

「超選択則」の覚え書 (2)

— 発展編 —

藤 本 忠

概要

「超選択則の覚え書 (1)」を踏まえ、代数的場の量子論においける、セクター理論やそれと関連する作用素環（フォン・ノイマン環）の表現論、既約分解の理論との関係を中心に整理を行う。

Keywords：セクター理論、真空表現、因子環、観測問題

1 セクター理論の一般論

セクター sector とは、代数的場の量子論の一般的枠組みにおいては、「超選択則（超選択電荷）によって分類された各々の（同一類の）重ね合わせ superposition 可能部分空間」を指す [9]。したがって、二つの異なるセクターの間（のベクトルあるいは表現）には重ね合わせは生じない。このセクターを観測量の代数という観点からいい直すと、「観測量代数（自己共役表現）の因子表現への分解（既約分解表現）⁽¹⁾ ということになる。後で触れるが、セクターは一般に、離散的な超選択電荷（射影）による分類によっているため、連続的な超選択電荷が現れる状況はあまり想定されていない。しかし、熱力学等で使われるマクロ指標である秩序パラメータ（order parameter）を広義に理解する立場によれば、観測の問題も見通しが良くなる。ここでは、まず一般的な部分から整理していく。

1.1 Haag と Araki のテキストからのまとめ

ここでは、[9] と [15] のテキストを中心に整理をする。超選択則は真空からの異なる局在励起を区別する量として、励起状態がもっている何らかの電荷を一般電荷として想定してそれをメルクマールとする。局在する励起であるため、一般の電磁気学における電荷はガウスの法則により局在性をみたまないとされる。一般にバリオン数などが想定されることが多い。

[真空のセクター]

励起状態を考える前に「真空状態 vacuum state」の扱いについて考える。

場の量子論の中では、真空は「対称性の自発的破れ」に関して大切や役割をする。その際、真空の選び方が問題になる。真空は絶対的に一意なのか、縮退のような状態が普通であり、一意な真空を選択することには意味がないのか、よくわかっていない。自由場を扱う場合にはグローバルに一意性を仮定しても問題はないが、相互作用場を仮定した途端に真空偏極が生じる。縮退状態は一意の真空が重ね合わさった場合とみることも可能だが、現実の世界は相互作用が常に生じているから、いわば縮退真空が分解して各々の真空になると考えることもできる。

(縮退) 真空は、空間の体積が無限大の極限ではばらけ、例えば真空 1 ($|0_1\rangle$) と真空 2 ($|0_2\rangle$) (その他の真空も同じ) は直交するので、そこに局所的作用素を作用させてもすべて直交する [4] [5]。したがってグローバルには真空の重ね合わせは解消し、真空の直交性により、相互の真空は非同値になる。つまり、ここに真空セクターが現れる、と解釈できる。一方、体積が有限であれば、二つの真空状態は一般にユニタリ同値となる⁽²⁾。

真空は、Reeh-Schlieder の定理によれば、ある有界領域 D において物理量 $A(D)$ を真空ベクトル Ω に作用させると、 $A(D)\Omega$ はその作用値を含むヒルベルト空間で稠密になる ($\overline{A(D)\Omega} = \overline{A\Omega}$)。つまり巡回ベクトルになる [13]。さらに、その作用の表現の二重可換子環に対しては分離ベクトルになる。すなわち、

— 定理 2.1 Reeh-Schlieder —

真空状態 ψ に対して、弱加法性^aのを仮定すると。真空ベクトル Ω_ψ は任意の有界領域 D で $\pi(A(D))$ の巡回ベクトルであり、 $\pi(A(D))''$ の分離ベクトルである。

^aこれに関しては [9: Def:4.13] を参照。

一般に、任意の座標系と、その座標系でエネルギーを減少させる任意の作用素 $Q \in A$ に関して、 $Q \in \ker \psi$ となる状態が真空状態といわれる。そして、その真空状態に関して、

— 定理 2.2 —

(制限非斉次ローレンツ群：すなわちポアンカレ群 $\mathcal{P}_+^\dagger$ を仮定しなくてもよいが) 真空状態 ψ に対して以下が同値となる。

- (a) 表現 $\pi_\psi(A)''$ は因子環： $(\pi_\psi(A)'' \cap \pi_\psi(A)') = C1$
- (b) $\pi_\psi(A)$ は既約： $(\pi_\psi(A))' = C1$
- (c) 並進不変ベクトルは真空ベクトル Ω_ψ に比例する。

したがって、ここから分かることは、セクター理論の立場からみれば、(縮退) 真空表現は既約分解ごとに (ばらけて) 存在し、 A が可分 (離散的) であれば、真空状態 ψ は、 $\pi_\psi(A)''$ が因子環であるような直積分 (直和) に書けることになる。また、ある一定の領域 (相対論的な意味で空間的に離れていない) における真空表現は一意であるということになる。ここに超選択則が働いているとみることも可能である。つまり先の物理学の理論を考慮すると、非同値な真空表現へと分離されるとみなすことができる。もっとも、それは、既約表現のフォン・ノイマン環のタイプによるだろう⁽³⁾。I 型の場合と非 I 型の場合とでは状況は異なる。

真空状態のクラスター分解は、真空表現の既約表現がフォン・ノイマン I 型の場合は、既約表現の定義から考えると唯一となる⁽⁴⁾。ただ、有限自由度に関しては、既約表現は <ストーン-フォン・ノイマンの定理> によるユニ

タリ同値性より唯一である。つまり、真空セクターも一つしかない。

真空状態のセクターに関するさらに詳細な分析は [17] にある。そこでは、相対論的因果性、相対論的共変性、エネルギー・運動量のスペクトル条件、の三つを前提して (Araki-Hagg の局所性条件)、真空セクターが、各コヒーレンス部分空間との共通部分の中で ($H_{0,\gamma} := H_0 \cap H_\gamma \neq 0$)、 I_∞ 型のフォン・ノイマン環の因子環に分解されることが示されている⁽⁵⁾ ($A = \bigoplus A_\gamma$, $H = \bigoplus H_\gamma$)。真空の超選択則のセクターは、以上の意味で、特別なのである。

[一般のセクター (励起状態: excitation state)]

次に、真空からの励起状態を考える。しかしここで励起状態とつても、すべての物理量がセクター理論で扱えるわけではない。当初はかなり条件がきつかったが、Buchholz-Fredenhagen の仕事により、超選択則に関わる電荷の条件が拡張された。しかし、一般に、エネルギーや運動量といった物理量は大域的観測量である。真空状態からのズレをどのように超選択則として整理するかに関して、真空の一般的定義に加えて重要な基準が存在する。それが **DHR 解析**⁽⁶⁾ である。基本として 2 つの基準が存在する。

1) 真空からの意味がある局在励起状態を選び出す基準である。励起状態が時空領域 D に局在しているとする、 D から影響が及ばない (相対論的) 因果的補集合 D' では励起表現 π_ω は真空表現 π_0 と等価な表現 (ユニタリ同値) を与える、という基準。

$$\pi_\omega|A(D') \cong \pi_0|A(D'), (D' \text{ は補集合なので有界でない})$$

2) 局在励起が移動可能であるという要請。これは 1) において成立している事柄は、時空並進 $D+a$ に対しても成立する、という意味である。

したがって 1) に 2) を加えれば、ヒルベルト空間 H_0 から H_ω へのユニタリ作用素を U_a とし、有界時空領域 D を一つ設定した場合、 D とその時空並進 $D_a := D+a$ ごとに、 D_a と因果的に独立な任意の領域 $D'_a \in K$ に対してユニタリ作用素が存在して、以下の等式になる。

$$\pi_\omega(A) = U_a \pi_0(A) U_a^* \quad (\text{任意の } A \in \mathcal{A}(D'_a))$$

以上より、真空から励起された局在化可能な電荷（超選択電荷）を持つ物理的状态は、電荷が及ばない空間的領域では真空と同じようにみえる、という要請である⁽⁷⁾。上の 1) 2) をみたす表現 π のユニタリ同値類 $[\pi]$ の各々の関係や構造を考えるのがセクター理論である。この同値類にある領域 D 上の表現の自己同型写像を定義して得られる表現をセクターという。物理的な言い方に直せば、「観測量の代数の因子表現（既約表現）」となる。

Araki のテキストでは、上記の 1) 2) に基づいて DHR 解析を解析するために、さらに二つの仮定 (A)、(B) がおかれている。

(A) Haag の双対性：

任意の 2 重錐領域 D に対して、真空表現 π_0 に関して次の関係式要請される。

$$\pi_0(A(D))' = [\cup \{\pi_0(A(D_1)); D_1 \subset D'\}]'' \cong \pi_0(A(D'))''$$

である ($D_1 \subset D'$ に注意。 D' はいうもでもなく D の因果的余集合)。最後の $\cong$ は、上の 1) による。(双) 可換子 (bi) commutant の記号の意味はフォン・ノイマン環の定理 (稠密性定理) を意味するが、大事なものは、真空の領域である。 D の真空表現の余表現を考えることが、 D' 上の真空表現を考えることと同じになる点が双対性である。

(B) H.Borcher による性質：

開未来錐 D とそれを含む $D_1 (\bar{D} \subset D_1)$ と、 $A(D)$ の任意の射影 $E (\neq 0)$ に対して、 $A(D_1)$ の等長作用素 W で $WW^* = E$ をみたすものが存在する。

この性質は、真空表現を使うと、次のようにも書き換えられる [10]。

π_0 を真空表現とし、上記の $\bar{D} \subset D_1$ を仮定し、さらに、 D_2 を $D_2 \subset D' \cap D_1$ ととれば、 $E \in \pi_0(D)$ で 0 でない射影に対して、 $E \sim I$ となる (mod $\pi_0(D_1)$)。

この Borcher の性質は、III 型フォン・ノイマン環の性質を反映している⁽⁸⁾。

ただし、[9] および [11] をみると、上記の性質は、いわゆる I_∞ 型であつ

でも、ポアンカレ不変性とエネルギー条件（エネルギー作用素にたいして解析ベクトルが存在してべき乗の作用の和が正值）であれば妥当する。

この点は、superselection と superposition、および、split property を考える上で重要に思われる。

1.2 補足：真空の特殊性

ここで、真空状態の特殊性を整理する。真空の状態は、それが縮退状態である場合は、自発的対称性の破れにおいて縮退が解かれ、対称性を破る方向への真空の出現など、素粒子論においては大切な状態である。しかし、真空はいくつあるのか（非同値な真空）、あるいは、どういう状態においては一意なのか、という問題は、ヒルベルト空間のサイズや真空期待値をとる作用素の性質においてしか、今のところわからないようである。ただ、代数的量子論の観点からみると、真空状態には有名な定理がある。

[定理 2. 1] において Araki のテキストに準拠した表現として Reeh-Schlader の定理を整理した。特に、真空状態は、制限非斉次ローレンツ群：すなわちポアンカレ群 $\mathcal{P}_+^\uparrow$ による変換とスペクトル条件（平行移動によっても（前方）光円錐の閉集合にスペクトルが含まれている）を仮定すると、巡回かつ分離ベクトルとなるが、これは真空の「標準状態」呼ばれる [10]。この標準表現に関しては、トレースの一般化である作用素環の「荷重」理論の中で、荷重が半有限、忠実かつ正規である場合のフォン・ノイマン環の表現をいい、その特別な場合として導かれる [1]。

また、哲学的な問題としては、観測量代数が空間的な場合は、真空は各局所代数に対して分離ベクトルとなるから、非局所的問題を誘発する [16]。このあたりの議論は奥深く繊細であるため、ここでは割愛する。

2 セクター理論の意味

2.1 超選択電荷との関係

セクターは冒頭で述べたように、超選択電荷によって分類された同値類の重ね合わせ可能部分空間を指す。これは、伝統的には純粋状態をその同値類によって分類することであるが、今日、このセクターは励起状態を含めて精緻な分析がなされており、ここでその全体を敷衍することは意味がないし、良書もある。ここでは [9] [10] にのっとって、ポイントだけを整理したい。

セクター理論は、真空表現がその基礎になっている。Fredenhagen は、Haag の双対性をみたすセクターを “simple sector” とよんでいる [13]。この点を少し解説する。真空表現 $\pi_0(A)$ に対して、DHR 解析の先の最初の基準をみたす励起状態の表現を定める準同型写像 ρ を $A \in A(D')$ に対して、 $\rho(A) = V\pi(A)V^*$ と定義すると (V はユニタリ作用素で右辺は有界: $V\pi(A)V^* = A$ となる、表現空間からヒルベルト空間へのユニタリ作用素)⁽⁹⁾、励起状態を示す表現の同値類 $[\pi]$ の代わりに、 $\rho(A) := \pi_\rho(A)$ となる。これによって、励起状態に対して、自己準同型写像が定義されて、 $\rho(A) = A$ (A を不変にする) 時、 ρ は局在しているといわれる。この ρ の台 support は当該の領域 D である。

複数の局在自己準同型写像の同値類や領域内での ρ の台を伴う移動可能性を議論することにより励起状態の分類や、ボゾンとフェルミオンの統計的性質が、天下りでなく、セクターの統計として導かれる。この ρ はその同値類により、荷電量子数とみなされるが、これが、超選択電荷に対応している。

真空表現に戻ると、この指標で ρ が既約分解、すなわち 1 次元である場合に、simple sector といわれ、したがって、真空セクターは [定理 2. 2] より simple であることがわかる。

2.2 離散的な超選択電荷と連続的な電荷

超選択則による重ね合わせ部分空間の同値類への分類においては、超選択電荷が重要である点はわかった。しかし、この超選択電荷による分類は、離散的な意味でなされ、表現空間の分類も離散和的である。小嶋泉氏はこの点を明瞭に述べており [2]、実際、[12] などでは、超選択則に働く電荷は局所化されている必要があり、連続セクターはほとんど考慮されていない。

2.3 町田茂氏の解釈から

観測の問題においてはこの連続的セクターに付随する連続的超選択電荷の要請は、[6] にみられる。町田氏によれば、波束の収縮は、観測装置（例えば光子を検出するフィルムの並び）の間に連続的超選択電荷を仮定すれば生じるという。実際には、観測装置を構成する粒子が有限であるため不可能だが、精度を高めることで、近似的な波束の収縮は観測できることになる。裏を返すと、光子を検出するフィルム内の粒子の分布がデルタ関数のように一か所に集中していれば、波束の収縮は生じず、重ね合わせという量子干渉効果がみいだされることになる。

これは、[8] に書いていることと関連するから、少し解説する。波動関数（状態関数）の重ね合わせは、代数的場の量子論の観点からみると、＜2つの状態 ω_1, ω_2 が重ね合わせ可能であること＞と、＜それぞれに付随する GNS 表現 $\pi_{\omega_1}, \pi_{\omega_2}$ がユニタリ写像を含む intertwinning map⁽¹⁰⁾ が素にならないこと＞、あるいは＜無縁表現にならないこと＞、と同値である。つまり二つの表現が素でなければ、直交する射影が表現に付随しないので、異なる部分空間に分離されない。ある表現 $\pi(A)$ が既約表現であれば、その可換環は複素数の定数倍しかないので、 $[u, \pi(A)] = 0$ をみたす u は $CI = \pi(A)'$ となり、重ね合わせ（コヒーレント）を表現することになる。

町田氏の解説には、フォン・ノイマン環のタイプ分けがないためやや議論

に混乱があるように思われる。ここでは、重ね合わせは、有限粒子系に限れば、I型のフォン・ノイマン環によって記述されるが、これは、(ストーン・フォン・ノイマン一意性の定理から) セクターが最初から原理的⁽¹¹⁾ に一つに決まっているからである。

連続的超選択電荷を感光板のフィルム上に要請すると、例えば、フィルの異なる場所ごとに超選択電荷が離散的に存在した場合とどう異なるのだろうか。離散的に存在している場合、有限粒子系であれば、一意性定理から、重ね合わせが常に一つのセクターを要求するから、波束の収縮は生じないことになる。しかし、観測装置は古典系であり、一般に量子系と古典系の積状態は混合状態を引き起こすはずである。しかし、あるフィル上の光点と別のフィルム上の光点の跡が、徐々に陰影を構築して、干渉縞をみせるのは、すべて同じセクターが同じような状態で観測されると解釈することも可能である。無数光点を表す $\pi_i(A)$, ($i \in N$) の一つ一つが、すべてユニタリ同値なため、観測後も、それが保存されていると解釈されうる可能性もある。

町田氏がここで、連続電荷を持ち出すのは、このユニタリ同値を破るためだと思われる。しかし、実は、それはむしろ、フォン・ノイマン環のタイプを、あるいは無限量子系を、最初に設定しておかなければならないだろう。仮に無限粒子系に普通に現れる III 型である場合、連続的な超選択電荷が仮に導入できても、伝統的超選択則の観点では混合状態しか期待できない。有限粒子系であれば、I 型として理解できるが、この場合も純粋状態と混合状態の中間的立場、小嶋氏 [2: 45 ページ] が述べる混合相を仮定しないと、漸近的な意味で干渉効果の「観測」が理解できなくなる。町田氏の解説は、この点がやや不分明であった。もっとも、超流動相転移における粒子数の変化を示す行列要素 (としての秩序変数) が考慮に入れられているとすれば、議論は変わるだろう。

連続的超選択電荷、あるいは、連続セクターを要請するには別の観点からのアプローチが必要に思われる。[2: 37 ページ] にきれいに整理されているが、代数的場の量子論において、連続セクターが登場することを忌避せず、

「秩序変数」を理論に繰り入れる解釈である。

2.4 小嶋泉氏の考察

小嶋氏の提唱そのものは [3] に書かれているが、初めてこの理論に接する人にとっては晦渋に感じられるだろう。そこで換骨奪胎してポイントだけを取り出すと次のようになるだろう。場の量子論の立場における純粹状態という見方を熱力学的純粹相に代表される「純粹相」へと拡張し、またその相補的概念である「混合相」へと混合状態を拡張するという見方である。

この見方は単に場の量子論を量子統計力学の概念へと接続するためだけではないだろう。むしろ、有限粒子系の量子物理学の枠組みに縛られている我々の思考の方針転換である。有限粒子系では、そもそも I 型のフォン・ノイマン環の世界しか基本的に扱わない。そうすると、表現 $\pi(A)$ の既約分解（表現）と可約分解（表現）で話が終始する。しかし、無限粒子系で普通に現れる III 型では、最初から既約表現をみたとろで表現が原理的に相互に非同値であること、無数の非同値の表現の混合状態が、熱力学的にはそれ以上、分解できない熱平衡状態であることがある。数学としての既約表現がダイレクトに物理学における熱平衡状態に結びつかない点を考慮すれば、熱的状态（混合状態）をカバーするような概念拡張が図られているのである。

それに伴い、超選択電荷と離散的な通常のセクターに対して、マクロ指標である「秩序変数 oder parameter」が導される。秩序変数は一般にある物理系の「相 phase」が持っている秩序パラメータである [14]。例えば、液体、気体、固体、といった物質の相を区別する（相転移を区別する）指標の一つに「密度」などがある。磁性体のそれは、マクロには磁化構造であるが、それが今日、磁気モーメントの加算により可能となるから、ミクロのスピンの重要になる。素粒子論における自発的対称性の破れに登場する秩序変数としては [4]、真空期待値を計算する場合の、保存量 Q に関係する。対称性が破れていない場合は、真空状態 $|0\rangle$ に対して $Q|0\rangle = 0$ であり、形式的には

$Q|0\rangle \neq 0$ の場合が破れが起きていることを意味する。しかし、期待値の発散を考慮すると、指標としては局所作用素 $A(x)$ との交換関係 $i[Q, A(x)] = \delta_Q A(x)$ を考え⁽¹²⁾、 $\delta_Q A(x)|0\rangle \neq 0$ を自発的対称性の破れの指標にし、この $\delta_Q A(x)$ が、今の場合、秩序変数となる。

秩序変数は熱力学でマクロ指標となっている半面、今日では、ミクロとのつながりもある。また、指標の性質から、基本的には連続パラメータである。これをセクターの分類指標とすることで、連続的セクターが理解可能になり、また町田氏が論じていたように、従来の観測理論の難点も整合的に理解される。小嶋氏は、この議論により、純粋相（単一セクター内部構造理解：量子系固有の状態：純粋なコヒーレント）、混合相（複数のセクターの確率的混合：量子系と観測系（マクロ環境系）との共存）、超選択則（従来の混合的マクロ状態：但し秩序変数を伴う）、と解釈しなおす。

3 おわりに：因子環の観点から

最後に、今までのことを因子環の観点から整理する。

フォン・ノイマン環 $\mathcal{A}$ に対して、 $\mathcal{A} \cap \mathcal{A}'$ を $\mathcal{A}$ の中心 $(Z(\mathcal{A}))$ といい、 $Z(\mathcal{A}) = \mathbb{C}1$ の場合、 $\mathcal{A}$ は因子環といわれることは、基本である。因子環は、フォン・ノイマン環の因子環分解を通じて [1]、フォン・ノイマン環の分類に重要な方法を与えるため、因子環を考えることは、当該のフォン・ノイマン環の性質を考えることと同じになる。

ところで、先に真空の一意性を整理した際、真空縮退や作用環のタイプに言及した。そもそも、（作用素環に限らないが）代数の既約分解の理論を使うと、代数的場の量子論の立場からは、＜真空表現が一意的な真空状態 Ω をもつ＞ことが＜真空表現の既約性＞である。さらにさかのぼれば、＜真空表現は $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ：右辺はあるヒルベルト空間上の有界線形作用素＞と同じである。つまり、真空の一意性とは、 $\mathcal{A}$ が因子環である場合である。

ところで、既約分解は、I 型のフォン・ノイマン環の場合には、有限自由

度の量子物理観測代数を基本モデルとしている。この場合、既約分解は、何でも述べたように、一意になる。したがって、I 型の場合は、真空表現は、既約表現が原理的に一つなので、真空表現は、すべてユニタリ同値となる。ところが、無限自由度になると、既約表現は、無数に異なって存在する。それゆえ、ある既約表現と別の既約表現の同値性は成立しないので、縮退真空の表現等をもつことになる。つまり、非 I 型の場合は、既約表現をとったところで、各々の表現に関係性が結べないので、純粋状態を基本にとると、因子環が可換性最小条件である故、それ以上の解析ができなくなる（いわゆる「無縁性の乱立」：Goldstone の定理など真空表現の共変性が破れる）⁽¹³⁾。したがって、非 I 型の場合は、小嶋氏が述べるように⁽¹⁴⁾、非自明な中心をもつ状態 ($Z(A) \neq C1$) の解析が大切になる。そして、ゲルファンドの表現定理によれば、可換代数は、ハウスドルフ空間上の連続関数環と同値になるので、スペクトル解析の観点からみると、非自明な中心を対角化して、その構造を代数的に見る、ということが重要になる。

冒頭の註で書いたことだが、セクター理論も既約分解を基準にするのではなく、＜因子表現への分解＞と考えることが、大切であり、I 型的既約分解は例外的だ、と理解することが重要である。言い換えれば、中心 ($Z(A)$) の分解を考えたとき、セクターとは、分解された各々の「部分表現」として（広義に）理解することのほうが、非 I 型の世界を基準にした場合は（現実世界は、多くが非 I 型であろうから）、大切である、ということである。

以下の問題は、上記の整理を踏まえて、別途考えなければならない問題である。今後、論文等の形で個別に考えたい。

・ split property からみる＜重ね合わせ＞や＜二重スリット実験＞：split property における III 型因子環と I_∞ 型との関係やエンタングル問題、あるいは全体系と部分系との関係。

・ バリオンの現象論：超選択則とクォーク問題：閉じ込めや色問題。

・ CCR 表現の（数学的）位相の強弱と保存則との関係：超選択則と CCR 関の関係。

・時間生成の問題の続き。

註

- (1) 後で論じるが、I 型因子環の場合には、因子表現が既約表現と同じような意味を持つので問題ないが、非 I 型の場合は、既約表現が連続無限個現れたりする状況があるため、既約表現という使い方は注意を要する。ただ、入門的なテキスト、例えば以下で使う Araki のテキストでは、セクターが I 型のフォン・ノイマン環の観点から書かれており、ここで既約分解としたのは、そのためである。小嶋泉氏の観点、というより、より広く非 I 型の視点からは、「因子分解」とするべきであるが、ここでは、既約分解の問題点を示すという意味で、本文中も既約分解という書き方も用いている。「有限自由度の量子力学から場の量子論へ」というのを墨守したのである。本文の最後でこの点について再度述べる。もう一つここで加えておくと、真空表現において有界線形作用素 $\mathcal{L}(\mathcal{H}) = (\cup \mathcal{M}(0))''$ と大域作用素をとったとき、 $\mathcal{C}\mathcal{I} = (\cup \mathcal{M}(0))'$ となるのが既約表現の意味であり、後述するように真空の一意性と同じになるが、これは I 型フォン・ノイマン環の世界が、実は、無限量子世界の内部の構造を大きく（粗く）とらえてしまうという点にも関係する。このノートでは整理できないが、かつて E. フェルミが提示した RQFT の励起に関するパラドクス (E. Fermi, Quantum Theory of Radiation: in *J. Math Phys* 4, 87-132, 1932) も、ここに起因する。
- (2) これに似ているのは、代数的場の量子論における因子状態（最後に触れる）のクラスター分解性だが ([15] や [17])、真空状態によりヒルベルト空間が離散的に分離される事態であり、そこにあるのは空間的に離れた 2 領域 D_1, D_2 の物理量に対して、真空が積状態つまりクラスター状態になっていることを意味する。したがって、上の真空の直交性とは直接関係がない。空間的に離れている真空表現は、ポアンカレ群の時間方向に関する自己同型写像 $\alpha_{(t, x, 1)}$ について、 $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(Q_1 \alpha_{(t, x, 1)} \psi(Q_2)) = \psi(Q_1) \psi(Q_2)$ と、エンタングル状態から積状態へと漸近的に書ける。
- (3) Haag の書き方によれば、[15: p.144] 全領域を $\mathcal{U}$ として $\mathcal{O}$ を有限領域とすれば、 $\mathcal{R}(\mathcal{U}) = (\cup \mathcal{O} \subset \mathcal{R})''$ と、各領域の真空表現の和の二重可換子環となる。
- (4) III 型の議論になると、真空表現は非同値になるが、これはセクターが何らかの射影

(例えば、空間的領域同士の関係)に比せられというより、空間の体積によるのだろう。この点に関しては、あまり明確に記されていない。これは真空自体が、並進不変ベクトルが真空ベクトルの定数倍であるため、逆に並進不変にならないような時空を考えないためかもしれない。

- (5) ここで I_{∞} 型は、部分系 (局所領域) がそれを包含する領域に含まれるように考える場合に現れる。つまり、フォン・ノイマン環 A が、弱位相で稠密な AF (Approximately finite) C^* 代数を部分代数として含むときである。この場合に A は超有限フォン・ノイマン環とか単射的フォン・ノイマン環、といわれる [7]。
- (6) Doplicher-Haag-Roberts の略。
- (7) 但し、一般に電荷といった場合の電磁気力を担う電荷は (相対論的因果律に対して) 遠距離力だから、ガウスの法則より、当てはまらない。強い力などの局在電荷を一般に指す。
- (8) フォン・ノイマン環 M は非有限で 0 でない射影をもてば、 M は III 型である。
- (9) 表現空間とヒルベルト空間の対応は * 準同型の定義にかかわるが、簡単にいうと表現とは、 C^* 環からあるヒルベルト空間上の有界作用素 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ への * 準同型写像である。
- (10) 既約表現の場合にはユニタリ非同値が意味を持つが、そうでない場合も含めて考える。これについては [2] を参照のこと。
- (11) アハラノフ-ボーム効果などに見られるように、境界条件等の外的条件によっては一意性定理は破れる例外はある。
- (12) この交換関係は、ネーターの定理の無限小変換から導かれる。
- (13) 注意としては、Reeh-Schlieder の定理は破っていない。既約性というのは分解の最小単位を意味しているので、ある最小単位の真空表現においては真空は一意であり、巡回かつ分離的である。非 I 型にも既約表現は (無数に) 存在する。また真空表現と真空ベクトルは別である。ただ、真空表現は、その期待値の取り方を示しているので、真空ベクトルが異なっていると解釈できなくはないのだが、結局、真空に対して何かの観測をしなければ、真空期待値 (観測値) は得られないので、真空ベクトルの非同値性という言い方はしないようである。真空ベクトルはフォック空間では粒子が何もない状態と解釈されるから、それが、場所ごとに異なっているというのは物理的にみておかしく感じる。

また、真空は同じ状態が広がっていると考えすることもできない。この世界には真空以外の世界（励起世界）が至るところにある。それ故、純粋な真空とは一体何か、という謎は残る。ただ、強調しておくが、代数的場の量子論においては、ヒルベルト空間が先に設定される必要はない。観測代数からベクトルが構成される（GNS 構成法）。この際、最低条件として表現の巡回ベクトルとして真空ベクトルが要請されている。真空を観測する手段を考慮に入れなければ、物理学としては意味がないのである。

(14) 小嶋氏は [2] において、因子表現と述べている。混合相の解析の重要性である。

参考文献

- [1] 生西明人、中神祥臣『作用素環入門 1 関数解析とフォン・ノイマン環』、岩波書店、2007 年。
- [2] 小嶋泉『量子場とマイクロ・マクロ双対性』、丸善出版、2013 年。
- [3] 小嶋泉「量子場における秩序変数と large deviation」(『京都大学数理解析研究所講義録 1066』1989 年、所収)
- [4] 坂本眞人『場の量子論 (II) ファインマン・グラフとくりこみを中心にして』、裳華房、2020 年。
- [5] 高橋康『物性研究者のための場の量子論 II』、培風館、1997 年。
- [6] 町田茂『量子論の新段階—問い直されるミクロの構造—』、丸善株式会社、1986 年。
- [7] 松井卓『作用素環と無限量子系 SGC ライブラリー 111』、サイエンス社、2014 年。
- [8] 藤本忠「研究ノート：「超選択則」の覚え書き —基礎—」(龍谷哲学会編『龍谷哲学論集 第 35 号』、2021 年、に所収)。
- [9] H.Araki, *Mathematical Theory of Quantum Fields*, Oxford, 1999.
- [10] H.Baumgärtel, *Operatoralgebraic Methodes in Quantum Field Theory*, Akademie Verlage Press, 1995.
- [11] H.J.Borchers, A Remark on a Theorem of B.Misra, *Commun, Math Phys*, 4, 1967 (315-323).
- [12] D.Buchholz, S.Doplicher, S.Rong, J.E.Roberts, A new look at Goldstone's theorem, *Rev. Math. Phys. Special Issue* 49, 1992.
- [13] K.Fredenhagen, *Superselection Sector*, Notes from Lecture held at Hamburg University in the

Winter Term 94/95.

- [14] Greiner, Neise, Stöcker, *Thermodynamics and Statistical Mechanics*, Springer, 1997.
- [15] R.Haag, *Local Quantum Physics. 2nd edition*, Springer, 1996.
- [16] H.Halvorson (with appendix by M.Müger), *Algebraic Quantum Field Theory: in Handbook of Philosophy of Physics*, North Holland, 2006.
- [17] S.S.Horuzhy, *Introduction to Algebraic Quantum Field Theory*, Kluwer, 1990.