

〈論文〉

寡占市場における販売競争の マルチリーダー・フォロワーゲーム

中 川 義 行
山 下 章 夫

キーワード

プロモーション支出, マルチリーダーフォロワーゲーム, グラフ理論, ナッシュ均衡, 鼎占

1 はじめに

本稿は寡占市場における企業間の販売競争を考察したものである。Mills [6] は、寡占市場における販売競争モデルを提示している。また浅井 [1] は、このモデルに基づいて複占市場を分析している。Mills のモデルでは、企業によるプロモーション支出が市場の規模を拡大するケースが分析されている。そして、Cournot-Nash 競争の均衡解を導くアルゴリズムが提示されている。

寡占市場における企業間の競争形態としては、相手の反応関数を所与として競争する Cournot-Nash 競争や先導者と追随者が存在する Stackelberg 競争の形態が存在する。最近では、Hu and Fukushima [2] や Julien [5] において Stackelberg 競争のゲーム理論のなかで、先導者および追随者がそれぞれ複数存在する場合の理論が展開されている。これらの理論は、一般にマルチリーダーフォロワーゲーム理論と呼ばれている。経済学の分野では、D. Sherali [7] は、Stackelberg 競争モデルの一般化として、先導者が M 人と追随者が N 人の静学的市場モデルを構築し、その均衡解の存在を示している。また、中川・山下 [3] では、漁業資源の獲得競争に関する動学ゲーム理論の枠組みの中で、3 人ゲームにおいて先導者数が 2 のマルチリーダーフォロワーゲームのモデルを考察し、そのモデルの均衡解の存在条件、先手有利性、後手有利性の条件を導いている。

本稿の目的は、これらの先行研究に基づいて、寡占市場における企業間の販売競争のモデルを分類および構築して、そのモデルの均衡解の存在条件を考察することである。この分類では、市場構造における情報の非対称性を無向辺と有向辺で表現し、それらが混在する完全グラフのグラフ理論的な分類問題に帰着させる。マルチリーダーフォロワーゲームでは、先導者のグループに属するプレイヤー¹⁾と追随者のグループに属するプレイヤー間では Stackelberg 競争が行われる。また先導者のグループに属するすべてのプレイヤーは、追随者のグループに属するすべてのプレイヤーの反応関数を知っているものと仮定される。そしてグループ内のプレイヤー間では Cournot-Nash 競争が行われる。

本稿の構成は以下のとおりである。第 2 節では、Mills [6] の手法にしたがって、販売競争のモデルを構築し、市場構造をグラフ理論的に分類する。第 3 節では、市場における企業数が n の Cournot-

1) 本稿では、プレイヤーと企業は同義な用語として扱う。

Nash 販売競争の均衡解の存在条件を考察する。第4節では、先導企業数が $n-1$ 、追随企業数が1のマルチリーダーフォロワーゲーム販売競争の均衡解の存在条件を考察する。第5節では、先導企業数が1、追随企業数が $n-1$ のマルチリーダーフォロワーゲーム販売競争の均衡解の存在条件を考察する。第6節では、鼎占市場、すなわち企業数 $n=3$ の市場構造をすべて分類することで、第3節から第5節までに属さない市場構造を述べる。その中で、先導企業数が1、追随企業数が1のグループと、それらから独立した企業数が1からなる局所的 Stackelberg 販売競争の均衡解の存在条件を考察する。第7節では、最後にまとめと残された課題を述べる。

補記

本稿は、龍谷大学経営学会の研究部会「社会科学の研究や教育での Maxima の活用」における、2018 年から 2019 年において議論を重ねた共同研究の成果である。本稿の執筆は、共同研究者がそれぞれ執筆したものを持ち寄って合わせたものではなく、問題の企画や理論の展開、結果の考察まですべて議論して打ち合わせた上で、統一的に記したものである。よって、資料の選別作業や計算の実験作業、数学的に精緻化する作業や文体を統一する作業、電子化のための入力作業や文章の校正作業など、理論と直接関係のない作成工程については時間短縮のために分担したが、理論的な内容や構成そのものについては、両者の担当は不可分となる。

この共同研究は、数式処理システム Maxima をキーとして、学問分野を異にする学際的研究の形をとっており、これまで

中川義行, 山下章夫: Maxima による Nash 均衡の計算, 龍谷大学経営学論集, 第46巻第2号, (2006)

をはじめとして、13年にわたって Maxima を活用した研究成果を継続して発表してきた。本稿においては、特に最適条件を導出する過程において、その解の特性を分析するための式変形が煩雑であるため Maxima の数式整理機能を活用した。

統合的な数式処理システムとしては、高機能な *Mathematica* や *Maple* が有名であるが、研究や教育においては導入コストや維持コストの問題や、詳細にわたる検証可能性の問題で、Linux や MacOS, iOS (iPhone) 上で SageMath およびその構成ソフトウェア群を利用する方法も主要な一角を成している。その SageMath を MS Windows で稼働させるには、VMware や VirtualBox などの仮想マシン上で Linux を動かさなければならないので、学際的研究において MS Windows ユーザが多いと敷居が高くなってしまふ。だが、そのうち数式処理を担当する Maxima は、処理の中核部分が LISP で記述されているため、MS Windows や MacOSX には wxWidgets や Tcl/Tk などブラウジング部分が作られたアプリケーション版もあり、共同研究者が採用しているのもこのアプリケーション版である。ただし、この使い方は群論計算 GAP や SINGULAR, 線形代数の特化した LAPACK や MATLAB に似た octave, グラフ理論に特化した NetworkX や統計計算の R などと有機的なデータ連携ができないため、時代遅れになりつつあることは否定しない。また、Maxima は現在も SageMath で用いるのが最適になるように開発が続けられており、その副次的派生物としてのアプリケーション版もバージョンアップされている。

本学の講義において高度な数学や煩雑な式整理などが必要なとき、それらを一旦ブラックボックス化して理論全体の流れを理解させるために、どちらの共同研究者もアプリケーション版の Maxima を活用してきた。特に、Android であれば MathJax とウェブブラウザの組み合わせでブラウジングする Maxima on Android が、iOS であれば SageMath そのものがそれぞれ提供されており、スマートフォンしか所持していない受講生であっても利用することができる。経営学や経済学で用いる数学を先に学

生に十分習熟させてから、経営学や経済学を教えることが理想的ではあるが、入学時点の数学力や授業カリキュラム的に実現困難であれば、一旦数学的に難解な部分をブラックボックス化して理論的展開の全体像を見せるために、講義で Maxima を利用することは有益であろうと思われる。

2 モデル

本稿では、すべての企業が同質の財を同一の価格で販売する競争的寡占市場を考察する。市場における企業数を $n \in \mathbb{N}$ とし、各企業を番号 i で表現することで、企業の集合を $N = \{i \in \mathbb{N} | 1 \leq i \leq n\} \subset \mathbb{N}$ で表す。次小節では、プロモーション支出に関する相対的效果係数を定義して、企業の利潤関数を定式化する。

2.1 プロモーション支出の相対的效果係数

各企業 $i \in N$ は販売を促進するために、プロモーション支出のみを用いると仮定する。プロモーション支出を $x_i \in \mathbb{R}_+$ とする。このプロモーション支出は、市場規模を拡大させる効果があり、その拡大効果は企業 i ごとに異なるものと仮定する。すなわち、市場規模を拡大させる効果は、各企業が同額のプロモーション支出を行ったとしても、企業が行う広告やキャンペーンの優劣などの条件により異なる²⁾ ということを表している。企業 i のプロモーション支出 x_i に対する、企業 i の実質的な販売額の増加の割合を $\theta_i \in \mathbb{R}_+$ と置く。先行研究と同様に、本稿のモデルも θ_i は定数であると仮定する。企業 i が x_i のプロモーション支出を行うとき、実質 $\theta_i x_i$ の販売額の増加をもたらすものとする。

企業番号を適切に振り直すことで、一般性を失わずに $\theta_i, (i \in N)$ について

$$\max \{\theta_i | i \in N\} = \theta_1$$

としてよい。この最大値 θ_1 を基準として、すべての θ_i を正規化し、それを α_i とする。

$$\alpha_i := \frac{\theta_i}{\theta_1} \in (0, 1] \subset \mathbb{R}$$

この α_i を、企業 i のプロモーション支出の相対的效果係数と呼ぶ。この相対的效果係数を用いることで、各企業 i が x_i のプロモーション支出をするとき、それは市場規模の拡大について $\alpha_i x_i$ の寄与をしたものと考えることができる。そのため、Mills [6] では、この $\alpha_i x_i$ を有効プロモーション支出と呼んでいる。これは広告やキャンペーンの企業毎の優劣という、質的側面を組み込んだ実質的なプロモーション支出である。

2.2 企業の利潤関数

すべての企業の有効プロモーション支出の合計は、 $\sum_{k \in N} \alpha_k x_k$ である。また、プロモーション支出が全くない状態での市場規模を比較基準 $V \in \mathbb{R}_+$ とする。これを用いて、市場規模の拡大比率を定数 $\beta \in \mathbb{R}_+$ として、市場規模 Q は以下のような総有効プロモーション支出の線形関数³⁾ を仮定する。

2) Mills [6] で用いられた広告やキャンペーンの優劣を、経済モデルに取り入れる手法に倣った。

3) 広告 - 売上高曲線として、一般にはロジスティック関数のような、単調増加で逓増から逓減に変化する、いわゆる S 字型関数が想定されることもある。しかし Mills [6] は、経験的データでは多くの市場において、直線に近いことを指摘しているため、本稿でも線形関数を仮定する。

$$Q = V + \beta \left(\sum_{k \in N} \alpha_k x_k \right)$$

Q は総有効プロモーション支出（貨幣単位）から市場規模（販売量単位）への連続写像で記述される生産関数とみることができる。

企業 i の利潤を π_i とする。利潤⁴⁾ は次式の、市場や企業の定数や変数を含んだ形で定義する。

$$\pi_i = p v_i - c_i v_i - x_i = m_i v_i - x_i$$

定義式中の p は販売価格であり、本稿では一定と仮定する⁵⁾。 c_i は平均生産費である。 v_i は販売量である。 $m_i = p - c_i$ は利鞘またはマージンと呼ばれ、販売価格から平均生産費を差し引いたものとして定義される。

また、各企業 i の市場占拠率 v_i/Q は、各有効プロモーション支出の総有効プロモーション支出に対する内分に等しいものと仮定する。

$$\frac{v_i}{Q} = \frac{\alpha_i x_i}{\sum_{k \in N} \alpha_k x_k}$$

市場占拠率の右辺の式は、全企業による総有効プロモーション支出に占める各企業の有効プロモーション支出の割合（有効プロモーション占拠率）を表す。利潤の定義式に市場占拠率を代入することで、企業 i の利潤は次式に整理される。

$$\pi_i = m_i \left(\frac{\alpha_i x_i}{\sum_{k \in N} \alpha_k x_k} \right) Q - x_i = \frac{1}{\sum_{k \in N} \alpha_k x_k} \left(\alpha_i m_i x_i \left(V + \beta \left(\sum_{k \in N} \alpha_k x_k \right) \right) \right) - x_i$$

2.3 市場構造のグラフ表現

グラフ理論で扱われるグラフとは、頂点の集合 V と 2 頂点を結ぶ辺の集合 E の組 (V, E) として定義されるものを言う。そして、 E が任意の 2 頂点を結ぶ辺をすべてもっているとき、そのグラフを完全グラフと言う。

本稿では、2 企業 $i, j \in N$ において、企業 i が企業 j のプロモーション支出に関する反応関数を予め知っているが、逆に企業 j は企業 i の反応関数を知らないことをもって、情報の非対称性と呼ぶ。情報の非対称性がある市場構造の分類問題を考察するために、企業の集合 N を頂点とする局所的有向グラフを定義する。このグラフのことを、本稿では造語として市場構造グラフと呼ぶことにする。

グラフの辺として、企業 i が企業 j の反応関数を予め知っているとき、有向辺 $\vec{ij}$ を与える。企業 i も企業 j も互いに反応関数を知らなければ、無向辺 $\overleftrightarrow{ij}$ を与える。企業 i が自社自身の反応関数を予め

4) Mills [6] では、利潤は固定費を差し引いて定義されている。本稿では、固定費を与件として取り扱う。そのため利潤の定義式に固定費を含めていない。

5) この仮定は、ビールなどの価格に見られるような、いわゆる「官製価格」と呼ばれる価格に対応すると考える。

知っているならば、自社自身の反応関数のみから決定される最適戦略を取ればよいだけなのでゲームを行うことはない。そのため、有向や無向を問わず自己ループとなる辺 $\vec{ii}$, $\overleftrightarrow{ii}$ は本稿では考察の対象から除外する。

追加的な規則として推移律を与える。すなわち、ある2頂点 i, j の間に、他の頂点を経由する有向辺の組 $\{\vec{ik}, \vec{kj}\}$ が存在するならば、推移的に有向辺 $\vec{ij}$ を与える。無向多重辺は1本の無向辺と同値となる。同方向のみの有向多重辺は1本の有向辺と同値となる。有向辺と無向辺の多重辺は論理矛盾を生ずるため除外する。そして推移律から、双方向の多重辺は自己ループとなるため、本稿では除外する。すなわち、本稿では市場構造グラフに自己ループおよびすべての多重辺を認めない。このようなグラフの模式的な図は、次小節において挙げることにする。

したがって、 n 企業による情報非対称な競争市場において、市場構造の分類問題をグラフ理論的に考察する。だが、この分類問題は困難であるため、以下では特徴的な市場構造に限定して考察を行う。

2.4 市場構造グラフの分類例

一般の n 企業による市場構造グラフは有向辺と無向辺が混在する完全グラフであるため、組み合わせ的にかなり複雑なものになって、グラフ理論的に分類するときに着目する要素に様々なものが考えられる。本小節では、その中でも代表的な市場構造を、市場構造グラフを用いて表現する。また、以下にある市場構造グラフの模式図では、仮に企業数を $n=6$ としておく。

2.4.1 Cournot-Nash ゲームの市場構造グラフ

本稿でいう Cournot-Nash 販売競争とは、互いに他企業のプロモーション支出を所与として、自己の利潤を最大にするプロモーション支出を選択する競争と定義する。これは市場構造グラフで言えば、すべてが無向辺の完全グラフを意味する。

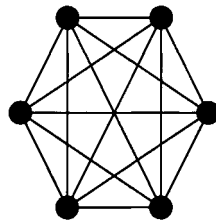


図1 6企業間における Cournot-Nash ゲームの市場構造グラフ

2.4.2 マルチリーダーフォロワー型 Stackelberg ゲームの市場構造グラフ

m 企業の先導企業（マルチリーダー）と $n-m$ 企業の追随企業（マルチフォロワー）が存在する Stackelberg ゲームの市場構造グラフを考察する。本稿でいう、マルチリーダーフォロワー型 Stackelberg 販売競争とは、単数または複数からなる先導企業と追随企業が混在する販売競争と定義する。その追随企業（フォロワー）とは、他企業のプロモーション支出を所与として、自己の利潤を最大にするプロモーション支出を選択する企業とする。そして先導企業（リーダー）とは、すべての追随企業の反応関数を知っており、追随企業以外の他企業のプロモーション支出を所与として、自己の利潤を最大化する企業とする。

これは市場構造グラフから、すべての有向辺を除くと先導企業を表す連結成分と追随企業を表す連結成分に分かれ、各連結成分は1点または無向辺によるグラフになる。この各連結成分はその頂点に

よって元の市場構造グラフから誘導される完全グラフとなるので、グラフ理論の用語ではクリーク (clique) として知られている。そして、除かれた有向辺はすべて情報の非対称性から、各先導企業クリークを始点とし、すべての追随企業クリークを終点とする有向辺のみとなる。本稿では先導企業クリークや追随企業クリークを、分かりやすさのために「先導企業のグループ」や「追随企業のグループ」としておく。

さらに本稿で注目する鼎占市場であれば、マルチリーダーフォロワー型 Stackelberg 販売競争では、先導企業数が 2 で追随企業数が 1 の市場と、先導企業数が 1 で追随企業数が 2 の市場の場合の 2 種類しか存在しない。そこで、逆に企業数が少ない方に注目して部分的に一般化し、先導企業数が $n-1$ で追随企業数が 1 の市場と、先導企業数が 1 で追随企業数が $n-1$ の市場の場合の 2 種類の販売競争を考察する。

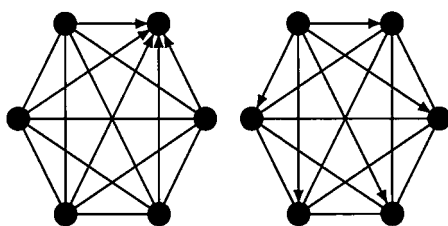


図 2 6 企業間におけるマルチリーダーフォロワー型 Stackelberg ゲームの市場構造グラフの例

2.4.3 局所的 Stackelberg ゲームの市場構造グラフ

本稿では、市場構造グラフから無向辺をすべて除いたとき、有向グラフが不連結になるが完全不連結にはならないとき、局所的 Stackelberg ゲームと名付ける。これは、一部の企業グループ内では Stackelberg ゲームが行われ、グループ単位では Cournot-Nash ゲームが行われることを意味する。

市場構造グラフから無向辺を除いたときの各有向連結成分の頂点によって、元の市場構造グラフから誘導される誘導部分グラフを、Stackelberg クリークと名付け、これが上述の「一部の企業グループ」に該当する。局所型 Stackelberg 販売競争は、一般の n では組み合わせが多様であるが、 $n=3$ であれば 2 企業からなる Stackelberg クリークと単独企業の間で Cournot-Nash 販売競争というただ 1 種類に定まる。なお、局所的 Stackelberg 競争の定義で排除した完全不連結になる場合は、すべての辺が無向辺であることを意味するので Cournot-Nash 競争となる。

次の市場構造グラフの模式図では、6 企業からなるゲームにおいて、細線の枠で囲ってある 3 企業ずつがそれぞれ内部でマルチリーダーフォロワーゲームを行う Stackelberg クリークを成し、クリーク間では Cournot-Nash ゲームを行うことを意味する。したがって、Stackelberg クリーク内にのみ有向辺があり、クリーク間はすべて無向辺からなっている。

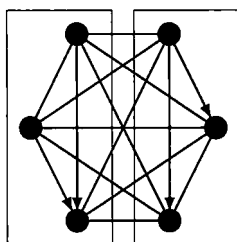


図 3 6 企業による局所的 Stackelberg ゲームの市場構造グラフの例

2.4.4 直鎖型 Stackelberg ゲームの市場構造グラフ

グラフ理論的に重要なグラフとして、すべての辺が有向辺からなるグラフがある。これは任意の2企業について先導企業と追随企業が定まる市場を意味する。ただし、本稿で採用した目的関数の形では、均衡解が煩雑になったり、代数的に可解でない形になるため、考察の対象から除外する。

有向辺の定義において、情報の非対称性に推移律を認めるので、先導企業と追随企業の関係を順序関係とみなすと、名義の集合でしかなかった N に全順序構造を導入することができる。すなわち市場構造グラフの中に、有向辺の向きに沿って、すべての頂点を直鎖的に一筆書きで辿ることができる長さ $n-1$ の有向経路がただ1つ存在する。グラフ理論では、このような経路は有向ハミルトン路 (oriented Hamiltonian path) と呼ばれ、よく研究されている。特に、企業番号を有向ハミルトン路上の先導企業数+1に置換することによって、一意的に並べ直すことができる。

次の市場構造グラフの模式図では、企業番号を先導企業数+1によって置換したものを各頂点 (企業) に振ってある。また、有向ハミルトン路を太線で、それ以外の有向辺を細線で描いた。

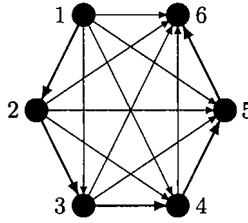


図4 6企業による直鎖型 Stackelberg ゲームの市場構造グラフ

3 Cournot-Nash 販売競争

本節で扱う Cournot-Nash 販売競争問題は、次のように定式化される。

問題 3.1. Cournot-Nash 販売競争

$$\text{Maximize}_{x_i, \forall i \in N} \quad \pi_i = \frac{1}{\sum_{k \in N} \alpha_k x_k} \left(\alpha_i m_i x_i \left(V + \beta \left(\sum_{k \in N} \alpha_k x_k \right) \right) \right) - x_i$$

$$\text{Subject to} \quad x_\ell \in \mathbb{R}_+ : \text{given, for all } \ell \in N \setminus \{i\}$$

この Cournot-Nash 販売競争の市場構造グラフは、前節の図1の無向辺グラフのようになるので、再掲は省略する。

以下では、表現の簡潔化の都合で、次の文字変数を準備しておく。

$$T = \sum_{k \in N} \alpha_k x_k, \quad a_i = \frac{1 - \alpha_i \beta m_i}{\alpha_i m_i V} = \left(\frac{1}{\alpha_i m_i} - \beta \right) \frac{1}{V}, \quad A = \sum_{i \in N} a_i, \quad \bar{a} = \frac{A}{n}$$

T は有効プロモーション支出の合計である。また V および β はすべての企業に対して、与件である。 a_i はプロモーション効果 $\alpha_i m_i$ の直角双曲線関数となるので、その意味で a_i はプロモーション効果の

「代理変数」である。以下では $a_i > 0$ と仮定する。

これらを用いて問題 3.1 を解くと、次の命題を得る。

命題 3.1. 問題 3.1 を満たす均衡解 $\{x_i^* | i \in N\}$ は、十分条件として a_i が

$$\max \{a_i | i \in N\} < \frac{n\bar{a}}{n-1} \quad (1)$$

を満たすとき、

$$x_i^* = \frac{1}{\alpha_i} \left(\frac{n-1}{A} \right) \left(1 - a_i \left(\frac{n-1}{A} \right) \right)$$

として与えられる。

証明 3.1. 企業 i の利潤 π_i の最大化のための、 x_i による 1 階の条件は次式で表される。

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial x_i} = \frac{\alpha_i m_i V (T - \alpha_i x_i) + (\alpha_i \beta m_i - 1) T^2}{T^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{T} - \frac{\alpha_i x_i}{T^2} - \frac{1 - \alpha_i \beta m_i}{\alpha_i m_i V} = 0, \quad (\forall i \in N)$$

この各方程式を、代理変数 a_i を用いて整理すると次式を得る。

$$T - \alpha_i x_i = a_i T^2 \quad (\forall i \in N)$$

ここで T の定義より

$$\sum_{i \in N} (T - \alpha_i x_i) = \sum_{i \in N} (a_i T^2) \Leftrightarrow nT - \left(\sum_{i \in N} \alpha_i x_i \right) = nT - T = T^2 \left(\sum_{i \in N} a_i \right) = AT^2$$

となり、 $T \neq 0$ より T として $T = (n-1)/A$ を得る。したがって、均衡におけるプロモーション支出（最適プロモーション支出） x_i^* の候補として

$$x_i^* = \frac{1}{\alpha_i} (T (1 - a_i T)) = \frac{1}{\alpha_i} \left(\frac{n-1}{A} \right) \left(1 - a_i \left(\frac{n-1}{A} \right) \right) \quad (\forall i \in N) \quad (2)$$

を得る。また Cournot-Nash 均衡における、利潤最大化のための 2 階の条件は次式で表される。

$$\frac{\partial^2 \pi_i}{\partial x_i^2} = -\frac{1}{T^3} \left(2\alpha_i^2 m_i \left(\sum_{\ell \in N \setminus \{i\}} \alpha_\ell x_\ell \right) V \right) < 0 \quad (\forall i \in N)$$

これによって、すべてのパラメタが正数であることから、2 階の条件は満たされるので、式 (2) は最適プロモーション支出となる。また、諸変数の定義から式 (2) の末尾の因子が x_i^* の正負を決定するので

$$1 - a_i \left(\frac{n-1}{A} \right) \geq 1 - \max \{a_i\} \times \left(\frac{n-1}{A} \right) > 0 \Rightarrow \max \{a_i\} < \frac{A}{n-1} = \frac{n\bar{a}}{n-1} \quad (\forall i \in N)$$

が x_i^* が正数となるための十分条件となる。 □

命題 3.1 から、直ちに次の系を得る。

系 3.1.1. 問題 3.1 を満たす均衡解における各企業の最適利潤 π_i^* は、命題 3.1 の十分条件 (1) の下で

$$\pi_i^* = \frac{m_i V}{T^2} (T - a_i (n-1))^2$$

となる。

これは π_i^* の定義に命題 3.1 の x_i^* を代入して整理するだけであるので、証明は省略する。

系 3.1.2. 命題 3.1 において、すべての $j \in N$ について、 $\alpha_j m_j = C$ (定数) $\in \mathbb{R}_+$ という条件を追加すれば、最適プロモーション支出 x_i^* 、最適利潤 π_i^* はそれぞれ

$$x_i^* = \frac{n-1}{\alpha_i C n^2}, \quad \pi_i^* = \frac{m_i V}{n^2} \quad (\forall i \in N)$$

となる。

これも特殊条件を代入して整理するだけであるので、証明は省略する。

4 先導者の数が $n-1$ 、追随者の数が 1 の販売競争

本節では、先導企業と追随企業が存在する市場を考察する。この市場における先導企業の数 $n-1$ 、追随企業数を 1 と仮定する。先導企業間では Cournot-Nash 競争が行われる。そして、先導企業グループと追随企業の間では Stackelberg 競争が行われる。本節では、企業番号の置換によって一般性を失うことなく、先導企業の集合を $L = \{1, 2, \dots, n-1\}$ と置くことができる。同様に、追随企業の集合を $F = \{n\}$ と置く。定義の排他性から $L \cup F = N, L \cap F = \emptyset$ である。

本節で扱う Stackelberg 販売競争問題は、次のように定式化される。

問題 4.1. マルチリーダー Stackelberg 販売競争

マルチリーダー Stackelberg 販売競争における、追随企業の問題は

$$\text{Maximize}_{x_n} \quad \pi_n = \frac{1}{\sum_{k \in N} \alpha_k x_k} \left(\alpha_n m_n x_n \left(V + \beta \left(\sum_{k \in N} \alpha_k x_k \right) \right) \right) - x_n$$

Subject to $x_i \in \mathbb{R}_+$: given, for all $i \in L$

となり、先導企業の問題は

$$\text{Maximize}_{x_i, \forall i \in L} \quad \pi_i = \frac{1}{\sum_{k \in N} \alpha_k x_k} \left(\alpha_i m_i x_i \left(V + \beta \left(\sum_{k \in N} \alpha_k x_k \right) \right) \right) - x_i$$

$$\begin{aligned} \text{Subject to } & x_\ell \in \mathbb{R}_+ : \text{given, for all } \ell \in L \setminus \{i\} \\ & x_n = x_n^* (\{x_\ell | \ell \in L\}) \end{aligned}$$

となる。

第3節と同様、表現の都合で次の文字変数を定義しておく。

$$T_L = \sum_{k \in L} \alpha_k x_k = T - \alpha_n x_n, \quad A_L = \sum_{k \in L} a_k, \quad \bar{a}_L = \frac{A_L}{n-1}$$

なお、 a_k の定義は第3節と同じとする。

この問題4.1を解くと、次の命題を得る。

命題4.1. 問題4.1について、均衡解 $\{x_k^* \in \mathbb{R}_+ | k \in N\}$ が存在するための十分条件として $a_k, (k \in N)$ の最大値が

$$\max \{a_i | i \in N\} < \left(1 + \frac{1}{2n-3}\right) \bar{a}_L \quad (3)$$

を満たすとき、先導企業の均衡解は、

$$x_i^* = \frac{2(2n-3)^2 a_n (2A_L - (2n-3)a_i)}{4\alpha_i A_L^3} \quad (\forall i \in L)$$

として与えられる。そして、追随企業の均衡解 x_n^* は、

$$x_n^* = \frac{(2n-3)(2A_L - (2n-3)a_n)}{4\alpha_n A_L^2}$$

として与えられる。

証明4.1. マルチリーダー Stackelberg 販売競争において、追随企業は先導企業のプロモーション支出を所与として利潤を最大化する。利潤最大化のための、追随企業の1階の条件は次式で表される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_n}{\partial x_n} &= \frac{T_L \alpha_n m_n V + T^2 (\alpha_n \beta m_n - 1)}{T^2} = \frac{T_L \alpha_n m_n V + (T_L + \alpha_n x_n)^2 (\alpha_n \beta m_n - 1)}{T^2} = 0 \\ \Leftrightarrow T_L &= \left(\frac{1 - \alpha_n \beta m_n}{\alpha_n m_n V} \right) (T_L + \alpha_n x_n)^2 = a_n (T_L + \alpha_n x_n)^2 \end{aligned}$$

これは $\alpha_n x_n$ に関する2次方程式であるから、反応関数として互いに共役な2解

$$\alpha_n x_n^* = -T_L \pm \sqrt{\frac{T_L}{a_n}} \quad (4)$$

を形式的に得るが⁵, $T_L > 0$, $a_n > 0$, $\alpha_n x_n^* > 0$ の条件から, 複号は正のみが追随企業の反応関数の候補になる。

先導企業の目的関数に, $T = T_L + \alpha_n x_n^* = \sqrt{\frac{T_L}{a_n}}$ を代入すると

$$\pi_i = \frac{\alpha_i m_i x_i (V + \beta T)}{T} - x_i = \alpha_i m_i x_i \left(V \sqrt{\frac{a_n}{T_L}} + \beta \right) - x_i$$

を得る。この目的関数について, 先導企業グループ内で Cournot-Nash 販売競争が行われる。したがって, 利潤最大化のための 1 階の条件は次式で表される。

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial x_i} = \alpha_i m_i \left(V \sqrt{\frac{a_n}{T_L}} + \beta - \frac{x_i V \sqrt{a_n}}{2 T_L \sqrt{T_L}} \times \frac{\partial T_L}{\partial x_i} \right) - 1 = 0 \quad (\forall i \in L)$$

ここで, $\frac{\partial T_L}{\partial x_i} = \alpha_i > 0$, $1 - \alpha_i \beta m_i = \alpha_i m_i V a_i$ より

$$\begin{aligned} \alpha_i m_i V \sqrt{a_n} \left(\frac{1}{\sqrt{T_L}} - \frac{\alpha_i x_i}{2 T_L \sqrt{T_L}} \right) &= 1 - \alpha_i \beta m_i = \alpha_i m_i V a_i \\ \Leftrightarrow (2 T_L - \alpha_i x_i) \sqrt{a_n} &= 2 T_L \sqrt{T_L} a_i \\ \Leftrightarrow \alpha_i x_i &= \frac{2 T_L (a_n - a_i \sqrt{a_n T_L})}{a_n} \quad (\forall i \in L) \end{aligned} \quad (5)$$

ここで $i \in L$ について総和をとると, T_L と A_L の定義より

$$\begin{aligned} a_n \left(\sum_{i \in L} \alpha_i x_i \right) &= 2 T_L \sum_{i \in L} (a_n - a_i \sqrt{a_n T_L}) \\ \Leftrightarrow a_n T_L &= 2 T_L \left(a_n (n-1) - \sqrt{a_n T_L} \left(\sum_{i \in L} a_i \right) \right) = 2 T_L (a_n (n-1) - A_L \sqrt{a_n T_L}) \\ \Leftrightarrow \sqrt{a_n T_L} &= \frac{(2n-3) a_n}{2 A_L} \quad \Leftrightarrow \quad T_L = \frac{(2n-3)^2 a_n}{4 A_L^2} \end{aligned} \quad (6)$$

よって, (5), (6) より, 問題 4.1 の先導企業の均衡解の候補は

$$x_i^* = \frac{2 (2n-3)^2 a_n (2 A_L - (2n-3) a_i)}{4 \alpha_i A_L^3} \quad (\forall i \in L)$$

となり, さらに (4) より追随企業の均衡解の候補は

$$x_n = \frac{(2n-3) (2 A_L - (2n-3) a_n)}{4 \alpha_n A_L^2}$$

となる。

次に、これらの均衡解が正数となる十分条件として $n \geq 2, a_n > 0, \alpha_i > 0, A_L > 0$ より

$$2A_L - (2n - 3)a_i > 0 \quad (\forall i \in N)$$

が要請される。これは $a_i, (i \in L)$ の平均値 $\bar{a}_L$ を用いて、

$$a_i \leq \max \{a_i | i \in N\} < \frac{2A_L}{2n-3} = \frac{2(n-1)\bar{a}_L}{2n-3} = \left(1 + \frac{1}{2n-3}\right) \bar{a}_L$$

と記述することができるので、命題 4.1 を得る。 □

命題 4.1 から、直ちに次の系を得る。

系 4.1.1. 問題 4.1 を満たす均衡解における各企業の最適利潤 π_k^* は、命題 4.1 の十分条件 (3) の下で
先導企業と追随企業はそれぞれ

$$\begin{aligned} \pi_i^* &= \frac{m_i(2n-3)a_n(2A_L - 2a_in + 3a_i)^2 V}{4A_L^3} \quad (\forall i \in L) \\ \pi_n^* &= \frac{m_n(2A_L - 2na_n + 3a_n)^2 V}{4A_L^2} \end{aligned}$$

となる。

これは π_i^*, π_n^* の定義に命題 4.1 の $x_k^*, (\forall k \in N)$ をそれぞれ代入して整理するだけであるので、証明は省略する。

系 4.1.2. 命題 4.1 において、すべての $k \in N$ について、 $\alpha_k m_k = C$ (定数) $\in \mathbb{R}_+$ という条件を追加すれば、先導企業の最適プロモーション支出 x_i^* 、先導企業の最適利潤 π_i^* はそれぞれ

$$x_i^* = \frac{(2n-3)^2}{4\alpha_i(n-1)^3 C}, \quad \pi_i^* = \frac{m_i(2n-3)V}{4(n-1)^3} \quad (\forall i \in L)$$

となり、追随企業の最適プロモーション支出 x_n^* 、追随企業の最適利潤 π_n^* はそれぞれ

$$x_n^* = \frac{2n-3}{4\alpha_n(n-1)^2 C}, \quad \pi_n^* = \frac{m_n V}{4(n-1)^2}$$

となる。

これも特殊条件を代入して整理するだけであるので、証明は省略する。

5 先導者の数が 1、追随者の数が $n-1$ の販売競争

前節と同様に、先導企業と追随企業が存在する市場を考察する。この市場における先導企業の数
を 1、追随企業数を $n-1$ と仮定する。追随企業間では Cournot-Nash 競争が行われる。そして、先導
企業と追随企業グループの間では Stackelberg 競争が行われる。本節では、企業番号の置換によって

一般性を失うことなく、先導企業の集合を $L=\{1\}$ と置くことができる。同様に、追随企業の集合を $F=\{2, 3, \dots, n\}$ と置く。この場合も前節と同様に、定義の排他性から $L \cup F = N, L \cap F = \emptyset$ である。

本節で扱うマルチフォロワー Stackelberg 販売競争問題は、次のように定式化される。

問題 5.1. マルチフォロワー Stackelberg 販売競争

マルチフォロワー Stackelberg 販売競争における、追随企業の問題は

$$\text{Maximize}_{x_j \in F} \quad \pi_j = \frac{1}{\sum_{k \in N} \alpha_k x_k} \left(\alpha_j m_j x_j \left(V + \beta \left(\sum_{k \in N} \alpha_k x_k \right) \right) \right) - x_j$$

$$\text{Subject to} \quad x_\ell \in \mathbb{R}_+ : \text{given, for all } \ell \in N \setminus \{j\}$$

となり、先導企業の問題は

$$\text{Maximize}_{x_1} \quad \pi_1 = \frac{1}{\sum_{k \in N} \alpha_k x_k} \left(\alpha_1 m_1 x_1 \left(V + \beta \left(\sum_{k \in N} \alpha_k x_k \right) \right) \right) - x_1$$

$$\text{Subject to} \quad x_j = x_j^* (\{x_\ell \mid \ell \in N \setminus \{j\}\}) \quad (\forall j \in F)$$

となる。

第3節や第4節と同様、表現の都合での次の文字変数を定義しておく。

$$T_F = \sum_{k \in F} \alpha_k x_k = T - \alpha_1 x_1, \quad A_F = \sum_{k \in F} a_k, \quad \bar{a}_F = \frac{A_F}{n-1}$$

なお、 a_k の定義は第3節と同じとする。

この問題 5.1 を解くと、次の命題を得る。

命題 5.1. 問題 5.1 について、均衡解 $\{x_k^* \in \mathbb{R}_+ \mid k \in N\}$ が存在するための十分条件として $a_k, (k \in N)$ の最大値が^s

$$\max \{a_i \mid i \in N\} < \left(1 + \frac{1}{n-2}\right) \bar{a}_F \quad (7)$$

を満たすとき、先導企業の均衡解は

$$x_1^* = \frac{(A_F - a_1(n-2))(A_F + a_1(n-2))}{4a_1^2 \alpha_1 A_F}$$

として与えられる。そして、追随企業の均衡解 $x_j^*, (j \in F)$ は、

$$x_j^* = \frac{(A_F + a_1(n-2))(2a_1 A_F - a_j(A_F + a_1(n-2)))}{4\alpha_j a_1^2 A_F^2} \quad (\forall j \in F)$$

として与えられる。

証明 5.1. マルチフォロワー Stackelberg 販売競争において、追随企業は先導企業のプロモーション支出を所与として利潤を最大化する。利潤最大化のための、追随企業の 1 階の条件は次式で表される。

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi_j}{\partial x_j} &= \frac{\alpha_j m_j V (T - \alpha_j x_j) + (\alpha_j \beta m_j - 1) T^2}{T^2} \\ &= \frac{\alpha_j m_j V (\alpha_1 x_1 + T_F - \alpha_j x_j) + (\alpha_j \beta m_j - 1) (\alpha_1 x_1 + T_F)^2}{T^2} = 0 \quad (\forall j \in F) \\ \Leftrightarrow \quad \alpha_1 x_1 + T_F - \alpha_j x_j &= \left(\frac{1 - \alpha_j \beta m_j}{\alpha_j m_j V} \right) (\alpha_1 x_1 + T_F)^2 = a_j (\alpha_1 x_1 + T_F)^2 \quad (\forall j \in F)\end{aligned}$$

ここで $j \in F$ について総和をとると、 T_F と A_F の定義より

$$\begin{aligned}(n-1)(\alpha_1 x_1 + T_F) - \sum_{j \in F} \alpha_j x_j &= (\alpha_1 x_1 + T_F)^2 \sum_{j \in F} a_j \\ \Leftrightarrow (n-1)(\alpha_1 x_1 + T_F) - T_F &= A_F (\alpha_1 x_1 + T_F)^2\end{aligned}$$

これは T_F に関する 2 次方程式であるから、 T_F として互いに共役な 2 解

$$\begin{aligned}T_F^* &= \frac{-2\alpha_1 x_1 A_F + n - 2 \pm \sqrt{4\alpha_1 x_1 A_F + (n-2)^2}}{2A_F} \\ &= -\alpha_1 x_1 + \frac{n - 2 \pm \sqrt{4\alpha_1 x_1 A_F + (n-2)^2}}{2A_F}\end{aligned}$$

を形式的に得るが、 $T_F^* > 0$, $A_F > 0$, $\alpha_1 x_1 > 0$ の条件から、複号は正のみが追随企業グループの加重付き反応関数の総和である T_F^* の候補になる。

先導企業の目的関数に、 $T = \alpha_1 x_1 + T_F^* = \frac{n - 2 + \sqrt{4\alpha_1 x_1 A_F + (n-2)^2}}{2A_F}$ を代入すると、

$$\begin{aligned}\pi_1 &= \frac{1}{T} (\alpha_1 m_1 x_1 (V + \beta T)) - x_1 \\ &= \frac{\alpha_1 m_1 x_1 \left(V + \beta \times \frac{n - 2 + \sqrt{4\alpha_1 x_1 A_F + (n-2)^2}}{2A_F} \right)}{\frac{n - 2 + \sqrt{4\alpha_1 x_1 A_F + (n-2)^2}}{2A_F}} - x_1 \\ &= \frac{m_1 V}{2} \left(\sqrt{4\alpha_1 x_1 A_F + (n-2)^2} - n + 2 \right) - (1 - \alpha_1 \beta m_1) x_1\end{aligned}$$

となるので、 x_1 の利潤最大化のための 1 階の条件は

$$\frac{d\pi_1}{dx_1} = \frac{A_F V \alpha_1 m_1}{\sqrt{4\alpha_1 x_1 A_F + (n-2)^2}} - (1 - \alpha_1 \beta m_1) = 0$$

となる。また、これによって得られる停留点は、利潤最大化のための 2 階の条件

$$\frac{d^2 \pi_1}{dx_1^2} = -\frac{2 A_F^2 V \alpha_1^2 m_1}{\left(4 \alpha_1 x_1 A_F + (n-2)^2\right)^{3/2}} < 0$$

より、極大点となる。

この極大点、すなわち利潤最大化のための 1 階の条件の零点は

$$\frac{A_F}{\sqrt{4 \alpha_1 x_1 A_F + (n-2)^2}} = \frac{1 - \alpha_1 \beta m_1}{\alpha_1 m_1 V} = a_1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1^* = \frac{(A_F - a_1 (n-2))(A_F + a_1 (n-2))}{4 a_1^2 \alpha_1 A_F}$$

となる。ここから均衡解における T^* が

$$\begin{aligned} T^* &= \alpha_1 x_1^* + T_F^* = \frac{n-2 + \sqrt{4 \alpha_1 x_1^* A_F + (n-2)^2}}{2 A_F} \\ &= \frac{n-2 + \sqrt{4 \alpha_1 \left(\frac{(A_F - a_1 (n-2))(A_F + a_1 (n-2))}{4 a_1^2 \alpha_1 A_F} \right) A_F + (n-2)^2}}{2 A_F} \\ &= \frac{A_F + a_1 (n-2)}{2 a_1 A_F} \end{aligned}$$

となるので、各均衡解 x_j^* は

$$\begin{aligned} x_j^* &= \frac{1}{\alpha_j} \left((\alpha_1 x_1^* + T_F^*) - a_j (\alpha_1 x_1^* + T_F^*)^2 \right) = \frac{T^*}{\alpha_j} (1 - a_j T^*) \\ &= \frac{A_F + a_1 (n-2)}{2 \alpha_j a_1 A_F} \left(1 - \frac{a_j (A_F + a_1 (n-2))}{2 a_1 A_F} \right) \\ &= \frac{(A_F + a_1 (n-2)) (2 a_1 A_F - a_j (A_F + a_1 (n-2)))}{4 \alpha_j a_1^2 A_F^2} \quad (\forall j \in F) \end{aligned}$$

となる。

次に、これらの均衡解が正数となる十分条件として $n \geq 2$, $A_F > 0$, $a_k > 0$, $\alpha_k > 0$ ($\forall k \in N$) より

$$\begin{aligned} A_F - a_1 (n-2) > 0 &\Rightarrow x_1^* > 0 \\ 2 a_1 A_F - a_j (A_F + a_1 (n-2)) > 0 &\Rightarrow x_j^* > 0 \quad (\forall j \in F) \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} a_1 &< \frac{A_F}{n-2} = \left(\frac{n-1}{n-2} \right) \bar{a}_F = \left(1 + \frac{1}{n-2} \right) \bar{a}_F \\ a_j &< \frac{2 a_1 A_F}{A_F + a_1 (n-2)} < \frac{2 a_1 A_F}{a_1 (n-2) + a_1 (n-2)} = \frac{A_F}{n-2} = \left(1 + \frac{1}{n-2} \right) \bar{a}_F \quad (\forall j \in F) \end{aligned}$$

と同じ値で抑えられるので、命題 5.1 を得る。□

命題 5.1 から、直ちに次の系を得る。

系 5.1.1. 問題 5.1 を満たす均衡解における各企業の最適利潤 π_i^* は、命題 5.1 の十分条件 (7) の下で先導企業と追随企業はそれぞれ

$$\pi_1^* = \frac{m_1 (A_F - a_1 n + 2a_1)^2 V}{4 a_1 A_F}$$

$$\pi_j^* = \frac{m_j (a_j A_F - 2a_1 A_F + a_1 a_j n - 2a_1 a_j)^2 V}{4 a_1^2 A_F^2} \quad (\forall j \in F)$$

となる。

これは π_1^* , π_j^* の定義に命題 5.1 の x_k^* , ($\forall k \in N$) をそれぞれ代入して整理するだけであるので、証明は省略する。

6 鼎占市場における販売競争

本節では、 $n=3$ 、すなわち鼎占市場において、考えられる市場構造をすべて列挙する。そして、その中で均衡解が求められたものを考察する。

6.1 鼎占市場の市場構造グラフ

頂点数を $n=3$ に限定するので、第 2 節の例に沿って市場行動グラフを同型で分類すると、すべてが無向辺 1 種類、無向辺と有向辺の混在 3 種類、すべてが有向辺 1 種類の計 5 種類に分類される。

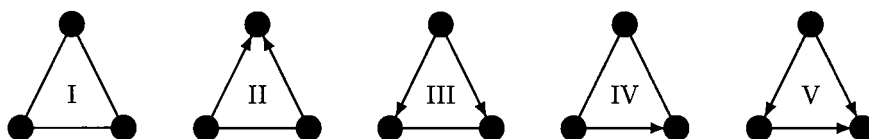


図 5 頂点数 3 の市場行動グラフの分類

前節までの考察によって、鼎占ゲームだけではなく、一般化された n 企業間ゲームにおいて Cournot-Nash 販売競争 (I)、先導者の数が 2、追随者の数が 1 の場合の販売競争 (II)、先導者の数が 1、追随者の数が 2 の販売競争 (III) において、それぞれ均衡解が存在することは確かめている。よって、その結果に $n=3$ を代入すればよい。

残っている問題のうち、次小節では局所的 Stackelberg 販売競争 (IV) について考察する。なお、直鎖型 Stackelberg 販売競争 (V) については、本稿では技術的な都合で扱わない。

6.2 局所型 Stackelberg 販売競争

局所型 Stackelberg 販売競争となる市場構造グラフの数は、一般的には企業数 $n \geq 3$ に対して指数的に種類が増えてゆく。しかし、鼎占市場においてはただ 1 種類しかないので、企業番号の振り直しによって Stackelberg クリークの先導企業を企業 1、追随企業を企業 2、独立している企業を企業 3 として一般性を失わない。

この一意化によって、鼎占市場の局所的 Stackelberg 販売競争問題は、次のように定式化される。

問題 6.1. 局所的 Stackelberg 販売競争

寡占市場の局所的 Stackelberg 販売競争における, Stackelberg クリークの先導企業の問題は

$$\begin{aligned} \text{Maximize}_{x_1} \quad & \pi_1 = \frac{\alpha_1 m_1 x_1 (V + \beta (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3))}{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3} - x_1 \\ \text{Subject to} \quad & x_2 = x_2^*(x_1, x_3) \\ & x_3 \in \mathbb{R}_+ : \text{given} \end{aligned}$$

となり, Stackelberg クリークの追随企業の問題は

$$\begin{aligned} \text{Maximize}_{x_2} \quad & \pi_2 = \frac{\alpha_2 m_2 x_2 (V + \beta (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3))}{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3} - x_2 \\ \text{Subject to} \quad & x_1, x_3 \in \mathbb{R}_+ : \text{given} \end{aligned}$$

となり, Stackelberg クリークから独立している企業の問題は

$$\begin{aligned} \text{Maximize}_{x_3} \quad & \pi_3 = \frac{\alpha_3 m_3 x_3 (V + \beta (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3))}{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3} - x_3 \\ \text{Subject to} \quad & x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+ : \text{given} \end{aligned}$$

となる。

ここで注目すべき寡占市場ならではの特徴として, Stackelberg クリークの追随企業の問題とクリークから独立している企業の問題が, 企業番号の置換だけで同じ問題, すなわち企業として得られる情報量が同じということである。さらに, 数式的に第 5 節のマルチフォロワー Stackelberg 販売競争の問題における追随企業の問題と同じ式になっている。マルチフォロワー Stackelberg 販売競争の問題との唯一の違いは, 企業 1 の制約条件の差のみになることに留意されたい。

表現の簡潔化の都合で, 第 3 節で定義した a_i を利用するので, 定義式を再掲しておく。

$$a_i = \frac{1 - \alpha_i \beta m_i}{\alpha_i m_i V} = \frac{1}{V} \left(\frac{1}{\alpha_i m_i} - \beta \right) \quad (i \in N = \{1, 2, 3\})$$

この問題 6.1 を解くと次の命題を得る。

命題 6.1. 問題 6.1 について, 十分条件として

$$0 < (3 + \sqrt{5}) a_1 < a_2 = a_3 \quad (8)$$

を満たすときは,

$$x_1^* = \frac{2 a_1 + \sqrt{2 a_1 a_2}}{2 \alpha_1 a_1 a_2}, \quad x_2^* = \frac{-2 a_1 + a_2 - \sqrt{2 a_1 a_2}}{2 \alpha_2 a_1 a_2}, \quad x_3^* = \frac{-2 a_1 + a_2 - \sqrt{2 a_1 a_2}}{2 \alpha_3 a_1 a_2}$$

という均衡解が存在する。また、十分条件として

$$2a_1 > a_2 = a_3 > (3 - \sqrt{5})a_1 \quad (9)$$

を満たすときは、

$$x_1^* = \frac{2a_1 - \sqrt{2a_1a_2}}{2\alpha_1a_1a_2}, \quad x_2^* = \frac{-2a_1 + a_2 + \sqrt{2a_1a_2}}{2\alpha_2a_1a_2}, \quad x_3^* = \frac{-2a_1 + a_2 + \sqrt{2a_1a_2}}{2\alpha_3a_1a_2}$$

という均衡解が存在する。

証明 6.1. 局所的 Stackelberg 販売競争において、企業 2 と企業 3 の反応関数についてはマルチフォロワー Stackelberg 販売競争の追随企業と直面する情報環境が同じであることから、同様に求められる。利潤最大化のための 1 階の条件より、第 5 節と同様の考察から

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial x_2} = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 x_1 + \alpha_3 x_3 = a_2 (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)^2 \quad (10)$$

$$\Leftrightarrow \alpha_2 x_2^* = \sqrt{\frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_3 x_3}{a_2}} - (\alpha_1 x_1 + \alpha_3 x_3) \quad (11)$$

$$\frac{\partial \pi_3}{\partial x_3} = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = a_3 (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)^2 \quad (12)$$

を形式的に得る。このうち、企業 2 の反応関数 (11) のみを企業 1 の目的関数に代入して、利潤最大化のための 1 階の条件を考える。このとき、 $T = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2^* + \alpha_3 x_3 = \sqrt{\frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_3 x_3}{a_2}}$ であることから、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_1}{\partial x_1} = 0 &\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\alpha_1 m_1 x_1 \left(V + \beta \sqrt{\frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_3 x_3}{a_2}} \right)}{\sqrt{\frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_3 x_3}{a_2}}} - x_1 \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2(\alpha_1 \beta m_1 - 1) \sqrt{\alpha_1 x_1 + \alpha_3 x_3} + \alpha_1 V m_1 \sqrt{a_2}}{2 \sqrt{\alpha_1 x_1 + \alpha_3 x_3}} + \frac{\alpha_1 \alpha_3 V \sqrt{a_2} m_1 x_3}{2 (\sqrt{\alpha_1 x_1 + \alpha_3 x_3})^3} = 0 \\ &\Rightarrow a_2 (\alpha_1 x_1 + 2 \alpha_3 x_3)^2 = 4 a_1^2 (\alpha_1 x_1 + \alpha_3 x_3)^3 \end{aligned} \quad (13)$$

となる。連立方程式 (13), (10), (12) から変数 $\alpha_2 x_2$ と $\alpha_3 x_3$ を除去する⁶⁾ と $\alpha_1 x_1$ の 4 次方程式

$$\begin{aligned} 0 &= 16 a_1^4 a_2^4 (\alpha_1 x_1)^4 - 8 a_1^2 a_2^2 (a_2 - a_3)^2 (a_2 + a_3) (\alpha_1 x_1)^3 \\ &\quad + (a_3^6 - 2 a_2 a_3^5 - a_2^2 a_3^4 + 4 a_2^3 a_3^3 - a_2^4 a_3^2 - 36 a_1^2 a_2^2 a_3^2 - 2 a_2^5 a_3 - 8 a_1^2 a_2^3 a_3 + a_2^6 + 12 a_1^2 a_2^4) (\alpha_1 x_1)^2 \\ &\quad - 4 a_2 (2 a_1^2 a_2^2 + 6 a_1^2 a_2 a_3 + a_2^4 - 2 a_2^2 a_3^2 + a_3^4) (\alpha_1 x_1) - 4 a_2^2 (a_1 - a_2 - a_3) (a_1 + a_2 + a_3) \end{aligned}$$

6) この計算は、Maxima の eliminate ([方程式 1, 方程式 2, ...], [消去変数 1, 消去変数 2, ...]) を用いた。

を得る。このままでは解を求めるときに複素数が混在してくるため、解の正值性の判定が困難である。しかし、3次の係数が0のものは、デカルトの解法など簡潔な解法が知られているので、3次の係数を0にする条件

$$a_2 = \frac{1}{V} \left(\frac{1}{\alpha_2 m_2} - \beta \right) = \frac{1}{V} \left(\frac{1}{\alpha_3 m_3} - \beta \right) = a_3 \Leftrightarrow \alpha_2 m_2 = \alpha_3 m_3$$

を仮定する。この仮定は、経済学的にはStackelbergクリークの追随企業とクリークから独立している企業の、プロモーション効果が等しいことを意味する。

$a_2 = a_3$ を代入することで

$$\begin{aligned} & 16a_1^4 a_2^4 (\alpha_1 x_1)^4 - 32a_1^2 a_2^4 (\alpha_1 x_1)^2 - 32a_1^2 a_2^3 (\alpha_1 x_1) - 4a_1^2 a_2^2 + 16a_2^4 \\ &= 4a_2^2 \left(2a_1^2 a_2 (\alpha_1 x_1)^2 - 4a_1 a_2 (\alpha_1 x_1) - a_1 + 2a_2 \right) \left(2a_1^2 a_2 (\alpha_1 x_1)^2 + 4a_1 a_2 (\alpha_1 x_1) + a_1 + 2a_2 \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

を得るので

$$\alpha_1 x_1^* = \frac{2a_1 \pm \sqrt{2a_1 a_2}}{2a_1 a_2}, \quad \alpha_1 x_1^* = \frac{-2a_1 \pm i\sqrt{2a_1 a_2}}{2a_1 a_2}$$

という2つの異なる実数解と共役複素数解を得る。これによって、 $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $\alpha_1 > 0$ の条件から、実数解のうち分子の根号の符号が正のものは必ず正数解となり、負のものであってもさらに $2a_1 > a_2$ を満たせば正数解となる。

まず、 $a_1 > 0$ と $a_2 = a_3$ の条件下で企業1の均衡解 $\alpha_1 x_1^* = \frac{2a_1 + \sqrt{2a_1 a_2}}{2a_1 a_2}$ から

$$\alpha_2 x_2^* = \alpha_3 x_3^* = \frac{-2a_1 - a_2 - \sqrt{2a_1 a_2}}{2a_1 a_2}, \frac{-2a_1 + a_2 - \sqrt{2a_1 a_2}}{2a_1 a_2}, \frac{-2a_1 - \sqrt{2a_1 a_2}}{2a_1 a_2}$$

を得る。この中で正值となりうるのは、さらに条件 $(3 + \sqrt{5})a_1 < a_2$ のとき

$$\alpha_2 x_2^* = \alpha_3 x_3^* = \frac{-2a_1 + a_2 - \sqrt{2a_1 a_2}}{2a_1 a_2}$$

のみが正值となる。

次に、 $2a_1 > a_2 = a_3$ の条件下で企業1の均衡解 $\alpha_1 x_1^* = \frac{2a_1 - \sqrt{2a_1 a_2}}{2a_1 a_2} > 0$ から

$$\alpha_2 x_2^* = \alpha_3 x_3^* = \frac{-2a_1 - a_2 + \sqrt{2a_1 a_2}}{2a_1 a_2}, \frac{-2a_1 + a_2 + \sqrt{2a_1 a_2}}{2a_1 a_2}, \frac{-2a_1 + \sqrt{2a_1 a_2}}{2a_1 a_2}$$

を得る。この中で正值となりうるのは、さらに条件 $2a_1 > a_2 = a_3 > (3 - \sqrt{5})a_1$ のとき

$$\alpha_2 x_2^* = \alpha_3 x_3^* = \frac{-2a_1 + a_2 + \sqrt{2a_1 a_2}}{2a_1 a_2}$$

のみが正值となり、命題を得る。

7 おわりに

市場構造を規定する要因の一つに売り手相互間の関係⁷⁾がある。本稿では、売り手相互間の関係を先導者と追随者という競争形態の違いとして捉え、この競争形態をグラフ理論的に分類し、それぞれの市場における均衡解を求めた。本稿で考察した寡占市場では、各企業が価格競争を避けて、広告や宣伝による販売促進競争を行う。そしてプロモーション支出 x_i が販売に及ぼす効果 $\alpha_i m_i$ が企業毎に異なり、その支出が市場規模を拡大する効果をもつ局面を考察した。

本稿では、市場における企業数を n と仮定して、グラフ的に簡潔な3つの競争形態における均衡解の存在条件および利潤を考察した。先導者も追随者も存在しない Cournot-Nash 競争型の市場、 $n-1$ 企業が先導者、残りの1企業が追随者であるマルチリーダーフォロワー型の市場、1企業が先導者、残りの $n-1$ 企業が追随者であるマルチリーダーフォロワー型の各市場において、均衡解が存在するための十分条件を導いた。

残された課題を述べて結びとする。本稿では、一般的な n 企業によるゲームを前提にして、3種類の競争形態を分析したが、他にも代表的な市場構造として直鎖型 Stackelberg 競争が存在する。本稿の第2節の図4で言えば、最先導企業である企業1は企業2から企業6までのすべての反応関数を既知とする。最追随企業である企業6は企業1から企業5までのプロモーション支出のみを既知とする。その間の企業 i は、企業1から企業 $i-1$ までについてはプロモーション支出のみを既知として、企業 $i+1$ から企業6までについてはその反応関数を既知とする。この問題における均衡解の存在を確かめることは今後の課題である。

参考文献

- [1] 浅井小弥太「不完全競争市場における販売競争——一つの計量マーケティング・モデル——」、『産業と経済』、奈良産業大学、第2巻、第4号、(1988)
- [2] M.Hu, M. Fukushima., "Multi-leader-follower games: models, methods and applications", *Journal of the Operations Research of Japan*, Vol.58 (1), (2015)
- [3] 中川義行, 山下章夫「漁業資源獲得競争のマルチリーダーフォロワーゲーム」、『龍谷大学経営学論集』、龍谷大学、第57巻、第2・3号、(2018)
- [4] 丸山雅祥『経営の経済学』、新版第1刷、有斐閣、(2011)
- [5] Julien L.A., "Stackelberg Games", *Handbook of Game Theory and Industrial Organization*, Volume 1, Edward Elgar Publishing, Inc., (2018)
- [6] Mills, Harland D., "A Study in Promotional Competition", Trace: Tennessee Research and Creative Exchange, trace.tennessee.edu, http://trace.tennessee.edu/utk_harlan/48, (1959)
- [7] Sherali, H.D., "A Multiple Leader Stackelberg Model and Analysis", *Operations Research Society of America*, Vol.32, No.2, (1984)

(受理 2019年9月18日)

7) 丸山 [4] 4頁を参照