理学の枠組みに縛られている我々の思考の方針転換である。有限粒子系では、先にも述べたが、I 型のフォン・ノイマン環の世界しか基本的に扱わない。そうすると、表現 $\pi(A)$ の既約分解（表現）と可約分解（表現）で話が終始する。しかし、無限粒子系で普通に現れる III 型では、最初から既約表現をみたとろで表現が原理的に相互に非同値であること、無数の非同値の表現の混合状態が、熱力学的にはそれ以上、分解できない熱平衡状態であることがある。数学としての既約表現がダイレクトに物理学における熱平衡状態に結びつかない点を考慮すれば、熱的状態（混合状態）をカバーしうるような概念拡張が図られているのである。

それに伴い、超選択電荷と離散的な通常のセクターに対して、マクロ指標である「秩序変数（oder parameter）」が導される。秩序変数は一般にある物理系の「相（phase）」が持っている秩序パラメータである［41]。液体、気体、固体、といった物の相を区別する（相転移を区別する）指標の一つに「密度」などがある。磁性体のそれは、マクロには磁化構造であるが、それが今日、磁気モーメントの加算により可能となるから、ミクロのスピンが重要になる。素粒子論における自発的対称性の破れに登場する秩序変数として［定理 B］で述べたが、真空期待値を計算する場合の、保存量 Q に関係する。対称性が破れていない場合は、真空状態 $|0>$ に対して $Q|0>=0$ であり、形式的には $Q|0>\neq 0$ の場合が破れが起こっていることを意味する。しかし、期待値の発散を考慮すると、指標としては局所作用素 $A(x)$ との交換関係 i［$Q, A(x)$］$=\delta_Q A(x)$ を考え (23)、$\delta_Q A(x)|0>\neq 0$ を自発的対称性の破れの指標にし、この $\delta_Q A(x)$ が、今の場合、秩序変数となる。

秩序変数は熱力学でマクロ指標となっている半面、今日では、ミクロとのつながりもある。また、指標の性質から、基本的には連続パラメータである。これをセクターの分類指標とすることで、連続的セクターが理解可能になる。この観点をとれば、従来の観測理論の難点も整合的に理解されうる［25］。この秩序変数という考え方は、時間と空間の見方に応用できないだろうか、というのがB）である。

［10］によれば、統計力学等で示される温度等の連続パラメータで指定される連続セクターは、従来セクターなし、とみなされてきたという［35］。これに対して、既約表現を基準にとらないセクター理論の拡張においては、その各セクター（各因子環表現）のラベルに上記の連続的パラメータが使用される。ところで、［4; 7, 8 章］にあるように、系の時間発展を制御する群（ユニタリ）$T(t)=e^{-itH/\hbar}$ は系の熱平衡を制御する半群 $T(-i\rho\hbar)=e^{-\rho H}$, ($\rho>0$ は逆温度）と複素時間を折り目として結合している。さらに、後者の応用として理解される Araki-Woods 表現は、既約表現ではなく ρ の値により、無限自由度の系の熱平衡状態がギブス状態で定義されない非同値表現へと我々を導く［40］。

こうした点を今度は逆に時間の側からみて、まとめとしたい。

3.2　時間の二様態

［15; 9 章］の中に述べられているが、非相対論的シュレディンガー方程式から相対論的粒子を扱う相対論的シュレディンガー方程式へとすすむ中で、その方程式がローレンツ対称性を保持するためには粒子多体系の相対論的シュレディンガー方程式が多時間理論でなければならず、それを無限点に拡張するには各点に別々の時間を割り当てる超多時間理論が必要になることを述べている。朝永が時間を空間座標を使って $\sigma(x, y, z)$ と置き換えたのは有名な話だ。質点系の量子論を粒子像を保持したまま相対論的要請を全つと、粒子像が破綻することは、先に整理した［19; 8 章］に詳細な計算がある。

その根には、質点系の量子論が量子化を行う際に、ハミルトニアンの中で時間を特別視しているという点が理由にある。一般に、場の量子論では経路積分を使うラグラジアン形式を基本にしている。ハミルトニアンは、重力場のような一般相対論が支配する領域では適用限界があり、確かに一般論としては、ハミルトニアン形式は場の理論に不向きな部分もある。しかし、特殊相対論の領域に限れば、時空の対称性とハミルトニアン（と運動量）の間には密接な関係がある。

時間を超多時間的に考えるということは、少なくとも特殊相対論における時間と空間の局所相対性を合理的に量子論の中へ取り込むには重要なアイディアかもしれない。しかし、現在の場の量子論では、時間と空間の座標は、単なるパラメータであり、c 数としてパラメータとして扱われている。当初の問いに戻るが、質点系の量子論とその拡張版としての超多時間論が、現在の場の量子論とどのように関係するのか、この問題は、実は自明ではない。

ここで、一つの切り口がセクター理論と、時間の二様態にあると考えてはいかがだろうか。［7; 1 章］に極めて興味深い論述がある。それをそのまま引用する。

「量子力学が創られたとき、c 数位置ベクトル $\vec{x}$ と運動量 $\vec{k}$ はそれぞれ演算子 $\vec{q}$ と $\vec{p}$ で置き換えられ、いかなる c 数の空間変数も残されていなかった。与えられた時刻の c 数の変数がないので、量子力学の枠組みではもはや空間的に一様でない古典的物体を作り出す望みはないのである。一方、場の理論の場合には量子化は振幅に施され、位置ベクトル $\vec{x}$ は c 数のままである ; 演算子 $\vec{A}$[24] は c 数 $\vec{x}$ に依存する関数である。古典的物体が量子場の系で作られ、量子力学の系では作られないことの本質的な理由がここにある」

有限量子力学の系は、古典物理学の世界にそのままは染み出してこない点が指摘さえれているが、これを先にみたセクターの問題と照らし合わせると、少なくとも I 型の有限粒子系の世界は、そのままでは閉じた量子系であり、観測されえないということになる（存在しないという意味ではない）。その系内でどのような事象が生じていてもそのままの姿は、原理的に分からない。

例えば自由粒子の世界は捉えられない（数学としては把捉できるが)。これは、検出可能な粒子の描像をもたない自由場の理論にそのまま接続される。場の量子論は、時空のパラメータを同時に抱えていることで、マクロ系での観測という作業が可能になっている。そして、状態凝縮や対称性の破れという形で純量子世界の変移が古典的世界として理解可能になる。

だとすると、閉じた量子系、純量子的世界はいかなる意味で実在するか、という問題に立ち戻ることになる。純量子系の広大な領域から古典系が生じるという見方は、以上からすると変更を迫られるかもしれない、むしろ、この現実世界のいたるところは非 I 型のミクロ・マクロの混合領域であり、その一部が、むしろ I 型世界として例外的に生じている。宇宙が、最初から量子的であれば、それは永遠に閉じていただけかもしれない。系の凝縮や対称性の破れは、周辺部との接続がない純粋な粒子像では生じない。常に系は開いていなければならない。

ここで、時間は二様に考えられるべきだろう。一つは、常に相対論との接続を可能としている場の理論における時間である。その時間は、一種の秩序変数を形成しているのでなないか。つまり（連続あるいは離散）セクターを形成しているのではないのか。そして、もう一つは閉じた系における何らかの時間であり、それは相対論的である必要は（観測できない限り）ないかもしれない。昨今議論されてきたハミルトニアンを基調とする「時間の作用素」[3; 2:3.8］は、実は、この閉じた系における時間の実相を測るための物理量なのかもしれない（一種の field algebras)。

4　補足：quark の閉じ込めの理論

本論では I 型の議論をやや低調モードで扱ったが、実は quark3 体の閉じ込めの理論（ハドロンの構造論；バリオンとメソンからなる）に関しては、カラーを持つ 3 つの quark が粒子像を保持しているならば、一定の漸近的粒子像が必要になる。この際、なぜカラーは 3 つで白色（無色）になるのか、あ

るいはどうしてquarkは取り出せないのか、という深遠な問題については、おそらくハドロン内部の重ね合わせの議論（つまり閉じた系：有限粒子系のI型セクター（？））と観測にかかる領域（ハドロンの現象論：超選択則が効く）の問題が絡んでいるように思われる。但しゲージ理論を考慮すると $G=SU(3)$ のゲージ群は（閉じた孤立保存量に対して）非可換なため、普通の電荷 $U(1)$ と同じ扱いができない。つまり、可測可能にならないと考えられる。そうであれば、ハドロン内部は純量子的世界が支配していることになる。

宇宙誕生後、温度の低下により凝縮や対称性の破れが起こり、こうした孤立した漸近的粒子像したがうI型世界が構成されたのかもしれない。バベルの塔の神話のように。

註

⑴　ちなみに、代数的場の量子論では、フェルミオンまで含めた場の量をfield operatorあるいはfield algebraといって、観測可能量であるobservableと分ける。

⑵　いくつかのCCRの非有界表現をもつ物理的対象、例えば、アハラノフ－ボーム効果など、は例外である。これに関しては［3］を参照のこと。

⑶　この粒子象についての問題は後述する。

⑷　$\oint pdx = nh,\ \int_0^{2\pi}{}_{p\theta d}\theta = nh$ などと表記される量。

⑸　実は相対論的なシュレディンガー方程式の拡張は、時間について問題を生む。この点は、本論の最後に記す。

⑹　以前［24］で記したが、シュレディンガーの猫や多世界論の問題には、物理的対象の意味への考察の脆弱さに起因していると思われる。これは歴史的な哲学の実在論に関する訓練不足にも起因するだろう。

⑺　第三式に関しては、トレースに関して収束する（無限次元の場合はトレースノルムに関して）級数である $\Sigma_{kpk}|\psi_k><\psi_k| = \Sigma_k(\psi_k,\ )\psi_k$ というディラック表示、あるいはシャッテン形式で計算している。トレースはそもそも、直交基底で作用素をはさんだ内積和だからである。

⑻　しかし、定義の違いがテキストを複数読み比べる場合に混乱を招くことはよくある。

(9) ただ、呼称は、［10］ですでに啓発されてるが、I 型フォン・ノイマン環の因子表現に強く傾斜しているので、本論で後で述べるように注意が必要である。

(10) 表現 $\pi_\psi(\mathrm{A})''$ が因子環とは：$(\pi_\psi(\mathcal{A})''\cap\pi_\psi(\mathcal{A})'=\mathbf{C}1)$ のことである。既約表現は、$(\pi_\psi(\mathrm{A})'=\mathbf{C}1)$ となる特殊な場合で、純粋表現を可能とする I 型にしか本来適用できない。

(11) 真空状態は励起状態を考える際の下地となる。

(12) 今、*準同型表現 $\pi(A)$ を考えても、A そのもので考えても議論の本質に関係しない。

(13) 加えて、スピノル場やベクトル場の真空期待値は常に 0 になる。

(14) III 型の議論になると、真空表現は非同値になるが、これはセクターが何らかの射影（例えば、空間的領域同士の関係）に比せられというより、後述のように、空間の体積によるのだろう。この点に関しては、あまり明確に記されていない。これは真空自体が、並進不変ベクトルが真空ベクトルの定数倍であるため、逆に並進不変にならないような時空を考えないためかもしれない。

(15)

定理 C2

（制限非斉次ローレンツ群：すなわちポアンカレ群 $\mathcal{P}_+^\uparrow$ を仮定しなくてもよいが）真空状態 ψ に対して以下が同値となる。

（a）表現 $\pi_\psi(\mathcal{A})''$ は因子環：$(\pi_\psi(\mathcal{A})''\cap\pi_\psi(\mathcal{A})'=\mathbf{C}1)$

（b）$\pi_\psi(\mathrm{A})$ は既約：$(\pi_\psi(\mathrm{A})'=\mathbf{C}1)$

（c）並進不変ベクトルは真空ベクトル Ω_ψ に比例する。

(16) ここで I_∞型は、部分系（局所領域）がそれを包含する領域に含まれるように考える場合に現れる。つまり、フォン・ノイマン環 $\mathcal{A}$ が、弱位相で稠密な AF（Approximatelyfinite）C^*代数を部分代数として含むときである。この場合に $\mathcal{A}$ は超有限フォン・ノイマン環とか単射的フォン・ノイマン環、といわれる。

(17) ［37; Chapter7］の証明を参考にしたが、やや冗長なため整理した。

(18) I 型の場合は、最少の射影を持つので、束論 Lattice の言葉では、原始的射影（atomic projoction）をもつ、と言い換られる。つまり、今の場合、1 次元射影を持つのである。

(19) 強いて数学のテクニックを持ち出せば、特異値分解などで次元を上げることでエンタ

ングル状態を分解することは可能である。

⒇　核型性条件は、1 点上の量子場の理論を可能とする理論で粒子像をもたらす［10, 30］。

(21)　H は非負のハミルトニアンで 0 を最低固有値（エネルギー）に持ち、Ω はそれに対する固有ベクトルで巡回かつ分離的。

(22)「バフチンとウィトゲンシュタイン」（［12］に所収）を参照。アカデミズムという世界はそれ自身理想化された内部世界であり、その中でさらに理想化された実験モデルを構築するが、そういうモデルが長期に亘り現実世界（外部、あるいは環境世界）に喧伝されることの危険性は、昨今の日本や世界のコロナによる状況が暴露したともいえる。柄谷のこの論考が 1984 年であったことに驚かされる。

(23)　この交換関係は、ネーターの定理の無限小変換から導かれる。

(24)　ベクトルポテンシャルのこと。

参考文献

［1］新井朝雄、江沢洋『量子力学の数学的構造　II』、朝倉書店、1999 年。

［2］新井朝雄『多体系と量子場』、（岩波講座　物理の世界　量子力学 5）、2002 年。

［3］新井朝雄『量子現象の数理』、朝倉書店、2006 年。

［4］新井朝雄『量子統計力学の数理』、共立出版、2008 年。

［5］生西明人、中神祥臣『作用素環入門 1 関数解析とフォン・ノイマン環』、岩波書店 , 2007 年。

［6］梅沢博臣、江沢洋、河原林研『素粒子論の話題』（核物理学講座 12）、共立出版、1963 年。

［7］H.Umezawa『場の量子論　ミクロ、マクロ、そして熱物理学の最前線』（有光敏彦、有光直子訳）、培風館、1995 年。

［8］梅澤博臣、ジョセッピ・ヴィティエロ『量子力学』（保江邦夫・治部眞里訳）、日本評論社、2005 年。

［9］梅垣壽春、大矢雅則、日合文雄『作用素代数入門　Hilbert 空間より von Neumann 代数』、共立出版、1985 年。

［10］小嶋泉『量子場とミクロ・マクロ双対性』、丸善出版、2013 年。

［11］小嶋泉「量子場における秩序変数と large deviation」（『京都大学数理解析研究所講義録　1066』、1989 年、所収）。

［12］柄谷行人『言葉と悲劇』、講談社学術文庫、1993 年。

［13］坂本眞人『場の量子論　不変性と自由場を中心にして』、裳華房、2014 年。

［14］坂本眞人『場の量子論　（II）ファインマン・グラフとくりこみを中心にして』、裳華房、2020 年。

［15］佐藤文隆『量子力学ノート　SGC ライブラリー 102』、サイエンス社、2013 年。

［16］高橋康『物性研究者のための場の量子論　II』、培風館、1997 年。

［17］竹崎正道『作用素環の構造』、岩波書店、1983 年。

［18］武田暁『場の理論』、裳華房、1991 年。

［19］ダビドフ『量子力学（改訂第二版）　II』、新科学出版社、1979 年。

［20］朝永振一郎『量子力学　I［第 2 版]、みすず書房、1969 年。

［21］朝永振一郎『量子力学　II［第 2 版]』、みすず書房、1997 年。

［22］並木美喜雄「量子力学的観測と物理的実在」（『科学哲学 27　量子力学と物理的実在』（日本科学哲学会編：早稲田大学出版部、1994 年）、所収）。

［23］ハイデッガー『カントと形而上学の問題』（門脇 卓爾、ハルトムート ブフナー 訳）、創文社、2003 年。

［24］藤本忠「研究ノート：「超選択則」の覚え書き　－基礎－」（龍谷哲学会編『龍谷哲学論集　第 35 号』、2021 年、に所収）。

［25］藤本忠「研究ノート：「超選択則」の覚え書き　－発展編－」（龍谷哲学会編『龍谷哲学論集第 36 号』、2022 年、に所収）。

［26］ボゴリューボフ（江沢洋、亀井理、関根克彦・訳）『場の量子論の数学的方法（新装版）』、東京図書、1987 年。

［27］ヤンマー『量子力学史　1』（小出昭一郎訳）、東京図書、1974 年。

［28］ヤンマー『量子力学史　2』（小出昭一郎訳）、東京図書、1974 年。

［29］和田純夫「量子力学の多世界解釈」（『現代物理学最前線 6　大槻義彦 編』、共立出版、2002 年、所収）。

［30］H.Araki, *Mathematical Theory of Quantum Fields*, Oxford, 1999.

［31］H.Baumgärtel, M.Wollenberg, *Causal nets of Operator algebras*, Akademie Verlage Press, 1992.

［32］H.Baumgärtel, *Operatoralgebraic Methodes in Quantum Field Theory*, Akademie Verlage Press, 1995.

［33］N.N.Bogolubov, A.A.Logunov, A.I.Oksak, I.T.Todorov, *General Principles of Quantum Field Theory*, Kluwer, 1990（original:1987）.

［34］D.Buchholz, Product State for Local Algebras, *Commun. Math Phys* 36, 287-304, 1974.

［35］D.Buchholz, S.Doplicher, S. Rong, J.E.Roberts, A new look at Goldstone's theorem, *Rev. Math. Phys. Special Issue 49*, 1992.

［36］O.Bratteri, D.W.Robinson, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics 1 2nd. Edition*, Springer, 1987.

［37］B.Crifton, *Quantum Entanglements selected papers*（ed. J.Butterfield, H.A.Halvorson）, 2004., Oxford.

［38］S.Doplicher and R.Longo. Standard and split inclusions of von Neumann algebras, *Invent. math. 75, 493-536*, 1984.

［39］K.Fredenhagen, *Superselection Sector*, Notes from Lecture held at Hamburg University in the Winter Term 94/95.

［40］T.Fujimoto, arXiv 2998490.（An Intriduction to time generation on Algebraic Quantum Field Theory 2020.

［41］Greiner, Neise, Stöcker, *Thermodynamics and Statistical Mechanics*, Springer, 1997.

［42］R.Haag, *Local Quantum Physics. 2nd edition*, Springer, 1996.

［43］W. Heisenberg, W. Pauli, Zur Quantendynamik der Wellenfelder. *Zeitschrift für Physik 56*, 1-61, 1929.

［44］W. Heisenberg, W. Pauli, Zur Quantendynamik der Wellenfelder II. *Zeitschrift für Physik 59*, 168-190, 1930.

［45］S.S.Horuzhy, *Introduction to Algebraic Quantum Field Theory*, Kluwer, 1990.

［46］R V.Kadison, J R.Rongrose, *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras, Vol.II, Advanced Theory*, 1986, Academic Press, 1986.

［47］M.Reed, B.Simon, *Analysis of Operator*, Academic Press, 1978.

［48］S.Sakai, *C^*-Algebras and W^*-Algebras*, Springer, 1971.

［49］B.Thaller, *The Dirac Equation*, Springer, 1992.