

「超選択則」の覚え書

— 基礎 —

藤 本 忠

概要

物理学における「選択則 selection rule」の発展版（厳密版）とみることもできる「超選択則 superselection rule」については、それが本来語られるべきはずの素粒子論や場の量子論のテキストのなかでも、ほとんど論じられていない。代数的場の量子論においては、セクター理論やそれと関連する作用環（フォン・ノイマン環）の表現論、既約分解の理論との関係で主題化される重要なテーマであるが、議論の出発点をどこにとるかで論述の仕方が異なる。ここでは、代数的場の量子論の理論構成にとって導入的な部分に関して、超選択則をまとめたい。

Keywords：混合状態、純粋状態、直和分解、作用素環、GNS 構成法

1 はじめに

まず2節で、重ね合わせ状態と混合状態に関しての一般的な説明をする。次に3節でヒルベルト空間論の分解定理の観点へ移行する。4節では選択則と保存則の説明から超選択則へ向かう。ここで超選択電荷 superselection charge についても触れる。5節で代数的場の量子論における基本事項とそれに基づく超選択則をユニバレンス超選択則をみることで考える。

なお、超選択則は以下に整理していくように、物理理論、とりわけ場の量子論の根底にある極めて重要な理論という認識を持つ研究者もいる [17]。ここでの整理はまだまったく発展途上で、今後もアップデートしていく必要

がある。体系性を狙って一つの方法論から超選択則を論じる力量は今のところ私にはない。その点をお断りしておく。

2 導入

2.1 よくある説明

あまり初歩的なところから話を進めると本題になかなか入れないので、適宜省略していく。初歩的な話の多くは量子力学の初等的な部分に出ているので、必要な場合、それらを参照されたい。但し、超選択則は基礎的な話ではあるが初歩的な話ではない。

手元にある日本の物理学（場の量子論、素粒子論関係）のテキストで「超選択則」に関して多くのページを割いてまで言及している本を、代数的場の量子論のテキストや観測理論にかかわるテキストを除いて私は知らない。おそらく、大学や大学院の標準的な素粒子論の講義で超選択則が議論されることがない証左だと思われる。それでも手元にある [4]、[6] をみると、大体、以下のような話で済まされている。

量子物理学⁽¹⁾における超選択則の論じられ方は、物理系の状態を指定する状態ベクトル（ヒルベルト空間のベクトル）の線形状態から作られる内積が、それぞれのベクトルが直交状態ではない場合に、内積を形成している項を「干渉項 interference term」として理解して、それを重ね合わせ状態（superposition）とし、そうでない状態を混合状態（mixed state）として定義するところから始まる。

例：二つのベクトルの線形結合のベクトル $\psi = \alpha\psi_1 + \beta\psi_2$ 、 $(\alpha, \beta$ は複素数) として、これ自身の内積を作ると、

$$\begin{aligned}
 (\psi, \psi) &= (\alpha\psi_1 + \beta\psi_2, \alpha\psi_1 + \beta\psi_2) \\
 &= |\alpha|^2(\psi_1, \psi_1) + |\beta|^2(\psi_2, \psi_2) + \alpha^*\beta(\psi_1, \psi_2) + \beta^*\alpha(\psi_2, \psi_1) \\
 &= |\alpha|^2 + |\beta|^2 + \alpha^*\beta(\psi_1, \psi_2) + \beta^*\alpha(\psi_2, \psi_1)
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

ここで、 ψ_1, ψ_2 をともに規格化（ノルムが $1: \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle} = \|\psi\| = 1$ ）しておく。最後の二項が干渉項を引き起こす構造上の基盤となる。

(2.1) において、二つのベクトルが直交していれば、 $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ となり、みやすくなる。ベクトルの関係だけをみていると、重ね合わせはどこにも存在しない。ベクトルの直交化は、グラム＝シュミットの定理によって可能なので、上の内積の計算は、ヒルベルト空間の幾何学的構造として閉じた話となる⁽²⁾

ψ は、観測 A を使って「期待値」をとる操作によって物理的観測と照合する対象となる。期待値とは、ある測定を繰り返し行うときの平均値である。それは、 A を観測量として $(\psi, A\psi)$ という形をとる。これは、ボルンの確率解釈からきている。最も初等的には、 A が（離散的）固有値を持つ場合、 $P(a)$ を確率測度として、

$$\langle A \rangle := (\psi, A\psi) = \sum_a P(a), \sum P(a) = 1 \quad (2.2)$$

とされる。これが連続的固有値（つまり一般のスペクトル）になれば、確率測度の一般化であるスペクトル測度を使う積分となる⁽³⁾。期待値はある物理量を測ったとき、その測定によりどの程度ある値が（実数で）得られるかを示しているから、いわゆる観測結果（物理現象）と密接な関係がある。そこで (2.1) に作用素 A を加えると、

$$\begin{aligned} (\psi, A\psi) &= |\alpha|^2 (\psi_1, A\psi_2) + |\beta|^2 (\psi_1, A\psi_2) + \alpha^* \beta (\psi_1, A\psi_2) + \beta^* \alpha (\psi_2, A\psi_1) \\ &= |\alpha|^2 + |\beta|^2 + \alpha^* \beta (\psi_1, A\psi_2) + \beta^* \alpha (\psi_2, A\psi_1) \end{aligned} \quad (2.3)$$

となり、後ろの二項が干渉項と（量子物理学では）いわれる。もっとも、この解釈は、これだけではかなり問題がある。まず、 A が単位行列（あるいは単位作用素）であれば、どうなるのか。単なるベクトルの内積と同じになるから、そこに重ね合わせがあるといえるのか。 A が射影作用素の場合どうなるのか。つまり A が作用するベクトルに対して、例えば、 $A\psi = \text{Proje}_\phi \psi = (\phi, \psi)\phi$ とすれば、期待値は簡単な計算から、遷移確率振幅 (ψ, ϕ) の絶対の

二乗となり、 $|(\phi, \psi)|^2$ と表記される。これは一般に、 ϕ から ψ への「遷移確率」といわれるが、これは重ね合わせとどのように関係しているのだろうか。単位行列の場合の単なる内積 $\alpha^* \beta(\psi_1, \psi_2) + \beta^* \alpha(\psi_2, \psi_1)$ 部分も、遷移確率をもたらす振幅と理解できるから、重ね合わせと定義してよいだろう。こうした前置きの後、よく使われる例は、 $\psi = \psi_1 + \psi_2$ に対して 1 を陽子 2 を中性子とする場合や 1 を電子 1 個、2 を電子 2 個とする場合は観測されないからあり得ず、干渉項が必ず 0 になり、干渉項がない状態、つまり混合状態（古典的確率）に落ち着くという見解である。混合状態にならない状態は、一般に「純粋状態」とされ、純粋状態は重ね合わせと表裏一体の関係にある。

上の見解は、「ゲージ不変」という概念によるのだが、額面通り受け止めれば、「陽子と中性子の遷移確率が禁止されている」、「電子 1 個と電子 2 個の遷移も禁止されている」、ということが実証されている、という理由からくる。理論的には、ゲージ不変を破っているから観測できないということでもある。具体的にいえば、陽子の状態を準備していきなり（質量は殆ど同じだが）それが途中から中性子に姿を変えるような（途中からというとき時間を考える必要はない。論理的意味。もっとも観測は古典的になされるからニュートン的な意味での時間は経過しているが、ごく短いとしてよい）、半ば陽子で半ば中性子のような状態はないということであり、電子 1 個の状態を用意したら、半ば 2 個の状態となっていることはないということである。半ばといったが、1/3 状態でも 1/4 状態でもあり得ない）。

確かにそれは分かるが、干渉項が消えることは、ヒルベルト空間の理論からはそもそも出てこないのが、干渉項が残る場合もある。この部分を超選択則が問題にするのである。

ちなみに、多くの量子論のテキストは、大体、この程度の説明で終わりである。純粋状態は混合状態と干渉項のあるなしで区別され、混合状態は古典的確率に帰着し、純粋状態は重ね合わせと量子物理学特有の現象を引き起こす、とされる。後者の例としては、二重スリット実験があるが、あの実験も、実は、色々、難しい問題を含んでいる。

なお、よく出てくるパラドクスとしてシュレディンガーの猫、というのが
ある、 ψ_1 を猫が生きている、 ψ_2 を猫が死んでいる、とする例である。放射性物質の入った箱に入れて、それが崩壊したときにハンマーが毒物を入れた瓶を割るが、猫をその箱の中へ入れて、蓋をしたら外からはみえず、放射性物質の崩壊は確率的だから、猫の状態は生きていると死んでいるの重ね合わせである、という。しかし、この例は、これからみていく超選択則によればナンセンスである。ただ、ここでいえるのは、仮に、そういう純粋状態があっても、それはあくまで数学的な確率ベクトルの議論であり、猫の存在と対応させた上で理解できるのか、という哲学的議論に入り込む。例えば、ゲージ不変をどの程度ミニマムにとるかによるが、細胞が常に死に常に生まれ変わる事態を「ゲージ不変」としない程度に微小に考えれば、それは観測されないから、意味のない議論である。

2.2 言葉の問題

言葉の定義の問題であるが、「干渉」ということを、量子物理学では「コヒーレンス coherence」といったりもする。しかし、広義には、いわゆるさまざまな波動の波形がそろそろ（幾何光学など）意味でのことをいうらしく、物理の分野によって注意が必要である。反対が「デコヒーレンス decoherence」である。これも波形の重なり合いが崩れることを意味することがある。もっとも、量子論における状態ベクトル（確率ベクトル）は「波動関数」という実在波と混同される表現がなされる場合も物理学のテキストでは多数みられるから（これはド・ブロイの理論によるところが大きい）、物理学のみの文脈では、ヒルベルト空間のベクトルのコヒーレンスといった時、古典波と同じようなイメージがかき立てられる可能性がある。しかし量子論の干渉とは区別されなければならない。

また、重ね合わせは、常に、ベクトルの純粋状態と一緒に論じられるが、概念としては同じではなく、あるヒルベルト空間におけるベクトルが、混合状態として記述できない場合をいう。

純粋状態の和は純粋状態である。純粋状態を作用素環の理論の中でベクトル状態と一緒にされる場合があるが、これは、[3] が指摘しているように、ベクトル、あるいは表現の既約性をどうみるかという点と関連しているので、あまり意味がある同一視ではないが、伝統的には、ベクトル状態は、あるベクトルが端点になっていることをいうから（これが純粋状態の意味）、異なるベクトル状態が一緒になると、混合状態を形成することになる。このことが、超選択則に対する背景になり得るが、ヒルベルト空間の構造自体から、超選択則がダイレクトに出てくるわけではない。例えば type I のフォン・ノイマン環は、既約表現が、原理的に、一意に決まるので、有限次元の量子物理学では、後でみる「セクター」が一つしかないことになる。

2.3 ベクトルの積状態 product state とエンタングル状態 entangled state

先に、重ね合わせは期待値と関係するから、ベクトルの幾何学的・代数的構造だけをみてもよくわからないということを書いたが、観測量が単位行列である場合も含めれば、ベクトルの構造から重ね合わせについての情報は得られるはずである。それが、いわゆるエンタングルメント状態と、その分解（シュミット分解）である。

一番簡単な例として、量子情報理論に現れる 2-qubit system (2-量子ビット系) を考える。2 ビットといってもここではベクトルの成分が 2 つという意味に理解しておけばよい [8]。

$\psi = (a, b)$, $\phi = (c, d)$ 、で、各々の成分は複素数とし、二つのベクトルのテンソル積を計算する。すると 4 成分のベクトルになる。

$$\psi \otimes \phi = A = \begin{pmatrix} a\phi \\ b\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac \\ ad \\ bc \\ bd \end{pmatrix}, \text{ となり、このようにテンソル積の積状態で書ける場合はエンタングル状態ではない (もつれていない状態) とされる。}$$

$$\text{ところで、}\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}((0 \otimes 0) + (1 \otimes 1)) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

は、 $0 = (1, 0)$, $1 = (1, 0)$ としたとき、4成分からなる単位ベクトルになるが（ノルム 1）、積状態にかけないので、これをエンタングル状態といい、ベクトルが重ね合わされているという。だから、積状態は、混合状態に対応し、そうでない場合、（単位化した状態を）純粋状態とする。

あまり丁寧に解説されていないことが多いが、テンソルというのは、内積と違って、実数のような数を形成する計算ではなく、いわばベクトル（的）な計算であるから、上の場合だと、2成分が4成分のベクトルへ拡張されている。だから（2.1）とどう違うのかという問題に関していうと、テンソル積で成分を増やしていったベクトルは常に混合状態になるともいえるが、それは実は必ずしも正しくない。なぜなら、純粋状態の部分系が混合状態になることもある（正確には全体系が純粋状態での縮約密度行列（作用素）による部分系が混合状態になり得る）[10]。

また新しい自由度を入れて、もつれている状態をある方向に分解することも可能である。これを特異値分解という [10]。この場合、（数学としてみた場合）正確には、あるヒルベルト空間のサイズの中で与えられた状態ベクトルとして純粋状態を考えなければならない。

例えば $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ の真ん中の項は、二つの関数に分離できない。（2.1）でいえば、 ψ と ϕ の内積にあたる。しかし、余剰次元を入れると、

$$f(x_1, x_2) = (1, x_1, x_1^2) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix}, \text{ と分解できる（1次元アップして}$$

いる）。

したがって、ヒルベルト空間のダイレーション理論を考えると、実は、数学としては重ね合わせや混合というのは、系のサイズによる事態だということを理解しておかなければならない。

しかし、物理学では、干渉項が観測される。だからヒルベルト空間を考えているベクトルのサイズと同じとして、何が混合と純粋状態を分けているのかを考えなければならないが、上の二変数関数から示唆されるように、両状態は「基底ベクトル」のあり方に依存する。混合状態は、一つの基底ベクトルで表示できない。そしてこの基底のあり方は、密度行列のサイズと強く関連している。

2.4 密度行列と状態

テンソル積による状態の説明は情報理論でよくなされる。ただ多体系を扱っているので、プリミティブではない。しかしテンソル積表現を混合状態とする説明は、実は、 $\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}((0 \otimes 0) + (1 \otimes 1))$ がどうして混合状態にならないかという説明と、エンタングル状態がかなり多いことをみるのに役立つ。前者に関していえば、特異値分解の応用であるシュミット分解によって、エンタングル状態が一つの基底で表せないことがわかる（シュミット数が2以上だと、エンタングルしている）。また、純粋状態どうしの和が純粋状態なのは、同じ基底であるからであるが、混合状態は同じ基底では表現できない。混合状態は二つの基底の和の次元を持つが、2つのベクトルどうしの掛け算で形成されるヒルベルト空間の次元は和の次元より大きいので、テンソル積状態は、実はヒルベルト空間（ベクトル空間）の一部しか占めていないことになる。

先にみたシュレディンガーの猫のパラドクスだが、猫の生死状態は、生と死を直交状態にとれば（混合状態）、最初から、どう考えても、用意できない状態である。パラドクスになるのは、同じ基底において二つのベクトルが違う状態を表示していることによる。ただし、これも、上で触れたが、純粋と混合は系のサイズと関連しているので、いわゆる全体系に対する観測問題において、猫の生死を常に純粋状態にしておく理由はないだろう。

結局、純粋状態は、ヒルベルト空間論に準拠すると、密度作用素 $\Sigma \rho = 1$ の特別な場合に相当し、あるヒルベルト空間のサイズの最小の射影作用素がそ

の密度作用素になっている場合となる。ここまで位相の問題を考えたくない
ので、ヒルベルト空間といっても、もっぱら有限次元に限定しているが、空間次元を d とすれば、分解表示を、 $\rho = \sum_k p_k$ 、(但し、 $0 \leq p_k \leq 1, \sum_k p_k = 1$) としたとき、

$$\langle A \rangle = \text{tr}(\rho A) = \sum_i p_k (\psi_i, A \psi_i) = \sum_k \sum_i p_k (e_i, \psi_k) (\psi_k, A e_i) \quad (2.4)$$

と表現できる一般の期待値 (混合状態) のうち ⁽⁴⁾、純粋状態は、この k のベクトルの和の中の一つの成分を x_1 としたとき、

$$\langle A \rangle = \text{tr}(\rho A) = \sum_i (e_i, \psi_1) (\psi_1, A e_i) = (\psi_1, A \psi_1) \quad (2.5)$$

となる状態である。つまり混合状態のミニマムな状態 (端点) である ⁽⁵⁾。
この場合、密度行列が基底への射影になっている ⁽⁶⁾。

結局、(2.1) で計算した二項からなるベクトルはその基底が同じ純粋状態であるのだが、 ψ_1 と ψ_2 がある比率の混合状態 (2:3 など) であって基底が異なる、という但し書きはないが、混合状態は基底をどう変換しても同じにならない。だから、 ψ_1 と ψ_2 が直交関係にあると、重ね合わせは生じない (これが、超選択則セクターの意味を形成する)。

この辺りのことは、あまり数学テキストには出ていない。重ね合わせは、グラム=シュミットの直交化によって基底が離散的に分離できないベクトルに対して生じる。だから、陽子と中性子の重ね合わせが生じないとか、生きた猫と死んだ猫の重ね合わせが馬鹿げている、と論じる場合は、実在論という哲学談議に向かう前に、本当は、基底変換がどうなっているか、その基底は何を表現しているかを示さないと意味がない。同じことだが、あるベクトルを直交状態に分ける射影が存在するかないか、存在しないなら、その意味は何かを議論しないと、ヒルベルト空間のベクトルだけをみても何もわからないのである。

例として、二成分からなるベクトル $\psi = (1, 0)'$ と $\phi = (1, 0)'$ を正規直行基底にとる。いくつか場合分けが出来る。

1) ψ と ϕ が等混合状態の場合。 ψ, ϕ はそれぞれ別の基底で問題ないから、密度行列は、ディラックの記法を使って、

$$\rho = \frac{1}{2} |\psi\rangle\langle\psi| + \frac{1}{2} |\phi\rangle\langle\phi| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} I_2$$

2) ψ と ϕ が純粋状態の場合。基底は共通していなければならないので、 ψ, ϕ によって張られるベクトルを Ψ とすれば、 $\Psi = \frac{\psi+\phi}{\sqrt{2}}$ となり、密度行列は、

$$\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2') もし、2) の純粋状態と別の純粋状態を作りたい場合は、それを Φ とすれば、 $\Phi = \frac{\psi-\phi}{\sqrt{2}}$ となり、密度行列は、 $\rho = |\Phi\rangle\langle\Phi| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる。

3) 2) と 2') で作ったベクトルを 1) のように等混合（等しい混合でなくとも構わない）で混合すれば、新しい混合状態ができる。

4) 2) と 2') を 2) のようにして $\Pi = \frac{\Psi+\Phi}{\sqrt{2}}$ とすれば、純粋状態ができる。

このように、基底のとり方が、混合状態と純粋状態を決めている。基底が同じということは、数学の立場からみると、線形代数から明らなように、それに載っている成分が一斉に変換されることを意味する（作用素論では、その作用素が同時に変換を受ける）。混合状態では、基底ごと別々であるから、(2.1) でいえば、 ψ の部分と ϕ の部分は、基底において連動しない。

$(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$ という計算は、 $(a+b)e_1$ というように、ベクトルの基底を中心にとみると、同じ基底上で成分計算をしているのであり、仮に二つの直行基底を持つ $ae_1 + be_2$ を二乗すると考えると、 $2ab$ は残らない（直交してしまうから 0）。

シュレディンガーの猫を論じる際には、物理現象として、同じ基底上で生きていてかつ死んでいる「猫ベクトル」が最初から用意されていなければならない。生きていて、死んでいるとはどういう事態か、という深遠な(?) 哲学的な定義は脇に置いておいて、普段の現象でそのような状態は用意されない。そういう猫は私はみたこともない（瀕死の猫は見たことがあるが、ま

だ生きていた)。それゆえ、シュレディンガーの猫のパラドクスは、ある意味不毛である。かりに、今、地球の裏側にいる猫がどういう状態かを頭の中で想像したとしよう（観測するという意味での想像）。しかし、その確率は、あくまで混合確率であり、生きているか、死んでいるか、である。だから、用意されるべき状態は、純粋状態ではない。この点は、観測の問題に関連してまた考える。同じ基底上にもし生と死があれば、例えば、上の展開式の例でいえば、生と死が一次独立ではないので、生を定数倍すれば（延ばしても縮小しても）、途中で死になる。その長さを決めるのは何か。それが分からなければ意味がないのである。しかし、量子物理学のミクロな対象には、純粋状態はあり得る。生と死といった直交する（背反する）概念が量子の世界を支配してしているのではないからである。一つの例がコペンハーゲン解釈の中で引き合いに出されるミクロな対象の「波動かつ粒子」描像である。この日常言語の表現は、誤解をまねくおそれがある。波動描像と粒子描像は、量子論においては直交しないのであるが、それを「かつ」と表現した場合、古典力学的表現に還元してしまう可能性を孕む。むしろミクロな対象は、粒子と波動の性質を共にもつ、と表現するべきだろう。

二重スリットの実験に関しては、また、いずれ触れる。

3 直交空間による説明

前の節で分けた 1) ～ 4) を考慮すると、状態が存在しているヒルベルト空間が分類される。これを系統だって論じたのが [9]、[11] にある。

ここでの議論は、数学においては、ヒルベルト空間の直和分解に関係する。直和分解は、それが離散的な場合と、積分によって表現される（連続的な分解も含めた）直積分分解に分かれるが、後で考える選択則セクターが連続的な場合というのは、物理としてみると色々と難しい側面があるため、さしあたり、離散的な分解が中心になる。

ヒルベルト空間の直和分解とは [1]、あるヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ を互いに直

交する閉部分空間 $\mathcal{H}_n$, $n \in N$ (N は自然数) に分解することである。

これは一般に、以下のように表示される。

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n=1}^N \mathcal{H}_n \quad (3.1)$$

直積分では、測度論の条件を付けなければならない⁽⁷⁾。

さて、(3.1) は数学の議論だが、ここで、直和分解の意味を再度確認する。それは、各閉部分空間に属するベクトルが互いに直交しているという点である。これは、前節でみたように、勝手なベクトルを、異なる閉部分空間から取ってきて内積を計算すれば 0 になることを意味している。この直交分解は超選択則の重要な背景である。

ボゴリユーボフの邦訳のテキスト [9] は英文で後で出版されたテキスト [13] に比べてかなりコンパクトになっているが、その中で議論されているのは、超選択則（混合状態）が働くような量子系の状態のヒルベルト空間が、超選択則の働かない閉部分空間（重ね合わせ：純粋状態）の直和として定式化される、ということである。ヒルベルト空間を直和に分解した場合、各閉部分空間がコヒーレント空間とよばれ、その各コヒーレント空間は純粋状態の同値類が所属し、異なる部分空間どうしは、重ね合わせ（コヒーレント）が生じないのである。邦訳テキストでは、詳細はあまり論じられていないが、さしあたり、各部分空間を分けるメルクマールとして、射影作用素が定義されている。

A が $\mathcal{H}$ の任意の閉部分空間 $\mathcal{H}_\alpha$ を不変にする場合（反対に言えば、ある $\mathcal{H}_\alpha$ が A の（自明でない）不変部分空間である場合、 A は「観測量」（ある $\mathcal{H}_\alpha$ における）である。 α は無限個でも構わない ($\alpha \in N$)。

したがって、 $\mathcal{H}$ の元各 Ψ_α への射影作用素を P_α とし、その和を $P = \sum_\alpha x_\alpha P_\alpha$ （ここで x は実数なら P 自身も観測量になり得るが、複素数でもよい）とする。この P が全体のヒルベルト空間を、コヒーレント部分空間に分ける。そして、それにあわせて、 A も $A = \sum_\alpha P_\alpha A P_\alpha$ と自己共役作用素の対角和に分解される。当然、 $[A, P] = 0$ であり、各部分空間上でも同じ交換関係が成立

する。

さらに付加すると、この直和分解は、コヒーレント部分空間、つまり純粋状態への分解であるから、各 A_a と交換関係にある作用素は、単位作用素の定数倍である。これは空間が既約分解されたことを意味し、当該の観測量がフォン・ノイマン環 I 型である場合は、 A の既約分解が一意であることを意味する⁽⁸⁾。したがって、[14] にあるように、I 型の場合は、既約表現（コヒーレント部分空間）が全体になる（全て同じになる）ので、重ね合わせは I 型のフォン・ノイマン環が主たる役割を担うのである（例えば、II 型や III 型が重ね合わせに出てこないのは、作用環における直積分分解理論から導かれる既約分解の非一意性及び射影作用素の性質による）。

上で述べた射影作用素が、ヒルベルト空間を直和に分ける役割を果たすが、これが物理的にみられたときに、超選択則電荷の役割を担うことになる。各閉部分空間どうしのベクトルは重ね合わせが生じない。つまり、古典的な確率を用意する。それは観測量の性質も規定する。

4 選択則から超選択則へ（保存則に関する説明）

超選択則の定式化の前に、物理的意味をみていく。超選択則は「超」がついているのだが、それは、「選択則」という物理の規則のさらに（数学的）一般化（見方によっては特殊化ともいえる）である。物理学のテキストにこの選択則を記述しているものは少なく、[5] にわずかな記述がある程度だ。

色々な定式化があるようだが、一般には、保存量の存在と関係している。エネルギーを表示するハミルトニアンといった保存量の存在は、系の時間発展（時間シフト）に対して強い制限を与える。この制限が「選択則」とよばれる。例えば、素粒子の散乱や崩壊の前後で空間反転不変性（パリティ不変性）を破るようなプロセスが起きない時、選択則が働いているといわれる。あるいは、原子が一つの光子を放出したときに、原子の角運動量が 0 か ± 1 に限られ、 ± 2 になるような遷移はないというのも選択則が働く例である。

これは、ある物理量を X としたとき、時間発展においても X の値が変わらないことを意味するから、数学的な厳密性を無視して書けば、ハミルトニアンを H として、 $HXHX^*=X$ 、あるいは $[X, H]=0$ として保存量 X が書けることを意味する⁽⁹⁾。

超選択則は、[7] によれば、この X の値が「観測可能ないかなる操作によっても変化しない」規則として定式化されている。つまり、上のハミルトニアンを一般化し (C とする)、それを超選択電荷 *superselection charge* とみて、 C がすべての測定可能量 X と可換なことを要求する ($[C, X]=0$)。この場合、 X は自己共役作用素でなければならない。また C も自己共役である場合が多い (先の直和分解の議論でわかる通り、射影作用素は自己共役である)。「ある物理量が測定可能であるくならば」その物理量は超選択則を満たしている」ということになる。[7] によれば、超選択則が働くことは、ある自己共役作用素が測定可能物理量になるための〈必要条件〉として定式化される。十分条件は不明らしいが、対偶をとれば、 $[X, C] \neq 0$ ならば、 X は測定可能な物理量にならない (自己共役であっても)、ということになる。

それゆえ、数学的観点からみると、あらゆる自己共役作用素の中から測定可能な観測量を選択する役目も超選択則は果たしている。

上の超選択電荷にはいくつかの種類があり、それによって超選択則の種類も分かれる [17]。

そして、ある種類の超選択電荷によって量子場の空間を記述しているヒルベルト空間 (あるいはフォック空間) を直和に分解して (混合状態)、その分解された部分空間 (純粋状態) をセクター *sector* として取り扱い、真空やそこからの励起状態を扱うのが代数的場の量子論におけるセクター理論である。

ここまでの準備でようやく、代数的場の量子論への準備が半ば整った。

5 代数的場の量子論

代数的場の量子論は、その思想として、(局所的) 観測量を第一に考え、ヒルベルト空間におけるベクトルを観測量の表現において導出する。したがって、観測問題を考える上で大変重要な方法である上、観測可能量は、上でみたように「超選択則」と深い関係があるため、自ずと超選択則が重要な理論となる。ここでは、作用素環のクラスのうち、フォン・ノイマン環を中心に整理する。文献として [11], [12], [15], [16], [17] が古典であり、重要である。

5.1 作用素の表現

物理量 A の表現作用素 $\pi(A)$ は、一般にフォン・ノイマン環を含む C^* 環からの $*$ 準同型として定義される。より正確には、 A を C^* 環、 $\mathcal{H}$ をヒルベルト空間として、 A から有界作用素 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ への $*$ 準同型として定義される。この表現に基づいて、正線形汎関数である「状態 ψ 」⁽¹⁰⁾ が定義される。

状態に関して最も基本的なのは、GNS 構成法である。これは「状態は適当な表現のベクトル状態 (純粋状態) である」という定理である。

— 定理 2.1 —

C^* 環 A の任意の状態 ψ に対して、ヒルベルト空間 $\mathcal{H}_\psi$ と、そのヒルベルト空間上の A 上の表現 π_ψ 、および $\mathcal{H}_\psi$ の単位ベクトル $\Omega\psi$ が存在して、次をみたす。

(1) 任意の $A \in A$ に対して、 $\psi(A) = (\Omega\psi, \pi_\psi(A) \Omega\psi)$

(2) $\Omega\psi$ は π_ψ の巡回ベクトルである、

すなわち $\pi_\psi(A) := \{\pi_\psi(A)\psi | A \in A\}$ は $\mathcal{H}_\psi$ の中で稠密。

この二つをみたす時、 $(\mathcal{H}_\psi, \pi_\psi, \psi)$ はユニタリ同値類として一意である。

代数的場の量子論では、ヒルベルト空間の重ね合わせそのものを考える代わりに、この状態を使って議論がなされる。GNS 構成法は、ヒルベルト空

間の一般のベクトルがみえにくいですが、実は、表現（と単位ベクトル）の中に一般のベクトルの構成が隠れているだけで、決して突飛な計算ではない。

5.2 もっとも基本的な説明（Araki のテキストから）：ユニバレンス超選択則

荒木不二洋先生による代数的場の量子論の有名なテキスト [11] では、超選択則は歴史的にもよく知られたユニバレンス超選択則として最初に取り上げられている。このユニバレンスは 1 価表現による選択則ともいわれる。これは、Wick, Wightman, Wigner が提唱した超選択則である。[13] に解説があるが、スピノル場と関係する表現論に基づく。

簡単に記すと、ポアンカレ群のあるクラス $^{(11)} \mathcal{P}_+^\uparrow$ のユニタリ表現の普遍被覆群 $\tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ のユニタリ表現 $(a, A) \in \tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow \rightarrow U(a, A)$ が $^{(12)}$ 、常に $U(a, -I) = uU(a, I)$ を与えることからくる $^{(13)}$ 。 u が 1 価 ($u=I$) と 2 価 ($u=\pm I$) の場合が出てくる。ポアンカレ群の 2 価表現に対応するスピノル場は観測できないことを示すが、それは、超選択則により、二つの異なる部分空間は変換できないからである。もっともそれらがユニタリ同値なら可能だが、2 価表現は、一方から他方への変換が、 I と $-I$ という異なる目印であるユニバレンスにより離散的に分離されているから、相互に同値にはならない。つまり、2 価表現のスピノル場が観測可能ではないのである。しかし、1 価の場合は、それぞれの部分空間にヒルベルト空間が分離される。そこで、各々のユニバレンス u に応じて、表現空間が定まる $^{(14)}$ 。

ここに超選択則の基本的思想がある。超選択則は、上のスピノル場、ディラック場といったフェルミ統計に従う場は、直接的に観測可能量にならないことを裏付ける。 u を電荷とみなすと、異なるコヒーレント部分空間を結ぶ変換を生じるような場（状態）は、観測不可能なのである。したがって、すべての自己共役作用素、あるいは自己共役表現が観測可能量になるとは限らないということがここからも分かる。電子のようにスピンの半奇数 (n を整数として、 $n+1/2$ で表記される数。電子は $1/2$) は 2 価表現であるから、観測不可能なのである。

先のユニタリ表現に戻ると、 $U(a, -I) = uU(a, I)$ で、 $u = \pm I$ となり⁽¹⁵⁾、 $U(a, -I)$ が 2 価表現を与える。荒木のテキストにあることを、以下、換骨奪胎して述べる。

$U(a, I) = e^{-iPa}$ という並進に対して、 $u^2 = I$ となる。 $A \in SU(2, C)$ から、 u は 360 度回転で元に戻らず、 4π 回転で元に戻る⁽¹⁶⁾。360 度戻った状態（回転）で物理量や状態は変わらない。表現は $u = \pm 1$ の場合、 $\pm U(a, A)$ となり、 $\pi(A) = \Lambda$ 、(Λ はローレンツ変換を示す) となる。

そこで、問題は 2 価表現の場合にいわゆる「重ね合わせ」状態が実現していないことが示されればよいことになる。というのも、二つの異なる値をとる u が同じ部分空間に属していれば、重ね合わせが効くからである。しかし、そうはなっておらず、混合状態になっているのである。

物理量 A の表現 $\pi(A)$ と u は明らかに可換だから、 $u\Psi_1 = \Psi_1$, $u\Psi_2 = -\Psi_2$ と単位ベクトルをとったときに、二つの (GNS) 表現 $\omega_1(A) = (\Psi_1, \pi(A)\Psi_1)$ 、 $\omega_2(A) = (\Psi_2, \pi(A)\Psi_2)$ が、別の部分空間に属することを意味する。

したがって、 $\Psi = \alpha\Psi_1 + \beta\Psi_2$ 、($0 < |\alpha|, |\beta| < 1$, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$) なるベクトルをとったとき、 u が射影となり、二つのベクトルを分離する。その結果、 $\omega(A) = (\Psi, \pi(A)\Psi)$ は、 $\omega = |\alpha|^2\omega_1 + |\beta|^2\omega_2$ という混合状態になる。このとき、物理量の表現 $\pi(A)$ と可換な目印 (u) が一般に超選択則（電荷）といわれ、ヒルベルト空間を直和分解して、そのコヒーレント部分空間（同値類の空間）に仕分ける役割を果たす。

定理 2.2

2 つの状態 ω_1, ω_2 が重ね合わせ不可能であるためには、それぞれに付随する GNS 表現 $\pi_{\omega_1}, \pi_{\omega_2}$ を結ぶ（がユニタリ写像を含む）intertwining map^a が 0 しかない場合（これは素とか無縁表現といわれる：disjointness）と同値である。

^a 既約表現の場合にはユニタリ非同値が意味を持つが、そうでない場合も含めて考える。これについては [3] を参照のこと。

逆に、二つの表現が素でなければ、直交する射影が表現に付随しないので、異なる部分空間に分離されない。

ある表現 $\pi(A)$ が既約表現であれば、その可換環は複素数の定数倍しかないので、 $[u, \pi(A)] = 0$ をみたす u は $CI = \pi(A)'$ となり、重ね合わせ（コヒーレント）を表現する。先に挙げたポアンカレ群の 1 価表現 $U(a, I)$ の方は、だから、超選択則（電荷）は $u = I$ ということになる。

5.3 注：重ね合わせの物理的考察

ところで、このユニバレンス超選択則 I の物理的状態が真空状態で実現されるかという、話はそう簡単ではないようだ。場の量子論の物理としての一般論ではヒルベルト空間論や表現論が表に出てこないだけだが、真空からの励起というのは、生成作用素で可能なのだが、そもそも真空状態と励起状態は異なる。上の例でも、真空状態の表現空間にスピン $1/2$ の粒子をみつけることはできない。これは真空と励起状態が異なるからである（スピノール場の 2 価問題とはやや異なる⁽¹⁷⁾）。

散乱問題では、漸近場によって散乱が記述されるが、そもそも真空ベクトルに対して生成・消滅作用素を使って励起状態を作る過程の中で、真空状態 ω を表す GNS 表現空間 $\mathcal{H}_\omega$ とスピン 0、質量 m の相対論的 1 粒子状態の表現空間は別であり、真空状態と、1 粒子が散乱過程で運動をしている状態（力の場の下での運動状態） $\mathcal{H}$ と漸近場で自由（直線）運動している空間 $\mathcal{H}_0$ は分けられなければならない。しかし、Haag-Ruelle の散乱公式といわれる理論では、まず散乱作用素で、 $\mathcal{H} \sim \mathcal{H}_0$ なる同一視が行われ⁽¹⁸⁾、スピンと質量が同じクラスにある⁽¹⁹⁾ 粒子の重ね合わせが認められる。

その上でさらに、粒子の漸近挙動が $\mathcal{H}$ から $\mathcal{H}_\omega$ のなかへのユニタリ写像として構成されるのである。だから、この散乱理論においては、真空状態の部分空間として粒子のある状態空間が前提され、例えば 1 粒子状態と真空状態が重ね合わせ可能とされている。但し、ここで注意が必要だ。数学的には出てこないのだが、すべての粒子が真空と重ね合わせ可能ではない。真空とボゾ

ン（例：光子）は可能だが、フェルミ粒子である電子と真空は不可能である。だから、Haag-Ruelle の散乱公式で超選択則が前面に出てこないのは、さしあたり重ね合わせが可能な粒子像に限定されているからである。

そこでこれから記述する「セクター理論」は重ね合わせができる場合を特別な場合として含み、真空と素な表現空間やそれ以外の互いに素な空間の関係を、まずは真空のセクターから順番に整理してその関係を理解しようとする。物理的観点からみると、セクター理論は、物理的現象の根底にある世界の類別であり、実は自然世界は極めて多様な様相によって形作られていることを我々に示してくれる。もっとも、こういう見方は、自然の一元論が最高の目標であるような現代物理学からみると、実は逆行しているようにもみえるが、少なくともセクター理論において重要な役割を担うフォン・ノイマン環の typeIII 理論からみれば、一元論が果たしていかなる意味で「意義」があるのかも哲学的に考察できるだろう。

最後にシュレディンガーの猫に関して超選択則の観点から解釈する。観測という作業はマクロ的（古典物理的）作業である。その場合、混合状態における古典確率が観測の場面では機能する。猫が生きているか死んでいるかを同時に可能とする重ね合わせ状態が用意できるとすると、ユニバレンス超選択則を応用するなら、既約状態の代数が用意され、それが真空状態と重ね合わせ可能かどうか、あるいは超選択電荷 $u = CI$ が何を意味しているかを考察しなければならない。重ね合わせ状態は放射性物質のレベルであり、猫はマクロな対象だという反論もありそうだが、だとしたらラジウムなどのミクロな放射性元素と猫の間の差異をどこで測るのかを指定しなければ意味がない。仮に、猫も量子的対象だというならば、 $\langle \text{生きた猫のベクトル} \rangle + \langle \text{死んだ猫のベクトル} \rangle$ は有限粒子状態に準じて考えらるべきだ。だとするなら、typeI のフォン・ノイマン環の因子環理論で十分だから、それはこの猫を測る物理量表現がミクロ系で閉じていることを意味する。なぜなら、古典世界（観測現場）は重ね合わせ状態が消える混合状態の世界だからだ [3]。ゆえにいずれにしても、シュレディンガーの猫のパラドクスは不毛な仮象問題

となる。

今回はここまでとする。機会があれば、さらに次のような問題を整理する予定である。

- ・超選択則電荷とセクター
 - ・積状態における純粋状態
 - ・二重スリット問題
 - ・分裂包括 split property
 - ・時間の問題
- など。

註

- (1) 量子物理学は有限自由度の量子物理学（一般に「量子力学」と呼ばれる）と無限自由度の量子物理学（「場の量子論」）に分けられる。
- (2) 代数的量子力学の場合、GNS 構成法により、作用素（表現）あるいは観測量（厳密には観測量は作用素すべてではなくその中の一部のクラスである。それが一般にエルミート作用素であり、無限次元の対象を相手にするときは自己共役作用素である）を先に考えて一般のベクトルを後で構成することがある。「後」で、といっても、単位ベクトルを巡回ベクトルにとり、代数上の正線形汎関数を考えるわけだから、論理的に完全に「後」というわけではない。しかし、ヒルベルト空間のベクトルの線形結合を最初設定し、作用素あるいは観測量をその後で考慮に入れるというやり方は代数的場の量子論ではとらない。
- (3) 但し、ヒルベルト空間が無限次元になれば、 A が自己共役とそれに準じる作用素でなければ、スペクトル測度は対応せず、対称作用素の場合には、スペクトル測度から一部の条件を緩めた正值作用素測度になる。
- (4) 第三式に関しては、トレースに関して収束する（無限次元の場合はトレースノルムに関して）級数である $\sum_k p_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k| = \sum_k (\psi_k) \psi_k$ というディラック表示、あるいはシャッテン形式で計算している。トレースはそもそも、直交基底で作用素をはさんだ内積和だからである。

- (5) $p_1=1$ であり、ディラック表記では $\rho=|\psi_1\rangle\langle\psi_1|$ となる。
- (6) 密度作用素には作用素論として、いくつか定義、定理があるが、ここでは論じない。
- (7) 例えば、 $L^2(\Omega, d\mu, \mathcal{H}) = \mathcal{H} = \int_{\Omega}^{\oplus} \mathcal{H}_{\omega} d\mu(\omega)$ 、 Ω は実数の集合で、各 $\omega \in \Omega$ に対して $\psi(\omega)$ は $\mathcal{H}$ のベクトル値関数とする。積分内の $\mathcal{H}_{\omega}$ がファイバーとみなされる [2]。
- (8) 代数的場の量子論におけるセクター sector 理論の立場からみると、セクターが一つしかないことと同じになる。有限自由度の量子物理学は I 型で記述されるので、セクターは一つである [3]。
- (9) H^* は共役を、 $[A, B] = AB - BA$ は CCR (正準交換関係) を表す。
- (10) この辺りに関しては省略する。適宜 [11]、[15] など参照のこと。
- (11) 制限非斉次ローレンツ群ともいわれる。
- (12) ここで a は並進を示す R^4 (4 次元実数) の元であり、 A はローレンツ変換で、 $SU(2, C)$ の元 (C は複素数)。
- (13) I は単位行列
- (14) u は具体的に書けば、例えば z 方向での角運動量 L_z として、360 度回転を与える $u = e^{2\pi i L_z / \hbar}$ とできる。
- (15) この式は、ユニタリ作用素と反ユニタリ作用素の議論、および物理的にはそれに付随するポアンカレ群における時間反転や空間反転の関係から導出される。
- (16) 局所的には $SO(3)$ と同型。
- (17) スピノール場 ψ でも $u^* \psi u = 1$, $u^* \psi^* u = -\psi^*$ となる 360 度回転の 2 価表現は観測不可であるが、1 価である $\psi^* \psi$ などは観測可能となる。しかしこの $\psi^* \psi$ はフェルミ場が 2 個の積であり、奇数個ではない。1 個のフェルミ場あるいは奇数個のフェルミ場の積は半奇数になるので観測できないと思われる (?) : PS : ここは現在、私にはよくわからない。
- (18) 数学的には散乱作用素を構成する波動作用素の完全性問題、散乱作用素のユニタリ問題である。
- (19) これがポアンカレ群の被覆表現に基づく既約表現への分類。

参考文献

- [1] 新井朝雄『ヒルベルト空間と量子力学（改訂増補版）』、共立出版、2014 年。
- [2] 生西明人、中神祥臣『作用素環入門 関数解析とフォン・ノイマン環』、岩波書店、2007 年。
- [3] 小嶋泉『量子場とマイクロ・マクロ双対性』、丸善出版、2003 年。
- [4] 亀淵迪、表實『量子力学特論』、朝倉書店、2003 年。
- [5] 坂本真人『場の量子論 不変性と自由場を中心にして』、裳華房、2014 年。
- [6] 清水明、『新版 量子力学の基礎 そのやさしい理解のために』、サイエンス社、2003 年。
- [7] 谷村省吾「測定理論から見た超選択則」（『素粒子論研究』 vol.14（2013）No.5）。
- [8] 中原幹夫、『量子力学のための線形代数—ベクトルから量子情報へ—』、培風館、2016 年。
- [9] ボゴリユーボフ（江沢洋、亀井理、関根克彦・訳）『場の量子論の数学的方法（新装版）』、東京図書、1987 年。
- [10] 松枝宏明『量子系のエンタングルメントと幾何学-ホログラフィ原理に基づく異分野横断の数理-』、森北出版株式会社、2016 年。
- [11] H.Araki, *Mathematical Theory of Quantum Fields*, Oxford, 1999.
- [12] H.Baumgärtel, M.Wollenberg, *Causal Nets of Operator Algebras*, Akademik Press, 1992.
- [13] N.N.Bogolubov, A.A.Logunov, A.I.Oksak, I.T.Todorov, *General Principles of Quantum Field Theory*, Kluwer, 1990 (original:1987).
- [14] G B. Folland, *A Course in Abstract Harmonic Analysis 2nd edition*, CRC Press, 2016.
- [15] R.Haag, *Local Quantum Physics. 2nd edition*, Springer, 1996.
- [16] D.Kastler (editor), *The Algebraic Theory of Superselection Sectors. Introduction and Recent Results*, World Scientific, 1989.
- [17] S.S.Horuzhy, *Introduction to Algebraic Quantum Field Theory*, Kluwer, 1990.