

存在認識と数学

Mathematics in Cognition of Existence

新井朝雄

Asao Arai

平成 30 年 1 月 5 日

目 次

1 序	2
2 数学史における四つのエポック — 素描	4
2.1 第一のエポック	4
2.2 第二のエポック	5
2.3 第三のエポック	5
2.4 第四のエポック	6
3 存在に関する構造的モデル	7
4 現象界とコスモス	11
5 ユークリッド幾何学の形而上性	13
6 数学と自然認識における飛躍 (I) — 微分・積分とニュートン力学	14
6.1 微分・積分の哲学的意味	15
6.2 物理学への応用 — ニュートン力学	18
7 数学と自然認識における飛躍 (II) — ミンコスキー空間と相対性理論	21
8 数学と自然認識における飛躍 (III) — 関数解析学と量子力学	24

9 数学的理念界の構造	28
9.1 同種の対象の範疇内での自律的展開	29
9.2 本質と形而上的形態	31
9.3 マンダラの構造	31
10 結語	35

1 序

数学の歴史は古い。数学の基点となる数えるという能力の発現、そしてこれと連動する数字の使用は、現代の考古学的研究によれば、約3万年ほど前に遡るとされる[23]。しかも数字は他の文字の発生に先行していたという。この考古学的事実は、認識における数えるという行為の根源性あるいは始原性を示唆していて興味深い。

数字の使用の開始から長い時を経て、古代メソポタミア、古代中国、古代エジプトにおいて、記数法とともに算術が発達した。他方、土地の面積や建物などの測量と関連して、幾何学的対象の有する法則性が経験的水準で徐々に認識されるようになっていった。こうした経験的知識は、世界最古の数学書といわれる、古代エジプトの神官アーメスの手になる『パピルス』（紀元前1650年頃）にまとめられた[30, 27頁]。だが、この書は、数学書とはいえ、理論的・論証的なものではなく、実測に基づいて認知される幾何学的諸事実を集めたものにすぎなかった。

古代エジプトの経験的幾何学を超脱する最初の偉大な契機を与えたのがイオニア自然哲学派の始祖タレス（紀元前640年頃-548年頃）である。タレスは経験的幾何学を理論的幾何学へと昇華させたのである。ここでいう理論的幾何学とは、経験的なものに頼らず、いくつかの原理から、諸々の幾何学的事実を純粹思考によって論理的に導く形をとる幾何学のことであり、方法論的には、現代的な幾何学とほとんど同義である。

タレスによる幾何学の理論化は、応用上も絶大な力を発揮する。それは、たとえば、ピラミッドの高さや陸地から海上の船までの距離を実測することなしに（実測できる他のデータを用いて）計算することを可能にする⁽¹⁾。人類の精神史の観点から見た場合、タレスにおいてはそれまでにない高次の思考が現れていることがうかがえる。これは物質的・感覚的知覚とそれに付随する悟性だけに執着していたのでは決して明らかにならない純精神的・純理念的法則を看取する思考であり、物質的・感覚的なものを超えたより高次の

存在次元、すなわち、超感覚的 — 非物質的・非感覚的 — 次元あるいは形而上的次元へと超脱する思考である。筆者は、この種の思考を、通常の静的な悟性的思考と区別して、躍動的思考と呼ぶ⁽²⁾。躍動的思考を発動することにより、存在のより高次の次元へと歩を進めることができるのである。

上述の意味においてタレスによってその端緒が開かれた純粋理論としての数学は、自然認識 — 特に物理学 — とも深く関わりつつ、歴史的に大小さまざまなエポックを経て大きな発展を遂げてきた。だが、時代を通じて変わらない、数学の基本的特性がある。それは普遍性であり永遠性である。ひとたび証明された数学的事実は時代と場所を超えて常に真であり続ける。これは、プラトンが語ったように、数学が生成と消滅のうちにある無常なる物質界・感覚界に由来するものではなく、常に在る世界、すなわち、永遠なる世界に根拠を有するからなのである。

数学の基本的特徴を次のように大きく二つに分けることができる。(I) 外的・応用的。(II) 内的・自律的。自然科学の量的側面は数学によって記述される。特に、数学なしで物理学を構築することはほとんど不可能であると言ってよい。物理学は無機的自然現象の法則性を原理的な観点から探究する学問であるので、いま述べた事態は、数学が無機的自然の根底に関わる認識と密接に結びついていることを示唆する。これが (I) の一つの側面である。(I) にはもう一つの側面があり、それは数学が科学技術の基盤、したがって、文明の基盤を支えるという側面である。科学技術は自然科学の応用から生まれるので、間接的ではあるが、数学は科学技術の基盤を支えているのである。他方、(II) は、数学の本性が他の契機から独立し、それ自体で充足しており、それ自体で価値を有する真理の一領野であることを表す。数学の内容それ自体は、純粋に理念的・精神的であり、存在認識との関連で言えば、純数学的認識は超自然的認識と関わる。存在論的構造の観点から見た場合、(II) の方がより根源的であり、(II) の展開として (I) があるのである。とはいえ、(I) と (II) は密接に関連し (不二)、全き存在認識の観点から言えば、二つで一つの全体をなす⁽³⁾。この洞察は総合学としての現代数理物理学の理念⁽⁴⁾ をもたらす。

本論文の主な目的は、全一的な存在認識における数学的思考およびこれを支え貫く精神性の哲学的な意義と役割について、古代哲学 — 東洋哲学も含む — の認識も参照しつつ、現代的な観点から考察を行い、数学的精神性に基礎をおく存在認識への道を示唆することである。また、これと関連して、現在の筆者の観照的意識に映ずる数学的^{イデア}理念界 — 数学的理念、概念、対象が存在する界 — の構造を象徴的な形で述べる。

2 数学史における四つのエポック — 素描

上述の目的のための準備として、まず、数学史における四つの大きなエポックとこれに伴伴する存在認識における飛躍について素描を行う⁽⁵⁾。

2.1 第一のエポック

タレスの精神性は、ピュタゴラス（紀元前 582 頃–497 頃）において一段と発展・深化する。伝承によれば、ピュタゴラスは該博と叡智、そして何よりも愛智（philosophia）の人⁽⁶⁾であり、南イタリアのクロトンに哲学的・修道の学院を営み、幾何学、算術、音楽、天文学を総合的に研究した〔26〕、〔34〕〕。ピュタゴラス的な意味での愛智＝哲学の目標は、人間の魂を浄化し、物質的・感覚的世界を超えて常に存在する永遠なる世界を観照し、永遠的なものとの交わりを育むことであった。そのための有効な教育手段の一つとして数学が用いられた。永遠の世界に属する非物質的な諸形相と第一の諸始元は言葉で教えることができないため— 禪的に言えば、言詮不及、不立文字 —、人間にとって最も身近な、非物質的で客観的な存在である数を介して説明するという方便がとられたのである〔34, 48 節〕。ピュタゴラスは「万象は数にかたどる」と述べたという〔26, 162 節〕。これは、現代的に敷衍するならば、諸々の現象は数学的法則にしたがって秩序づけられているということである⁽⁷⁾。

ピュタゴラスの思想と学問の流れを汲むプラトン（紀元前 427 年–347 年）もまた、数学を哲学の予備的学問として重要視した。プラトンがアテナイ郊外に創設した研究・教育機関アカデメイアの門の上には「幾何学を知らざるもの入るべからず」という文字が刻まれていたという〔22, 138 頁〕。プラトンは、幾何学の対象は思考による以外見ることのできない絶対的对象であり〔35, VI510D–511B〕、常に在る不生不滅の存在である〔35, VII527B〕と語り⁽⁸⁾、幾何学に親しむことを通して、弟子たちを存在の永遠なる契機へといざなうとした。

タレスから始まる論証幾何学は、以上のような歴史的熟成期を経て、ユークリッドによる『原論』〔18〕に結実する。これは人類史上画期的な著作の一つであり、数学史上、最初の大きなエポックをなすものである。この本は、内容的に見れば、それまでのギリシアとその周辺地域の数学（幾何学と数論）の集大成である。ここにおいて、今日、ユークリッド幾何学と呼ばれる幾何学体系が基本的完成を見たのである。だが、『原論』の真の

偉大さは、幾何学に関して、まったく新しい方法を創始した点にある。すなわち、定義・公準・公理という基本的枠組み（諸原理）を前提とし、純粹思考により、諸々の幾何学的対象に内在する理^{ロゴス}を探究するという方法である。この意味において、『原論』は現代数学における公理論的方法に通じる最初の理論体系と見ることができる。公理論的方法は、認識論的にも重要な意味をもつ。『原論』における定義・公準・公理は、プラトン哲学的な観点から言えば、ある根源的理念を表すものであり、その根源的な理念の自然な展開として、ユークリッド幾何学全体が統一的な仕方では認識されるのである。同時に、公理論的方法は、哲学的には、それまでの幾何学の物質界・感覚界からの全き解放を意味し、人間の意識を物質界・感覚界から自由にし、より高次の存在次元へ上昇させる手段の一つを万人向けに明示化したものと見ることができる。以上のような意味において、『原論』の登場は数学史および人類の精神史における画時代的な出来事の一つなのである。『原論』の哲学的意義についての更なる考察は本論文の第5節で行う。

2.2 第二のエポック

数学史における次の大きなエポックは、ニュートン（1643-1727）とライプニッツ（1646-1716）によってもたらされる。微分・積分の概念の発見である⁽⁹⁾。これによって、力学をはじめとする近代物理学の礎が築かれるとともに、自然認識に関して新しい飛躍がもたらされた。それまでは、物体の運動を原理的な形式で捉えることができなかったのであるが、微分・積分の概念の発見はこれを可能し、また純数学的には一般の曲線、曲面および立体を含む、より複雑な形態を研究する道を開いたのである。微分・積分には深い哲学的意味がある。これについては本論文の第6節で詳しく論じる。

2.3 第三のエポック

19世紀になると、それまで唯一の幾何学と思われていたユークリッド幾何学に加えて、ユークリッド幾何学における平行線の公理が成立しない、非ユークリッド幾何学が登場する。これは幾何学に対する観念を一変させるものであった。非ユークリッド幾何学は、ドイツの数学者リーマン（1826-1866）によって、抽象化された連続集合体 — 現代数学でリーマン多様体とよばれる対象 — の理論として統一的な形にもたらされた。幾何学を一般化された意味での“空間”の構造に帰着させたのである。リーマンによるこの仕事は、

幾何学史上、新段階を画するものであり、幾何学の理念に関して深い認識をもたらすとともに、アインシュタイン（1879-1955）の相対性理論（1905、1916）の数学的基礎付けにも役だった。ここに数学史における第3の大きなエポックが見てとれる。アインシュタインの相対性理論は、それまでのニュートン力学における時空概念を一新する革命的なものであり、哲学的にも重要な意味をもつ。これについては、本論文の第7節でより詳しく考察する。

2.4 第四のエポック

19世紀の後半において、カントール（1845-1918）が無限集合論を創始し、20世紀の数学の基本的特徴をなす集合論的・公理論的な思考法が徐々に現れてくる。ルベーグ（1875-1941）による測度論は画期的なものであり、数学における根本的な問いの一つであった「面積、体積とは何か？」に明解かつ深い解答を与えるとともに、リーマン積分に代表されるそれまでの古い積分論を一新した。ハウスドルフ（1868-1942）は、点どうしの“近さ”の概念の普遍形である位相（topology）の概念およびこれに基づく位相空間の概念を導入し、リーマン幾何学を特殊なクラスとして含む、一般位相幾何学への道を開いた（1914）。線型空間（ベクトル空間）の分野では無限次元のベクトル空間が扱われるようになる。こうして、20世紀に入って、数学の様々な分野において、公理論的な思考とともに、集合と位相および無限の概念が前面に出てくる。特に、位相と無限次元ベクトル空間の概念の結びつきは、現代数学の主流の一つとなる関数解析学（functional analysis）を生む。19世紀の後半から20世紀の20年代にかけて数学の大きな革命が静かに進行していたのである。

他方、19世紀後半から20世紀前半にかけて原子や分子からなる微視的世界に関する実験的研究が進み、微視的世界は、それまでに構築されてきた物理学 — 古典物理学 — の法則にしたがわないことが徐々に明らかになっていった⁽¹⁰⁾。たとえば、古典物理学では、光（電磁波）は波動であるが、微視的な領域では、粒子的に振る舞う場合もあることが明らかになった（この場合の粒子的な光を光子という）。この特性は波動・粒子の二重性と呼ばれる。やがて、原子を構成する電子や核子（陽子、中性子）もこの特性を有することが示唆された。原子の取り得るエネルギーが離散的であることも古典物理学では説明できない事象であった。こうした状況のもとで、原子以下の微視的な世界を支配する法則を記述する理論として登場したのが量子力学である。その最初の形態は、ハイゼンベルク（1925）

とシュレーディンガー (1926) によってもたらされた (ハイゼンベルクの理論は、ボルンとヨルダンによって補強される)。ハイゼンベルクの理論形式とシュレーディンガーのそれは外見上異なっていた。だが、どちらの理論でも物理的結果は一致した。この謎—実はここに量子現象を支配する理の本質が現れている—は、最終的には、量子力学の本質は正準交換関係と呼ばれる抽象的代数関係式の表現にある、と見抜いた天才の数学者フォン・ノイマンによって解決される [46]。フォン・ノイマンは、当時としては、まったく新しい数学の範疇である抽象ヒルベルト空間論⁽¹¹⁾をほとんど一人で構築し、この理論を用いて量子力学を数学的に基礎付けたのであった [45, 47]。抽象ヒルベルト空間の理論を初めて量子力学の本質が捉えられるとともに、量子力学のボルン-ハイゼンベルク-ヨルン形式とシュレーディンガー形式の同等性が厳密な形で証明されたのである。

抽象ヒルベルト空間の理論は関数解析学の中核をなす。こうして、微視的な世界の現象、すなわち、量子現象の背後に関数解析学的諸理念が控えていることが洞察されるとともに、それらの諸理念の探求により、存在に関する新しい認識がもたらされたのである。この側面については、第8節でより具体的に考察する。

3 存在に関する構造的モデル

数学的思考と数学的精神性に基づく認識の意味あるいは意義を存在認識の観点から考察するにあたっては、全存在界を思考の射程に入れておかなければならない。なぜなら、数学的理念界もまた全存在界の一部であり、東洋哲学が説くように、存在そのものは絶対無分節 [27, 28] だからである。そこで、先に進む前に、筆者が念頭に置いている存在一般に関する構造的モデルをここで提示しておきたい。

存在認知の最も初歩的な水準は、言うまでもなく、日常的に私たちの周囲に展開する世界の認知である。これは五感に基づく認知であり、物質的・感覚的である。この物質的・感覚的世界は、基本的に形態からなるので形而下の世界とも呼ばれる⁽¹²⁾。だが、注意深く観察すればわかるように、物質的・感覚的世界は、常に変化し、生成・消滅をともない、浮動して止むことはない。ひと言で言えば、無常である。この意味で、物質的・感覚的世界は現象界とも呼ばれる。いま言及した事実によって、現象界を形成する要素は厳密な意味においては在るとは言えない。このことは、すでにピタゴラスの時代から認識されていた。ピタゴラス自身、生成し消滅するものは、真実には決して在ることがないもので

あると語り [26, 159 節]、ヘラクレイトスは「万物は流転し、何物もとどまらない」と述べた [32, 274 頁]。プラトンもピュタゴラスの言と本質的に同じことをティマイオスに語らせている [38, 28AB]。仏教では、いま言及した現象界の特性を無自性^{むじしょう}という言葉で表す。ゲーテは「過ぎ行くもの、移ろうものはすべて比喩である」と語った [19, 12104-12105]。

上述の事柄を反対側から照射すれば、真に在るものとは、生成・消滅ということをせず、常に同一性を保つもの、すなわち、永遠的なものであり、また、素材をともしなわなない、非物質的・非感覚的なものであるということになる。そこで、真の存在界あるいは真実在界をここでは一括して仮に非現象界と呼ぶ。非現象界については、認識する側面に応じて、古来、いくつかの名称が付与されてきた。このことも考慮して、たいへん大まかな捉え方であるが、次のような存在構造モデルを提示したい（表1）。だが、ここで注意しなければならないことは、現象界-非現象界の区別はあくまで便宜的なものであり、存在の

非現象界 (常在)	精神界・超感覚界	… 形而上 …	理念界	… 不可視 …	非言語的
	↓ ↑	↓ ↑	↓ ↑	↓ ↑	↓ ↑
現象界 (無常、現成)	物質界・感覚界	… 形而下 …	現象	… 可視 …	言語的

表 1: 全存在界の構造的モデル

全一性・絶対無分節性により、現象界と非現象界は二つで一つ（不二）であるということである。この存在一性の内的構造を象徴的に示したのが表1における記号 $\uparrow\downarrow$ である。上から下へ向かう矢印 $\downarrow$ は非現象界から現象界へ向かう働きを表しており、下から上へ向かう矢印 $\uparrow$ は現象界の事物・事象が非現象界へと帰一することを表す。井筒俊彦の存在分節論 [29] の術語を用いるならば、 $\uparrow\downarrow$ は現象界-非現象界の究極にある絶対無分節の状態 — プロティノス流に言えば「一者」 — の現象的分節を表す。大乘仏教的な認識 [16, 21] から言えば、現象界は色^{しき}、非現象界は空^{くう}であり、 $\uparrow$ は「色即是空^{しきそくぜく}」を表し、 $\downarrow$ は「空即是色^{くうそくぜしき}」を表す。また、すでに2.1項で示唆したように、非現象界は、物質的・感覚的世界に適している通常の言葉では語り得ぬものであり、この意味で非言語的である。したがって、非現象界の消息は比喩的、象徴的、隠喩的、詩的に語るほかない。本論文における非現象界についての語りもこの意味で受け取られねばならない。比喩的に言えば、現象界は非現象界をヴェールのように覆っているのである。

以上から、物質的・感覚的世界に留まる限り、真の存在にまみえることは不可能であることがわかる。五感に映る世界が“実在”であるとおもうのは、仏教的に言えば、妄念以外のなにものでもなく、まさに「顛倒夢想」[21]なのである。では、いかにして物質的・感覚的世界を超脱し、真の存在あるいは真理へ到達できるであろうか。すでにピュタゴラスとプラトンに言及したときに示唆しておいたように、その一つの道を提供するのがまさに数学の実践なのである。なぜなら、数学の対象は、非物質的・非感覚的で常に在るものであり、数学を実践することにより、感覚に依拠しない思考を習得し、思考しつつ理念の世界で活動する精神性が養われるからである。この精神性は数学的理念界に限定されない全一的な意味での存在認識・真理認識にも適用され得る。このことに注目するとき、現象界を超えるより高次の世界へ参入するための普遍的な精神性と意識の在り方が見えてくる。以下、この点についてもう少し詳しく述べてみたい。

存在認識・真理探究の源泉は、ソクラテスが語るように、まず驚きのところにある[37, 155D]。存在の謎、自己の謎にうたれることである。この驚きのところ、世界に開かれたところから、世界存在を成り立たせている根拠に対する畏敬の念が生まれてくる。言うまでもなく、真理は存在の側にあるのであるから、真理を把握するには、個人的な思惑、好悪、共感・反感、恣意、利己性を離れて、囚われない注意深い観察と厳密な思考にしたがわなければならない。ひと言で言えば、利己的な自己、個人的な自己を離れて、存在の側に自らを合わせるのである。このとき、高次の意識状態が準備され、真理を受け取る用意がなされる。個人的な自己、利己的な自己から抜け出することは可能であり、これによって、高次の自己、すなわち、普遍的自己の存在に気付くと同時に、意識は普遍的＝宇宙的認識の場へと移行するのである。この意味において、存在・宇宙認識は真の自己認識——こじきゅうめい 禪的に言えば、己事究明——とつながるのである。ところで、このような精神の働きを養う優れた方法の一つが数学の実践なのである。なぜなら、数学的真実は、個人的な立場を超えた真理だからである。

前段で述べたような意識と精神の在り方は、古代哲学がすでに説いていたものであり、特に、ピュタゴラスの哲学、プラトンの哲学、そして仏教に顕著に現れている。たとえば、ソクラテスは次のように語る。「したがって、最も純粋な認識に到達し得るのは、次のようなものではないか。すなわち、できるだけ思惟そのものだけを用いてそれぞれの対象に近づき、視覚を思惟の助けに用いたり、そのほか何らかの感覚をひっぱりこんで思惟と一緒に用いたりせず、純粋な思惟そのものを用い、それぞれの対象を純粋にそれ自体と

して追求しようとして、目や耳やいわゆる肉体全体については、これらと共にあれば、魂は掻き乱され、真実と智慧とを得ることができないとして、それからできるだけ離れる者ではないか」[36, 65E, 66A]。仏教に関しては、道元（1200-1253）の言葉を引用しよう。「自己をはこびて方法^{まんぼう}を修証するを迷とす、方法すすみて自己を修証するはさとりなり。」[17, 現成公案]（個人的な立場からあれこれ思案して、存在の真実を明らかにしようとするのは迷いであり、存在の方からおのずと真実が明らかなるのが真の認識である。）

これまでの叙述が暗示するように、意識と存在は不可分の関係にある。このことはすでに仏教において明確に示されている[14, 第三章]（他の東洋哲学[28]においても同様）。すなわち、意識状態には様々な階梯があり、各々の階梯に応じて一定の界が存在するのである。最も低次の意識状態は五感に基づく日常の意識状態であり、これには物質的・感覚的世界が対応する。この意識の範疇を表層意識と呼ぶ。表層意識の上に高次の意識の諸段階が存在する。いくつかの例を表2に示す。ここでは、表2の用語について説明する

意識の階梯	対応する存在領域	
7. 涅槃 ^{ねはん}	涅槃界（輪廻界の外）	
-----	-----	-----
6. 非相非非相処 ^{ひそうひひそうしよ}	意識と無意識を超越した界	↑
5. 無所有処 ^{むしよゆうしよ}	虚無の界	無色界 ^{むしきかい}
4. 識無辺処 ^{しきむへんしよ}	精神的意識の無限性の界	
3. 空無辺処 ^{くうむへんしよ}	虚空の無限性の界	↓
-----	-----	-----
2. 地水風火	現象界の生成と直接結びつく界	
1. 表層意識	物質界・感覚界	

表 2: 意識の階梯の例

余裕はないが非現象界は多層的であり、意識の階梯3～6に対応する無色界 — 超感覚的な意味での無形態の領域 — は非現象界の非常に“高い”位置に属することだけを注意しておこう。表2に記した意識状態以外にもいろいろな意識状態があり、それらに対応する存在領域がある（詳しくは[14, 第三章]を参照）。

井筒俊彦は、その名著『意識と本質』[27]において、東洋哲学の共時的構造を取り出し、

存在の現れ方（分節）は意識の在り方に応じていることを微に入り細に入り例証した。

仏教や他の東洋哲学および井筒俊彦の仕事が示すのは、表層意識の世界、すなわち、私たちの周囲に展開する物質的・感覚的世界は、全存在から見れば、薄い表皮のようなものにすぎないということであり、他方、表層意識の“上方”または“下方”には測り知れない世界が存在しているということである。数学的理念界もまたそのような世界の一つなのである。

4 現象界とコスモス

前節で指摘したように、現象界は無常であり、現象界の事物・事象は真に在るとは言えない。だが、人は、認識において、この次元から出発するばかりではない。そこで、まず、現象界の基本的特徴について考えてみる。認識の観点から見た場合、現象界の基本的特徴の一つはその相対性である。通常、物体の運動の相対性 — 運動の概念は、静止点をどこかに指定して初めて意味をもつということ、そして、静止点は任意に指定し得るということ — だけが指摘されるくらいがあるが、実はもう一つ、見過ごされがちな根本的な相対性がある。それは、知覚像の相対性である。知覚像は、知覚する者の知覚組織（人間や動物の場合で言えば物質的身体組織）に依存しているのである。仏教はすでにこの相対性を見抜いており、道元はこれを「随類の所見不同」（異なる生類の見る所は同じではない）という言葉で表す[17, 山水経]。たとえば、人が「水」と見るものを魚は「宮殿」と見、天人は「玉飾り」と見るという。ゲーテの言葉「現象というものは観察者と別個に存在しているのではない。むしろ、それは観察者の個性と絡み合い、纏れあっている。」[20, 104-105頁]も知覚像の相対性の別の言い方と見ることができよう。ゆえに、この意味においても、現象界は存在の真の姿を示してはいないのである。

では、現象界はまったく取るに足らないものなのであろうか。否、決してそうではない。精密な機械を用いなくても、注意深く観察すればわかるように、現象界は、“流れている”とはいえ、秩序、調和、リズムに満ちている。心臓の鼓動、呼吸、昼と夜の交代、月の満ち欠け、太陽や惑星の運行、季節の循環などはリズム的秩序の典型的な例であるし、種々の階層性 — 鉱物界-植物界-動物界-人間界、地球界-惑星界-恒星界、地水火風 など — はある種の秩序と調和の例である⁽¹³⁾。ピュタゴラスは、全宇宙あるいは天をコスモス（整然たるもの、美しきもの）と呼んだ最初の人であると伝えられるが[26, 162節, 180頁脚

注 (1)], それは、現象界の秩序、調和、リズムをその特殊な現れとして含む、より広い範囲にわたる総合的な意味での宇宙的秩序を観照することができたからであろう。プラトンは、同様のことを「最も偉大で、最も善く、最も美しく、最も完全なものとして、この宇宙＝コスモスは誕生した。」[38, 92C] という形で述べている。プラトンの哲学によれば、現象は、常に在るもの、すなわち、イデアに“似せて”象られている。このことははっきりと述べたのが次のゲーテの言葉 [20, 114 頁] である。「理念とよばれるものはつねに現象としてあらわれるものであり、それゆえ、あらゆる現象の法則としてわれわれの前に登場する。」旧約聖書には「神がその造られたすべてのものをご覧になると、見よ、非常によかった」と記されている [33, 第1章31]。

ピュタゴラスのコスモスという理念は、実は、自然科学の基本的動機を与えるものである。なぜなら、自然科学は自然現象のうちに秩序が存在することを予想し、それを明らかにしようとするものだからである。したがって、この意味において、ピュタゴラスは自然科学の始祖とも言い得る。

現象界の無常性は、ともすれば、“通俗的仏教”のように、否定的あるいは感傷的に捉えられがちである。だが、筆者は、むしろ、この無常性こそ、宇宙の神性を表すものであると実感している。外界には宇宙の偉大な力が活動し、私たちはその力の中に“浸って”いる。自然界は、一瞬一瞬、常に新しく創造的である。そこには厳密な意味での繰り返しはなく、諸理念が、真、善、美をともなって躍動的に滞りなく自律的に展開している。道元はこの事態を力強く次のように語る [17, 山水経]。「而今の山水は古仏の道現成なり。ともに法位に住して、究尽の功德を成ぜり。」（今ここに見られる山水は真理の現れである。山も水もそれぞれの存在的位置を占めつつ、どこにも切れ目のない全体露顕的な働きを表している⁽¹⁴⁾）。

コスモスの客観的定立は、まずは、誰にも共通する量的なものによってなされる。事物・事象の数量的側面の確定は数量的関係を導き、そこから事物や事象にそなわる数的法則性が認知される。これが事物・事象に関する数学的認識の原初的な形である。次に、事物・事象から離れて、そこに現れている法則性を純粋に理念的に捉えることにより、現象とは独立に、純粋思考により、内的・自律的に数学の内容を宇宙から“汲み出す”ことができる。このようにして、現象と理念に対する双方向的精神運動によって、数学およびこれに基づく自然認識が形成される。自然現象を数学的に定式化することにより、自然現象について、感覚的考察を超える叡智が得られるのである。

5 ユークリッド幾何学の形而上性

ユークリッドの『原論』の哲学的意義の根幹的な部分については2.1項で述べた。この節では、ユークリッド幾何学の形而上的性格をより具体的に示したい。そこで、『原論』に載っている次の定義を考察する。

1. 点とは部分をもたないものである。
2. 線とは幅のない長さである。
3. 線の端は点である。
4. 面とは長さと幅のみをもつものである。

物質的・感覚的知覚に基づく悟性的な思考しかできない人は、ここでただちに躓くかもしれない。なぜなら、部分をもたないもの、幅のない長さ、長さのみをもつものは物質的・感覚的世界には見られないので、そのようなものを考えることができないからである。だが、1, 2, 4は、それぞれ、点、線、面は非感覚的・非物質的 — 超感覚的 — なものであることを宣言していると読むべきなのである。表1に示しておいたように、形而上的次元の事柄は、物質界・感覚界において使われる言語で表現することは難しいので、一見無意味であるような言葉使いで象徴的に表すほかはないのである⁽¹⁵⁾。こうして、『原論』の定義において、ユークリッド幾何学の形而上性・超感覚性がはっきりと示されていることがわかる。なお、上記3は点、線、端の関係を述べている。

ユークリッド幾何学のより完全な公理化は、ドイツの偉大な数学者の一人ヒルベルト(1862-1943)によってなされた(1899)[24]。この公理系では、点、直線、面が“何”であるかは問われない。本質的なのはそれらの関係性である。確かに、この認識は、論理の観点からは、重要である。だが、“点”、“直線”、“面”の形而上的存在性が洞察されないのであれば、そのような公理論は単なる論理の遊戯でしかなく、それは論理学ではあり得ても宇宙理念の一部を担うリアリティとしての数学ではない。他方、ヴァイル(1885-1955)は、アファイン空間の理論として、ユークリッド幾何学の公理化を行った(1922)[39, 附録, §4]。ヴァイルの公理系の方が、ヒルベルトのそれよりもはるかに簡明であり、しかも、点、線、面等々に対して、形而上的な意味での存在性が復活している。

上述の定義から、たとえば、紙の上に鉛筆で描いた物質的な意味での3角形は、真の3角形ではないことが結論される。なぜなら、その3角形の頂点は部分をもつし、辺は長さ

だけでなく幅ももつからである。だが、紙の上に描かれた3角形は無価値ではない。まさにそれによって真の3角形へと至るいわば手段が得られるからである。現象界における物質的・感覚的な3角形は理念としての3角形の現れなのである。他の図形についても同様である。

ユークリッド幾何学の対象が存在する空間はユークリッド空間と呼ばれる形而上的空間である。この空間には、一切のユークリッド幾何学的事物・事象があますところなく形相的存在可能性において包蔵されている。ユークリッド幾何学における定理の証明の本質は、ユークリッド幾何学のアイデアが“びっしり”詰まった、この形而上的空間において、定理の対象となる図形と“自然な”関係を有する幾何学的構造を躍動的思考によって顕在化させることにある。このことにより、物質的・感覚的次元では見えない理が形而上的次元に移行することにより明らかになるのである。この場合重要なのは、幾何学的対象の自然な理念的な動きを洞察することである。筆者は、そのような自然な理念的な動きを自律的展開または自発的展開と呼ぶ⁽¹⁶⁾。一つの個別的な図形の背後には無数の幾何学的配位が存在しており、この全体に意識を向けることが重要なのである。

6 数学と自然認識における飛躍(I) — 微分・積分とニュートン力学

ユークリッド幾何学は、自然認識の観点からは、あるクラスの形に潜む理を明るみに出すという意味で“形の物理学”の一種と見ることができる。この場合の“形”は有限なものであり、感覚的に見通せるものである。だが、有限なものへの考え方では、物体の運動や複雑な形態を扱うことはできない。運動に関するいわゆるゼノンのパラドックス—「アキレスは亀においつけない」、「運動は存在しない」、「飛ぶ矢は止まっている」など—はそれを如実に表している⁽¹⁷⁾。しかし、ニュートンとライプニッツによって発見された微分・積分の概念から展開される理論は、物体の運動や複雑な形態の図形を扱うことを可能するとともに、哲学的にも深い認識をもたらす。以下、この側面について叙述する。

まず、物体の運動とはそもそも何かということを考えてみる。それは、視覚的には、物体が時間の経過とともに空間内の位置を変えていくことである、と言える⁽¹⁸⁾。物体の中に1点P(通常、重心)を定めておけば、当の物体の運動はPの位置の時間変化として記述できる。このような点を質点とよぶ。質点の位置の変化は空間内に一つの曲線を描く。

ゆえに、物体の運動は、物体を質点とみなしたとき、空間内の曲線によって記述される。この種の曲線 — 運動曲線 — の典型的な例として、円、楕円、放物線、双曲線がある。では、運動曲線はどのようにして決まるのであろうか。この根源的な問いに原理的な解答を与える鍵概念が微分・積分なのである。

6.1 微分・積分の哲学的意味

先に進む前に、関数のうちで最も初歩的な1変数関数の連続性と微分可能性の概念を復習しよう。実数全体の集合を $\mathbb{R}$ で表し、 J を $\mathbb{R}$ の区間⁽¹⁹⁾とする。 f を J 上の関数、すなわち、 J の各点 x に対して、実数 $f(x)$ を割り当てる対応とする。定数 a と異なる実数 $x \in J$ が a に限りなく近づくとき、その近づき方に依らず、 $f(x)$ がある値 α に限りなく近づくならば、 $f(x)$ は、 x が a に限りなく近づくとき、極限值 α をもつといい、このことを記号的に $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ と記す⁽²⁰⁾。さて、 $a \in J$ とする。

(i) (連続性の定義) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ が成り立つとき、 f は $x = a$ で連続であるという。 f が J のすべての点で連続であるとき、 f は J 上で連続であるという。

(ii) (微分可能性の定義) 極限值 $f'(a) := \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ が存在するとき⁽²¹⁾、 f は $x = a$ で微分可能であるいい、実数 $f'(a)$ を a における f の微分係数または単に微分という。

関数 f の $x = a$ における連続性は、直観的には、 x が a が近づけば、 x における f の値 $f(x)$ は a における f の値 $f(a)$ に近づくということを意味する。これは、感覚的には、 f のグラフ $G_f := \{(x, y) | y = f(x), x \in J\}$ (単に曲線 $y = f(x)$ という言い方もする) が $x = a$ で“つながっている”というイメージである⁽²²⁾。他方、微分 $f'(a)$ の方は、形式的・象徴的に $\frac{0}{0}$ であるので、視覚的にイメージすることは不可能である。これは、哲学的に言えば、微分という演算が観察不能領域に突入する演算であることを意味する。この事態をより正確に捉えるために、幾何学的考察を行う。

図1における幾何学的位置関係から読み取れるように、 a における微分係数 $f'(a)$ は点 $(a, f(a))$ における曲線 $y = f(x)$ の接線 ℓ の傾きを表す。そして、点 $(a, f(a))$ にベクトル $(1, f'(a))$ — $\nearrow$ で表される矢線ベクトル—が付随しているのがわかる。このベクトルを点 $(a, f(a))$ における曲線 $y = f(x)$ の接ベクトルという。無論、このベクトルは感覚的には

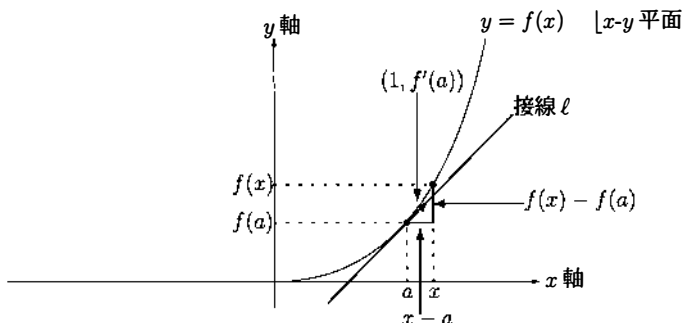


図 1: 微分係数の幾何学的意味

不可視の存在である（矢線は単なる象徴的表示である）。観察不能領域に突入する微分によって不可視の接ベクトルへと至るのである。

いま、簡単のため、 $J = \mathbb{R}$ の場合を考え、 f が $\mathbb{R}$ のすべての点 x で微分可能であるとしよう。この場合、 $f'(x)$ を x の関数とみることができる。この関数 f' を f の導関数という（ $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$ という記法も使用される）。すると曲線 $y = f(x)$ 上の各点 $(x, f(x))$ にベクトル $(1, f'(x))$ が付随していることになる。微分積分学の基本定理によって

$$f(x) = \int_0^x f'(t) dt + f(0)$$

が成り立つ。ここで、右辺第 1 項は導関数 f' の区間 $[0, x]$ における定積分を表す⁽²³⁾。これは関数 f がその導関数 f' から復元できることを示す式である。この意味で積分の演算は微分の逆演算なのである。

次に、各点 x での微分係数が $f'(x)$ に等しい関数、すなわち、方程式 $F'(x) = f'(x)$ を満たす関数 $F(x)$ を考える。微分学の基本定理により、このような関数 $F(x)$ は $F(x) = f_C(x) := f(x) + C$ に限ることがわかる。ただし、 C は任意定数である。関数 f_C のグラフ $G_{f_C} = \{(x, y) | y = f_C(x), x \in \mathbb{R}\}$ は f のグラフ G_f を y 軸方向に C だけ平行移動したものである。

一般に、平面の各点 (x, y) に一つのベクトル $u(x, y) := (u_1(x, y), u_2(x, y))$ ($u_1(x, y), u_2(x, y) \in \mathbb{R}$) を割り当てる対応 $u : (x, y) \mapsto u(x, y)$ を平面上のベクトル場という。

上述の議論で登場した接ベクトル $(1, f'(x))$ から、対応 $u_f(x, y) := (1, f'(x))$ によって一つのベクトル場が定まる（図2を参照）。そして、このベクトル場の積分により、曲線

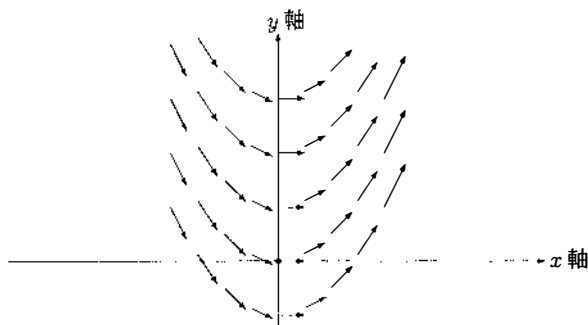


図 2: 曲線群 $y = \frac{1}{2}x^2 + C$ (放物線群) のベクトル場、 $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ の場合

群（曲線の集り） $\{G_{f_C} | C \in \mathbb{R}\}$ が得られるのである。このことを曲線群 $\{G_{f_C} | C \in \mathbb{R}\}$ はベクトル場 u_f によって生成されるという。この曲線群の要素のうちどれが生成するかは $x = 0$ での値 — 初期条件 — によって決まる（ $f_C(0) = f(0) + C$ であるから、 $f(0)$ はすでに定まっているとすれば、 $f_C(0)$ を定めることと定数 C を一つ定めることは同値であることに注意）。初期条件を定めると同時に曲線が一意的に定まるのである。

曲線群は、有形という意味では、可視的であるが、ベクトル場は、無形という意味で、不可視である（図2では形があるように見えるが、この形は曲線の近似形にすぎない。そもそもベクトル場を描くことはできない。図2はあくまでも象徴的な図である）。これを哲学的に読むならば、曲線群は物質的・感覚的世界と直接連なり、ベクトル場は超感覚的な存在であるということである。

ここで興味深いことは、ベクトル場の存在次元に移行すると、もはや曲線は消え、これを生成するベクトル場だけが精神の眼に見えるということである。ここに、仏教でいう「色即是空」のより具体的な消息が知られるのである。すなわち、曲線を「色」とすれば、それは超感覚的次元では無となり、「空」の一つの状態が出現する。だが、この「空」は決して消極的な無ではなく、感覚的には表象できない超感覚的なベクトル場が存在する充実した状態なのである。これは「真空妙有」と呼ばれる存在性の一形態でもある。こ

の充実した状態において、縁（初期条件）が与えられれば、ただちに「色」が現れるのである。これが現文脈での仏教的「縁起」の真の意味である。

以上の考察により、次の洞察へと導かれる。すなわち、形而上的空間は、創造の力と秩序に満たされて、まさに一触即発で形態ができあがる—感覚的世界が現れる—状態にある“生きた”空間である。

微分積分学の認識論的意義を要約すれば次のようになる。

(1) 絶えず感覚不可能なものから感覚可能なものが発生してくる瞬間に向かい合う。

(2) 明晰な仕方で超感覚的な根源から感覚的世界を把握する。

このことを象徴的に表すと図3のようになる。

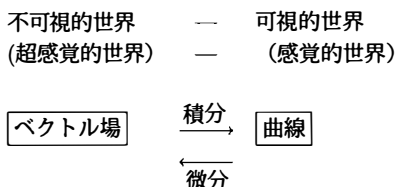


図 3: 微分・積分の働きに関する象徴図

6.2 物理学への応用 — ニュートン力学

この項ではニュートン力学の基本構造とその認識論的側面を簡単に見ておく。すでに述べたように、質点の運動は空間内の曲線によって表される。この空間は、数学的には、3次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3 := \{(x, y, z) | x, y, z \in \mathbb{R}\}$ によって記述される。各時刻 $t \in \mathbb{R}$ での質点の位置を $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ としよう。ここで、 $x(t), y(t), z(t)$ はそれぞれ、 $\mathbf{r}(t)$ の x 座標、 y 座標、 z 座標を表し、 t の関数である（図4を参照）。いま、 $x(t), y(t), z(t)$ は t に関して2回微分可能であるとすると。位置ベクトル $\mathbf{r}(t)$ の導関数

$$\mathbf{v}(t) := \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

は時刻 t での速度と呼ばれる。この速度は時刻 t での瞬間の速度を表すものであり、感覚的知覚に基づく通常の悟性では捉えられない。微分概念により、瞬間速度の概念が把握されたことは運動の真の認識における画期的な一歩であったのである⁽²⁴⁾。

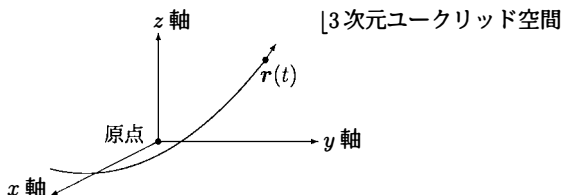


図 4: 質点の運動曲線

ニュートン力学の範疇では、位置と速度の組 $(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t))$ が運動の状態を定める。速度は位置の微分であるから、超感覚的なものである。したがって、運動の状態は、いわば、“半分”感覚的世界にあり、“半分”超感覚的な世界にあると言える。

位置変数 $\mathbf{r}$ と速度変数 $\mathbf{v}$ の組 $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ —または位置変数 $\mathbf{r}$ と運動量変数 $\mathbf{p} := m\mathbf{v}$ ($m > 0$ は質点の質量) の組 $(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ — の全体からなる集合は相空間とよばれる。これは $3+3=6$ 次元の空間である。経験から、運動量の変化を引き起すのは“力”であることが認知される。一方、“力”は数学的にはベクトルで表される。“力”が相空間に“分布”しているとき、これを力の場とよぶ。力の場は相空間上のベクトル場であり、 $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) := (F_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}), F_2(\mathbf{r}, \mathbf{p}), F_3(\mathbf{r}, \mathbf{p}))$ という形で与えられる。力の場 $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ が与えられたとき、運動の生成の仕方を定めるのがニュートンの運動方程式

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t), \mathbf{p}(t))$$

である ($\mathbf{p}(t) := m\mathbf{v}(t)$)。これは、象徴的には、運動量の瞬間変化率=力、と表される。

ニュートンの運動方程式は $\mathbf{r}(t)$ に関して 2 階の常微分方程式であるので ($d\mathbf{p}(t)/dt = m d^2\mathbf{r}(t)/dt^2$ に注意)、常微分方程式の一般論の応用により、初期条件 $(\mathbf{r}(0), \mathbf{p}(0))$ または $(\mathbf{r}(0), \mathbf{v}(0))$ を決めれば、解の存在と一意性が成立する時間内において、運動曲線が一意的に決定されることがわかる。初期条件を決めなければ、運動方程式を積分することにより、原理的に、力の場 $\mathbf{F}$ の作用のもとで可能なすべての運動曲線群が得られる。こうして、不可視の力の場から、その積分を通して、感覚的世界の運動曲線が生成される構造が明らかになる。表 3 に力の場の例とそこから生成される運動曲線の例をいくつかあげておく。

以上の考察により、微分可能な曲線で記述される運動に限定した範囲ではあるが、力の

力の場	運動形態	運動曲線
地球の重力場	落下運動	直線または放物線
太陽の重力場	惑星の運動	楕円
古典電磁場	荷電粒子の運動	螺旋運動、その他

表 3: 力の場、運動形態、運動曲線の例

場という超感覚的な源から、感覚界の運動が生成されるという認識が得られる⁽²⁵⁾。こうして、より一般的には、物理現象を超感覚的な根源から理解するという叡智の存在が洞察されるのである。世界・宇宙は力の場に満ちており、この存在水準 — 現象界の“すぐ背後に”ある形而上的空間 — では妨げあうものは何もなく、“浸透しあっている”。華嚴哲学的に言えば、まさに事事無礙 [28, 五章] の風光である。たとえば、電磁場と重力場は妨げあうことなく共存している。これは物質界と異なる重要な特性の一つである。

上の論述では、ニュートン力学的運動が行われる時空、すなわち、ニュートン力学的時空の概念については言及しなかったが、ここで、それについて簡単にふれておこう（詳細については [12, 1.16 節] を参照）。構造論的に言えば、ニュートン力学的時空は、4 次元ベクトル空間 X を基準ベクトル空間とする 4 次元アファイン空間 $\mathcal{A}(X)$ ⁽²⁶⁾（これ自体は絶対無分節空間）から、ある分節として現れてくる。具体的には、 X 上の零でない線形汎関数ごとに時間間隔（1 次元空間）と 3 次元空間が分節されるのである。この分節構造から、時空全体 $\mathcal{A}(X)$ は同時事象空間—同じ時刻に起こる事象の全体—の直和に分解される（ファイバー分解）。同時事象空間には事象間のユークリッドの距離が定まる。この構造—ガリレイ構造—を備えた $\mathcal{A}(X)$ を 4 次元ガリレイ時空と呼ぶ。4 次元ガリレイ時空は同型を除いてただ一つであることが証明される。ガリレイ時空における時間座標は空間座標と独立している。すなわち、空間のあらゆる座標系に対して共通の時間座標が定まる。

ところで、ガリレイ時空を定める、時間間隔と空間の分節構造は、時間と空間を一つの対^{ついで}として出現させる。つまり、時間と空間は存在論的に“同時的”である。この意味において、時間即空間、空間即時間なのである。これは、道元の「有時」（時すでにこれ有なり、有みな時なり）[17, 有時] を想起させる。さらに、ガリレイ時空のファイバー構造は、時間の“流れ”を一瞬一瞬の空間の継起として認識すべきことを示唆する。これは次の道元の言葉と照応する。「薪は薪の法位に住して、さきありのちあり、前後ありといへども、前後際断せり。」[17, 現成公案]。

7 数学と自然認識における飛躍(II) — ミンコフスキー空間と相対性理論

第2.3項で述べたように、19世紀後半において、ユークリッド幾何学的対象が存在するユークリッド空間とは異なる空間の存在がリーマンによって明らかにされるとともに、より普遍的な幾何学の構築が開始された。この新しい幾何学の理念は、物理学における革命的理論の一つである相対性理論と結びついた。そこで、この節では、特殊相対性理論の基礎となる時空概念とその哲学的含意について若干の考察を行う。

特殊相対性理論は、質点や電磁場の運動を4次元ミンコフスキー空間 — 4次元ミンコフスキーベクトル空間 M^4 を基準ベクトル空間とする4次元アフィン空間 $\mathcal{A}^4$ — における運動として捉える。4次元ミンコフスキー空間は特殊相対性理論の文脈では4次元ミンコフスキー時空とも呼ばれる。4次元ミンコフスキー空間 $\mathcal{A}^4$ に観測の基準点の一つ定めることにより、質点の運動を M^4 の曲線として記述できる。この曲線を運動曲線または世界線という。

特殊相対性理論も、ニュートン力学の場合と同様に、座標から自由な絶対的な形式で記述できる [6, 8 章]。だが、ここでは、まず、 M^4 がユークリッド空間とは異なることを座標形式で見る。 M^4 における基本的座標系としてローレンツ座標系がある。この座標系では、 M^4 の任意の点 u は4個の実数の組 (x^0, x^1, x^2, x^3) で表される。このことを $u(x^0, x^1, x^2, x^3)$ と記す。そして、 M^4 の2点 $u(x^0, x^1, x^2, x^3)$, $v(y^0, y^1, y^2, y^3)$ の間の計量 — ミンコフスキー計量 — $g(u, v)$ は

$$g(u, v) = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3$$

で与えられる。したがって、特に

$$g(u, u) = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2.$$

これは、幾何学的には、原点 0 と u までの距離の2乗に相当するものである。だが、右辺の第2項、3項、4項にマイナスの符号がついているために、 $g(u, u)$ は正にも負にも0にもなり得る。すなわち、ミンコフスキー計量 g は不定計量なのである⁽²⁷⁾。この計量的構造によって、ミンコフスキー空間 $\mathcal{A}^4$ の幾何学はユークリッド幾何学とは根本的に異なるのである。

さて、 M^4 における質点の運動を考え、その世界線を $\gamma = \gamma(s)$ ($s \in [a, b]$, $a < b$) としよう。実数 s は曲線 γ を表すパラメータであり、現段階では単なるパラメータである。曲線 γ 上の点 $\gamma(s)$ での γ の接ベクトルを $\dot{\gamma}(s) \in M^4$ とする⁽²⁸⁾。まず、接ベクトルの計量 $g(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s))$ が常に正であるような運動を考えよう。この場合、点 $\gamma(a)$ から点 $\gamma(s)$ までの曲線 γ のミンコフスキーの長さが

$$L_\gamma(s) := \int_a^s \sqrt{g(\dot{\gamma}(\sigma), \dot{\gamma}(\sigma))} d\sigma$$

によって定義される。これは座標系の取り方に依らない絶対的な幾何学的量であり、 γ の向きを定めれば、 γ のパラメータ表示にも依らない。いま、 M^4 の点のローレンツ座標系での表示の各成分 x^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) は、物理的照応において、長さの次元をもつとしよう。このとき、 $L_\gamma(s)$ も長さの次元をもつ。ところで、長さの次元をもつ量から時間の次元をもつ量を導くには、速さの次元 [長さ]/[時間] をもつ普遍定数で割ればよい。そこで、 $L_\gamma(s)$ から時間量を導出するための公理論的要請として、そのような普遍的定数を有する存在を仮定するのは自然である。筆者は、実はその存在こそ光なのであり、真空中の光の速さ c がその普遍定数であると考えている。こうして

$$\tau := \frac{L_\gamma(s)}{c}$$

によって、座標系の取り方に依存しない、時間の次元をもつ量 τ が定義される。これを目下の質点運動の固有時という。ゆえに光の存在と絶対的時間の現れが結びついていることがわかる。こうして、特殊相対性理論では、時間の起源と関連して、光の存在が根源的な意味をもつのである⁽²⁹⁾。

特殊相対性理論の絶対的形式の水準では、時間は座標系の取り方によらない固有時であり、日常的な意味での時間と3次元的空間は現れない（“内在”している）。それらは、ローレンツ座標系をとってはじめて現れるのである。具体的には次のようになる。ミンコフスキーベクトル空間 M^4 の点のローレンツ座標系での座標表示（成分表示） (x^0, x^1, x^2, x^3) における数ベクトル (x^1, x^2, x^3) を私たちの周囲にある空間内の位置を表す座標と解釈する（このために、 x^0, x^1, x^2, x^3 は、物理的照応において長さの次元をもつとした）。一方、第0成分 x^0 については、 $t = x^0/c$ によって時間の次元もつ変数が定義されるので、これを目下の座標系における時刻を表す変数と解釈するのである。 t を時間座標または座標時間と呼ぶ。だが、座標表示は座標系が変われば変化し得る。ローレンツ座標系の場合、特

に重要なことは、新しいローレンツ座標系の時間座標は、一般には、旧ローレンツ座標系の時間座標に等しくなく、旧ローレンツ座標系の空間座標にも依存する。空間座標についても同様である。これは、空間座標だけでなく、時間座標も含めて、時間と空間が相対的であることを示す。空間座標の相対性はニュートン力学でも存在する。特殊相対性理論の新しい点の一つは座標時間も相対的であることが導かれることである。

以上から、日常的な意味での時間と空間は、全一的空間としてのミンコフスキー空間にローレンツ座標系をとること — このことの物理的対応は現象界から世界を眺めるということである — により発現することがわかる。これを逆に見れば、ローレンツ座標系をとらなければ、時間も空間もないのである（ただし、すでに注意したように、絶対的時間としての固有時は存在する）。これもまた「色即是空」の一側面である。この意味で、通常的时间と空間は、ミンコフスキー空間のある種の分節形式なのである。筆者は、分節として現れる時間と空間の絶対無分節の源泉としてのミンコフスキー空間を時空融合体と呼ぶ[6, 358 頁]。これは絶対的・形而上的領域の一つをなす。

上で考察した運動は、 $g(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s)) > 0$ を満たすものであった。この型の運動は時間的運動と呼ばれる。これは接ベクトル $\dot{\gamma}(s)$ がミンコフスキー空間（厳密に言えば点 $\gamma(s)$ における接ベクトル空間）の時間的領域にあることによる⁽³⁰⁾。時間的運動は通常観測される運動であり、時間的運動における質点の空間的速さ（ニュートン力学的速さ）はつねに光速 c よりも小さいことが示される。したがって、質点の時刻 t での空間的速さを $v(t)$ とすれば $1 - \frac{v(t)^2}{c^2} > 0$ 。ゆえに、その平方根 $\sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}}$ が定義される。そして、固有時間 τ と座標時間 t との関係は

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}}$$

によって与えられる [6, 369 頁]。したがって、質点の空間的速さが光速に比べて十分小さければ、 $v(t)/c \approx 0$ であるので、 $d\tau/dt \approx 1$ 。これは、座標時間の時間間隔と固有時間での時間間隔が近似的に等しいことを意味する。ゆえに、非相対論的極限 $v(t)/c \rightarrow 0$ においては、ミンコフスキー時空は、いま述べた意味で、ガリレイ時空へと移行する。こうして、ニュートン力学は特殊相対性理論の非相対論的極限として捉えられる。粗く言えば、ニュートン力学の理念が主役を演じるのは、物体の運動の速さが光速に比べて十分小さい範疇の運動に対してであり、特殊相対論的な効果が顕現してくるのは、物体の運動の速さが光速に近い場合である。

時間的運動の他にも、接ベクトルの存在領域に応じて、二つの運動の型がある。すなわち、 $g(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s)) = 0$ を満たす運動は光的と呼ばれ、 $g(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s)) < 0$ を満たす運動は空間的と呼ばれる。光の運動は前者の例である。後者の例はまだ発見されていないが、空間的運動をする粒子の速さは光速よりも大きいので、そのような粒子は超光速粒子またはタキオンあるいは（質量が純虚数という意味で）虚粒子⁽³¹⁾と呼ばれている。

特殊相対性理論は、単に新たな時空概念だけでなく、エネルギーと質量の「等価性」、時計の遅れ、反粒子の存在など様々な新しい事象の予言をもたらし、それまで未知であった現象領域の存在を明らかにした。こうして、特殊相対性理論に対する数理解物理学的・哲学的考察は、現象界から形而上的領域にわたる存在認識を一段と深めてくれるのである（[6, 364-366 頁]も参照）。

8 数学と自然認識における飛躍 (III) — 関数解析学と量子力学

2.4項で示唆したように、原子や素粒子のような微視的対象 — 総称的に量子的粒子と呼ばれる — は古典物理学的な描像から見れば、たいへん奇妙で矛盾するような振る舞い方をする。だが、これは、囚われのない観点に立つならば、むしろ、存在の新しい相、すなわち、いままで隠れていた存在次元の現前形態と見るべきなのである。この場合、量子的粒子が引き起こす現象 — 量子現象 — の認知は、しかるべき観測装置の使用によって可能になったという点にも注意しなければならない。一つの量子的粒子 — たとえば、電子 — が観測の仕方に応じて異なる形態で現象し得る性質を量子的粒子の現象的多重性と呼ぶ [6, 462頁]。この現象的多重性は、波動-粒子の二重性に象徴されるように、互いに排反的であり得る。

量子的粒子が現象的多重性を有することの含意の一つは、量子的粒子の物理的描像（イメージ） — 観測装置に依存しながら定まる知覚像 — が一意的に決定されないことである。これは可視的な巨視的対象と根本的に異なる点の一つである。ある量子的粒子が複数の相異なる現れ方をした場合、これが意味するのは、この量子的粒子の本性は、そのいずれでもないということである。これはちょうど、ユークリッド幾何学において「点とは部分をもたないものである」という特徴づけに似ている。ゆえに、量子的粒子は原理的に不可視の超感覚的な存在であることが洞察される。

現象的多重性に加えて、巨視的な粒子と本質的に異なる量子的粒子の特徴として次のものがある。

- (1) (生成・消滅可能性) 量子的粒子は生成・消滅が可能である。たとえば、電子と陽電子は衝突によって、ある確率で消滅し、光子 (量子的粒子としての光) が現れる。
- (2) (観測結果の確率的性格) 観測結果は一般には確率的に分布する。たとえば、量子的粒子の位置をある状態で複数回観測する場合、その結果は確率的に分布する。
- (3) (同時に観測し得ない物理量の存在) 位置と運動量のように、同時に観測し得ない物理量の組が存在する (巨視的現象の範疇では位置と運動量は同時観測可能)。そのような物理量の組は不確定性原理にしたがう。

以上のように、量子的粒子は、巨視的粒子に比べて、たいへん把握しにくい性質を有する。だが、量子的粒子の世界も宇宙の理によって秩序づけられている。この理の一端を記述したのが量子力学に他ならない。しかし、当然予想されるように、量子力学の形式は古典力学のそれとは根本的に異なるのである。

一般に、量子系に限らず、物理系を記述するにあたっては、まず、状態と物理量の概念を把握しなければならない。古典力学では、状態は相空間の点によって、物理量は相空間上の実数値関数によって表される。量子力学における状態は複素ヒルベルト空間の零でないベクトルによって表され — このヒルベルト空間を状態のヒルベルト空間という — 物理量は状態のヒルベルト空間で働く自己共役作用素によって記述される⁽³²⁾。この場合、物理量の観測値は、物理量を表す自己共役作用素のスペクトルまたは物理量の期待値で与えられる。量子力学的物理量のうち、最も基本的なものの一つは系の全エネルギーを表す作用素でハミルトニアンと呼ばれる。系の状態の“時間発展”は、状態のヒルベルト空間を $\mathcal{H}$ 、系のハミルトニアンを H とするとき (H は時間に依らないとする)、 $\mathcal{H}$ 内の曲線 — 状態曲線 —

$$\Psi(t) = e^{-itH/\hbar}\Psi, \quad \Psi \in \mathcal{H}$$

で記述される。ここで、 t は時刻を表すパラメータ、 $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ (h はプランク定数)、 i は虚数単位 ($i^2 = -1$) である。この式は、時刻 0 での状態 Ψ が与えられたとき、時刻 t での状態は、その間に系に対する観測が行われない限り、 $\Psi(t)$ で与えられることを意味する。い

ま断わり無しに“時間発展”という言葉を用いたが、この“時間発展”は物質的・感覚的世界におけるそれではない。なぜなら、量子系の状態は、無限次元の複素ヒルベルト空間のベクトルであるので、それは物質的・感覚的なものではあり得ないからである。「観測しない限り」というただし書きがつくのはそのためである。観測の行為は、物質的・感覚的世界にあるが、量子力学的状態は形而上的・超感覚的なものである。ちょうど紙や黒板の上に描かれた物質的・感覚的な三角形を通して真の三角形に精神的につながり、真理が物質界・感覚界にもたらされるように、特定の観測装置を用いるにより、この形而上的状態とつながり、一定の情報をもたらされるのである。上述の“時間発展”は形而上的空間としての状態のヒルベルト空間における秩序構造の一つを表すと見るのが自然である⁽³³⁾。詳細は割愛せざるを得ないが、実は、状態曲線全体を決定するベクトル場が存在する。すなわち、各 $\Psi \in D(H)$ (H の定義域) に対して、 $-iH\Psi$ を対応させるベクトル場である。こうして、量子力学の場合も、形而上的空間におけるベクトル場が根源的なものであることがわかる。ただし、このベクトル場は、その積分(状態曲線)がなおも形而上的空間にとどまるので、古典力学における力場よりもいっそう“深い”あるいは“高い”次元に存在している。

ところで、状態のヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ と物理量を定める原理は何であろうか。この問いに対する答を説明するために、ある概念を導入する。代数的対象 $X_1, \dots, X_N, Y_1, \dots, Y_N$ に関する交換関係

$$[X_j, Y_k] = i\hbar\delta_{jk}I, \quad [X_j, X_k] = 0, \quad [Y_j, Y_k] = 0 \quad (j, k = 1, \dots, N)$$

— $[X, Y] := XY - YX$ (交換子) — を自由度 N の正準交換関係 (canonical commutation relations; CCR と略) という。ここで、 δ_{jk} はクロネッカーのデルタ ($\delta_{jj} = 1$; $j \neq k$ ならば $\delta_{jk} = 0$) であり、 I は単位元である ($IA = AI = A$, $A = X_j, Y_j$, $j = 1, \dots, N$)。

ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の対称作用素の組 $(Q, P) := (Q_1, \dots, Q_N, P_1, \dots, P_N)$ が稠密な部分空間 $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ で CCR を満たすとき、すなわち、任意の $\Psi \in \mathcal{D}$ に対して、 $\Psi \in D(Q_j P_k) \cap D(P_k Q_j) \cap D(Q_j Q_k) \cap D(P_j P_k)$ ($j, k = 1, \dots, N$) であり、

$$[Q_j, P_k]\Psi = i\hbar\delta_{jk}\Psi, \quad [Q_j, Q_k]\Psi = 0, \quad [P_j, P_k]\Psi = 0 \quad (j, k = 1, \dots, N)$$

を満たすとき、 $\pi_N := (\mathcal{H}, \mathcal{D}, (Q, P))$ を自由度 N の CCR の表現という⁽³⁴⁾。この場合、 $\mathcal{H}$ をその表現空間という。 $Q_1, \dots, Q_N, P_1, \dots, P_N$ がすべて自己共役であるとき、 π_N を

自己共役表現という。また、 $Q_1, \dots, Q_N, P_1, \dots, P_N$ と可換な $\mathcal{M}$ 上の有界線形作用素 T (すなわち、 $\Psi \in D(Q_j), \Phi \in D(P_j)$ ならば $T\Psi \in D(Q_j), T\Phi \in D(P_j)$ かつ $Q_j T\Psi = TQ_j\Psi, P_j T\Phi = TP_j\Phi, j = 1, \dots, N$ を満たす有界線形作用素) がスカラー作用素 (複素数をかける作用素) に限るとき、 π_N は既約であるという。

量子力学における諸々の例を調べるにより、次の原理が洞察される [9]。

[量子基本対称性原理]

外的自由度が N の量子系の状態のヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ は、自由度 N の CCR の既約な自己共役表現 π_N の表現空間であり、他の量子力学的な量は Q_j, P_j から構成される。

CCR の表現空間は、物理的には、量子系に対する物理的描像 (観測) の枠組みに対応する。他方、CCR の表現空間は多様である。ゆえに、表現空間の多様性は量子的粒子の現象的多重性に対応すると解釈される。それどころか、表現空間が無限に存在することを考慮すれば、量子的粒子が無限に異なる姿で現れ得ることが示唆されるのである⁽³⁵⁾。このように、量子力学の本質を CCR の表現として捉えることにより、量子的粒子の現象的多重性が自然な形で理解されたとともに哲学的にも深い認識が得られるのである。

自由度 N の CCR の表現の集合を $\text{CCR}(N)$ としよう。このとき、 $\text{CCR}(N)$ にはユニタリ同値という概念により、同値関係が入り、この同値関係により、 $\text{CCR}(N)$ は同値類に分類される⁽³⁶⁾。同じ同値類に属する表現から構成される量子力学は物理的にも同値になる。これは、すなわち、外見上異なる理論形式でも同じ同値類に属するならば、同一の物理的結果を与えるということである。シュレーディンガー流の量子力学とボルン-ハイゼンベルク-ヨルダン流の量子力学が同じ物理的結果を与えたのは、これらが同じ同値類に入ることによるのである。

以上の事柄のほかにも、CCR の表現と量子現象の関わりについては興味深い側面がある。詳しくは、文献 [10] の 3 章を参照されたい。

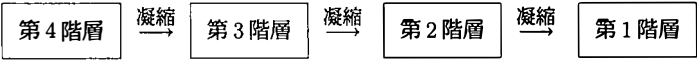
有限自由度の量子力学は、素粒子の生成・消滅の記述を可能にする無限自由度の量子力学の一範疇をなす量子場の理論に拡張される。量子場の理論は、相互作用を行わない自由場の範疇では数学的に正当化される⁽³⁷⁾。だが、4 次元ミンコフスキー時空における素粒子の相互作用を記述する相互作用場の範疇においては、これを記述する数学理論の存在はいまだに証明されていない (ただし、物理学の理論としては“くりこみ理論”と呼

ばれる処方とともに摂動論的な枠組みで一応の完結をみている)。量子場の理論に関わる数学は、数学のほとんどすべての領域に及んでおり、まだ見出されていない真の量子場の理念は宇宙の根源と結びついていることが洞察される。

以上から、巨視的現象と量子的現象を含む自然現象（物質的・感覚的世界）の背後には不可視の超感覚界的な力の場の階層が存在していることが見てとれる。ここでそれを表4にまとめておく。化学結合力は原子と原子が結ついて分子を構成する際の力である。化学結合力のある範疇は、古典的ド・ブロイ場で記述される[42, 52節]。核力は、原子核を構成する核子（陽子、中性子）の間に働く力であり、準巨視的水準では古典的クライン-ゴルドン場によって記述される[42, 52節]。最深層にある量子場は、量子的粒子としての電子、陽子、中性子など素粒子一般の間に働く力を記述する対象であるが、前段で注意したように、その真の姿は認識されていない。これらの階層のおおまかな関係は広義の意味での“凝縮”という理念で捉えられる。すなわち、下の階層の“凝縮”が上の階層を生み出すのである。この“凝縮”の過程のいくつかは、数学的には、適切なスケーリング極限として記述されることが知られている（たとえば、[5, 12-11-6 項]や[2, 25]を参照）。

階層	領域	力の場の種類
第1階層	巨視的物体	古典重力場，古典電磁場
第2階層	原子、分子	化学結合力の古典場（ド・ブロイ場）
第3階層	原子核	核力の古典場（クライン-ゴルドン場）
第4階層	素粒子	量子場（強い力、弱い力、量子電磁気力、量子重力）

表 4: 力の場の階層



9 数学的理念界の構造

これまでの節では現象と数学的理念の照応を個別的に見てきた。この節では、数学的理念界全体における秩序、リズム、調和、美に目を向けてみたい。詳論に入る前に、まず、集合と写像⁽³⁸⁾の理念が数学的理念界全体を貫いていることを注意しておく。

9.1 同種の対象の範疇内での自律的展開

数学における最も基本的な演算は数の足し算とかけ算である。これらの演算は、実は、普遍的理念としての“和”と“積”の特殊な現れなのである。普遍的理念としての“和”と“積”は、数学的理念界の対象に於いて、いたるところに姿を現し、一つの対象からこれと同種の別の対象を生成する構造に関与している。まず、この側面を例証しよう。

例 9.1 二つの集合 X, Y が与えられたとき、これらの和集合 $X \cup Y := \{a | a \in X \text{ または } a \in Y\}$ が定まる。和集合を生成する演算 $\cup$ は、集合という対象に対する“和”の理念の現れの一つである。この演算は、任意個数の集合 $X_1, \dots, X_n (n \in \mathbb{N})$ に対して拡張され、一般には新しい集合 $\bigcup_{k=1}^n X_k = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n$ を生む。

他方、 X の元 (要素) x と Y の元 y の対 (x, y) の全体 $X \times Y := \{(x, y) | x \in X, y \in Y\}$ を考えることもできる。この集合は X と Y の直積集合と呼ばれる。これも集合の自律的展開の一つと見ることができる。次に集合 Z が与えられたとき、 $X \times Y$ と Z の直積集合 $(X \times Y) \times Z$ が定まる。同様に $X \times (Y \times Z)$ が定まる。写像 $u: (X \times Y) \times Z \rightarrow X \times (Y \times Z)$ を $u((x, y), z) := (x, (y, z)), x \in X, y \in Y, z \in Z$ によって定義すれば、 u は全単射であることがわかる。したがって、 $(X \times Y) \times Z$ は $X \times (Y \times Z)$ は対等である。この意味で $(X \times Y) \times Z = X \times (Y \times Z) = X \times Y \times Z := \{(x, y, z) | x \in X, y \in Y, z \in Z\}$ と記し、 $X \times Y \times Z$ を X, Y, Z の直積集合という。以下、同様にして、任意個数の集合 $X_1, \dots, X_n$ から、これらの直積集合 $X_1 \times \dots \times X_n := \{(x_1, \dots, x_n) | x_j \in X_j, j = 1, \dots, n\}$ が定まる。集合の直積をとる演算 $\times$ は“積”の理念の現れの一つである。

特に、任意の一つの空でない集合 X から、その n 個の直積集合 $X^n := \underbrace{X \times \dots \times X}_{n \text{ 個}}$ が定まるので、 X は無限個の集合 $\{X^n | n \in \mathbb{N}\}$ ($X^1 := X$) を自律的に生成する。

例 9.2 例 9.1 で $X_1, \dots, X_n$ が $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 $V_1, \dots, V_n$ である場合 ($\mathbb{K}$ は実数の全体 $\mathbb{R}$ または複素数の全体 $\mathbb{C}$ を表す)、直積集合 $V_1 \times \dots \times V_n = \{(v_1, \dots, v_n) | v_j \in V_j, j = 1, \dots, n\}$ の中に、和の演算とスカラー倍 ($\mathbb{K}$ の元を $V_1 \times \dots \times V_n$ のベクトルにかける演算) が次のように定まる：

$$v + u := (v_1 + u_1, \dots, v_n + u_n), \quad \alpha v := (\alpha v_1, \dots, \alpha v_n), \quad u, v \in V_1 \times \dots \times V_n, \alpha \in \mathbb{K}.$$

これらの演算により、 $V_1 \times \dots \times V_n$ は $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間になる。このベクトル空間は

$V_1, \dots, V_n$ の直和ベクトル空間と呼ばれ、 $\oplus_{j=1}^n V_j = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_n$ という記号で表される。ベクトル空間の直和は“和”の理念の現れと見るのが自然である。

特に、 $V = V_1 = \dots = V_n$ の場合を考えると

$$V \rightarrow \oplus^2 V \rightarrow \oplus^3 V \rightarrow \dots \rightarrow \oplus^n V \rightarrow \dots$$

— $\oplus^n V := \underbrace{V \oplus V \oplus \dots \oplus V}_{n \text{ 個}}$ — というベクトル空間の自律的無限生成の過程が見出される。

例 9.3 ベクトル空間に対しては、“積”の理念は、代数的テンソル積という概念として現れる。 $V_1, \dots, V_n$ を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とすると、新たなベクトル空間として、代数的テンソル積 $\otimes_{j=1}^n V_j$ と呼ばれる対象が定まる⁽³⁹⁾。特に、一つのベクトル空間 V から

$$V \rightarrow \otimes^2 V \rightarrow \otimes^3 V \rightarrow \dots \rightarrow \otimes^n V \rightarrow \dots$$

— $\otimes^n V := \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{n \text{ 個}}$ — という形で、新たなベクトル空間が自律的に無限に生成される。

例 9.4 X, Y, Z を空でない集合とし、 $f: X \rightarrow Y$ を X から Y への写像、 $g: Y \rightarrow Z$ を Y から Z への写像とする。このとき、 X から Z への写像 $g \circ f: X \rightarrow Z$ が $(g \circ f)(x) := g(f(x))$, $x \in X$ によって定まる。 $g \circ f$ は f と g の合成写像と呼ばれる。これは“積”の理念の写像の文脈での現れと見るができる。

特に、 $X = Y = Z$, $f = g$ の場合、 $f^2 := f \circ f$ と記す ($f^2(x) = f(f(x))$, $x \in X$ であることに注意；“ $f(x)^2$ ”のことではない!)。同様にして、2以上の任意の自然数 n に対して、 X 上の写像 $f^n: X \rightarrow X$ が帰納的に $f^n := f \circ f^{n-1}$, $f^1 := f$ によって定義される。こうして、一つの写像 $f: X \rightarrow X$ から、無限個の写像 $\{f^n | n \in \mathbb{N}\}$ ($f^1 := f$) が生成される。

以上の例のほかにも“和”と“積”の理念⁽⁴⁰⁾の現れの例および同種の対象の範疇内での自律的展開の例はたくさん存在する。一般に、理念の自律的展開は、理念的な意味でのある種の運動と見るができる。筆者がここで強調したいことは、数学的理念界には、上述の自律的展開の範疇を包摂する、生き生きとした理念的な意味での運動が存在するということである。もちろん、この運動は形而上的なものである所以“無時間的”である。ここにもまた、物質的・感覚的世界とは全く異なる形而上的世界の消息の一端が知られるのである。

9.2 本質と形而上的形態

一般に公理的な形式で抽象的に定義される数学的概念や数学的対象は、存在論的には、一つの“本質”を表すものであり、その具象的実現は当の“本質”の“形態”であると考えることができる。もちろん、この形態は物質的・感覚的なものではないので、混乱を避けるために、これを形而上的形態ということにする。6.1項で考察したベクトル場は、形而上的形態の一例である。形而上的形態は、物質的・感覚的な世界にとっては無形態である。

例 9.5 ベクトル空間の概念は公理的に定義される。これを抽象ベクトル空間と呼ぶ。抽象ベクトル空間は一つの本質を表す。具象的ベクトル空間 — $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \dots, \mathbb{R}^n, \dots; \mathbb{C}, \mathbb{C}^2, \dots, \mathbb{C}^n, \dots$; 諸々の関数空間など — はこの本質の形而上的形態である。

数学的理念は、大まかに言えば、次のような仕方で現象界へと“下降していく”：

本質 → 形而上的形態 → 現象

9.3 マンダラの構造

数学的理念界には、大きく分けて、次の二つの秩序構造が存在することがわかる：

(I) 純数学的関連における秩序構造

(II) 物理現象の範疇との関連における秩序構造

ただし、数学的理念界の有機的構造により、(I) と (II) は密接に関連している（不二）。華厳哲学的に言えば、(I) は理理無礙、(II) は理事無礙の消息と照応する⁽⁴¹⁾。

まず、(I) の秩序構造について解説する。(I) の秩序構造を把握するための鍵概念は、理念または概念の“分節”である。これは、ちょうど、植物が種子から根、茎、枝、葉、花などを生長の秩序にしたがって次々と発現していくように、一つの理念または概念に新しい構造が加わり、構造が豊かになることを指す。この比喻で言えば、種子に相当する大本の理念の“内部”に、その“後”に発現するすべての理念が“含まれている”と洞察される。ゆえに、理念の分節構造は、華厳哲学的に言えば、一即多、多即一の消息に照応する。

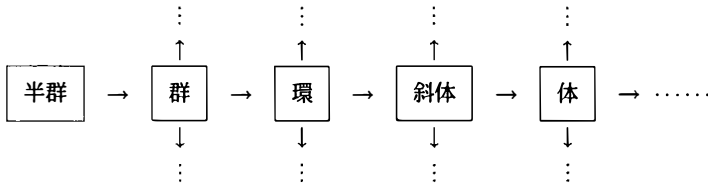
数学的理念界には、根源的と考えられる理念がいくつかあり、これらの根源的理念の無限的分節構造として (I) の秩序構造が現れる。

いま述べた事柄を例証するために、根源的理念の1つである半群 (semi-group) をとりあげよう。集合 S の任意の二つの元 a, b に対して、 S の元 $ab \in S$ が定まり、結合法則 $(ab)c = a(bc)$, $a, b, c \in S$ が成り立つとき、 S を半群と呼ぶ。対応 $(a, b) \mapsto ab$ を半群の算法または演算という。

半群の演算は、二つの “もの” が結びつくという、最も原初的な存在形式の数学的表現と考えることができるので、半群の理念は存在論的には最も始原的であると考えられる。

半群の具体的で最も基本的な例の一つは、自然数全体の集合 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ である。これは和の演算および積の演算で半群である。

半群からの分節構造の例を次に示す。



絶対無から半群の理念が立ち現れて諸理念が無限分節的に展開していくイメージを図5に示す。

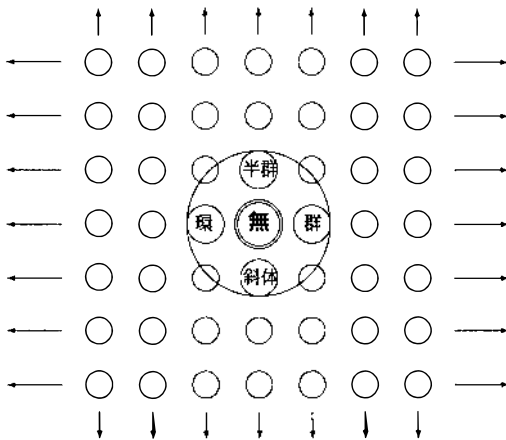


図 5: 数学的理念界の無限分節構造のイメージ

上述の分節的構造の他に、数学的理念界は階層性も有する。これは存在顕現の歴史 — 宇宙史 — と照応するはずのものであり、始原（上）から現在の“末端”（最下層）へと至る。その一部を表5に示す。

階層	理念
1 (始原)	半群
2	群, 環, 体
3	抽象ベクトル空間, 抽象アファイン空間, 位相空間 … (抽象的非計量空間)
4	抽象的計量空間 (距離空間, ヒルベルト空間 バナッハ空間, 局所凸空間, …)
⋮	⋮
	具象的計量空間 ($\mathbb{R}^n, n = 4, 5, \dots, \mathbb{C}^m, m = 2, 3, \dots$) 具象的多様体, …
“末端”	$\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ (整数全体), $\mathbb{Q}$ (有理数全体), $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{C}$ およびこれらから構成される数学的諸対象

表 5: 数学的理念界の階層性（一部）

次に (II) の秩序構造に移ろう。物理学の範疇は、最も大枠的には、巨視的現象を対象とする古典物理学と微視的現象を対象とする量子物理学に分けられる。だが、この分け方はあくまでも便宜的なものである（不二）。古典物理学の中心的理念は多様体の理念であり、量子物理学の中心的理念は関数解析学（ヒルベルト空間、バナッハ空間、作用素代数、超関数、無限次元解析 等々）である。しかし、これらの中心的理念は孤立してあるわけではなく、それらの“周辺”の理念も含めて“融合的に”関連している。これは、物理的には、巨視的現象領域と微視的現象領域が実際には二つにきっちりと分かれたものではなく（不二），“融合し”一つの全体をなしていることに照応する。

半群の根源性・始原性は量子物理学においては、半群のヒルベルト空間表現という形で現れる。これは、半群の代数的構造をヒルベルト空間上の作用素の集合に実現することである。

例 9.6 非負の実数全体 $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$ は和の演算で半群をなす ($a, b \in \mathbb{R}_+ \implies a + b \in \mathbb{R}_+$)。ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素の集合 $\{S(\beta)\}_{\beta \in \mathbb{R}_+}$ は、 $S(0) = I$ (恒等作用素)、 $S(\beta + \beta') = S(\beta)S(\beta')$ ($\beta, \beta' \in \mathbb{R}_+$) を満たすとき、半群 $\mathbb{R}_+$ の表現と呼ばれる。量子

物理学の文脈では、 $S(\beta)$ が物理量を表すとすれば、それは自己共役作用素であって、対応 $\beta \mapsto S(\beta)$ は強連続であるという条件を課するのは自然である。このとき、ストーンの定理により、下に有界な自己共役作用素 H で $S(\beta) = e^{-\beta H}$ となるものがただ一つ存在する。 $S(\beta)$ が量子系の状態の温度に関する変化を記述する作用素である場合には、自己共役作用素 H は、ハミルトニアンと解釈されるものであり、その場合、 β は逆温度を表す (T を絶対温度、 k_B をボルツマン定数とすれば、 $\beta = 1/(k_B T)$)。作用素 $e^{-\beta H}$ は熱作用素と呼ばれ、量子統計力学における基本的な作用素の一つである。ここで、絶対温度 T が表現を指定するパラメータとして現れていることに注意したい。つまり、半群 $\mathbb{R}_+$ の表現を通して、巨視的な物理量である絶対温度と量子力学的物理量であるハミルトニアンが対の形で現れるのである。

例 9.7 実数全体 $\mathbb{R}$ は和の演算で群をなす。ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上のユニタリ作用素の集合 $\{U(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ は、 $U(t+t') = U(t)U(t')$ ($t, t' \in \mathbb{R}$) を満たすとき、群 $\mathbb{R}$ のユニタリ表現と呼ばれる。 $U(t)$ が強連続であるとすれば、ストーンの定理により、自己共役作用素 H で $U(t) = e^{-itH/\hbar}$ となるものがただ一つ存在する。 $U(t)$ が量子系の状態の時間発展を記述するユニタリ作用素の場合には、 H はこの量子系のハミルトニアンと解釈される。その場合、 t は時間変数を表す。この例では、時間変数 t が表現を指定するパラメータとして現れている。

物理学の主な領域とそれぞれに対応する数学の領域を表6に示す（より詳しい内容については [7, 20 章] を参照）。この表の意味の一つは、現象領域に依じて、主役となる数学的諸理念が異なるということである。華嚴哲学的に言えば、理事無礙の消息がこの表に示されているのである。

ところで、真言密教における瞑想修行の対象としてマンダラ（曼荼羅）とよばれる図像がある。マンダラには胎藏界マンダラと金剛界マンダラの二種があり、両界マンダラと呼ばれる。だが、この二種のマンダラは別々のものではなく（不二）、二つで一つの全体をなす。マンダラに対する解釈はいろいろあるが、井筒俊彦が言うように、マンダラは意識・存在の「元型」的構造図であり、仏教的「正覚」意識の見るがままに、全存在界 — 内的世界と外的世界を合わせた宇宙全体 — の「本質」的（「元型」的）構造を象的に呈示する深秘の象徴体系である（[27, 210–211 頁]）と解釈するのが自然であるように思われる。両界マンダラがそういうものであるとすれば、他の種類の観照的・瞑想的意識にも

量子力学 ヒルベルト空間、線形作用素 正準交換関係の表現 正準反交換関係の表現 群の表現、確率論	量子場の理論 量子力学の数学的理念を 含む壮大な領域を中心とし ほとんどすべての 数学と関わる	古典統計力学 確率論 測度論 エルゴード理論
古典場の理論 中間子場、電磁場 重力場、電子場 等々 偏微分方程式	ニュートン力学 ガリレイ時空、相空間 ベクトル場、常微分方程式	熱力学 非リーマン多様体 微分形式
一般相対論 ローレンツ多様体、テンソル場 常微分方程式、偏微分方程式	特殊相対論 ミンコフスキー時空 ベクトル場、常微分方程式 偏微分方程式	解析力学 正接バンドル、余接バンドル シンプレクティック多様体 ラグランジュ方程式 ハミルトン方程式

表 6: 物理学の主な領域とそれぞれに対応する数学の領域（一部）（量子統計力学は量子場の理論に含める）

照応する構造が現れる可能性がある。実際、筆者の現在の観照的意識の水準においては、(I) の構造は胎蔵界マンダラに照応し、(II) の構造は金剛界マンダラに照応することが見て取れるのである。

10 結語

本論文では、存在認識における数学の意義と役割について、数学と自然認識の歴史における画時代的な事例の本質的部分にふれながら、現代数学ならびに現代物理学の方法と成果も視野に入れ、現代的な観点から哲学的な考察を試みた。また、現在の筆者の観照的意識に映る数学的理念界の構造について、不十分ながら、その概略を叙述した。

外的諸感覚とそれに束縛された知性だけでは、人は自らを肉体としてしか認知できず、認識は存在の表層的次元に留まる。自らを不生不滅の永遠なる精神的存在として認知し、存在の高次の相の認識を獲得するためには、日常的意識（感覚的・悟性的意識）の次元を超脱しなければならない。これを可能にする修行の確実な道の出発点の一つを提供するのが数学である。数学的精神性およびこれに支えられた哲学的・宗教的認識の深化により、人生の中に現存しながらも、日常の意識には隠された世界が開かれるのである。

謝辞

本論文は2017年12月8日に龍谷大学で開催された龍谷学会 & 龍谷哲学会共催学術講演会の内容に基づくものである。この講演の機会を提供してくださった関係者の皆様に心から感謝したい。特に、打ち合わせの段階からたいへんお世話になった伊藤邦武教授と藤本忠准教授には厚くお礼申し上げる。

註

- (1) 文献[44]の58-61頁を参照。このような事例は、感覚的なもの・経験的なものだけに頼る人々にとっては驚異的であつたに違いない。タレスが七賢人の一人といわれたゆえんであろう。
- (2) 文献[4]の217頁を参照。ちなみに、タレスは「万物の根元は水である」と説いたといわれるが、躍動的思考の観点から言えば、この“水”は超感覚的・形而上的な意味で捉えなければならぬ。
- (3) この点については、本論文の第9節でより詳しく述べる。なお、誤解はないと思われるが、本論文での存在認識は単なる存在性だけでなく、存在が有する^{ことわり}理（真理）の認識も含む。
- (4) 文献[6]の序章を参照。
- (5) すでに注意したように、数学の内容そのものは、超歴史的・超時間的・超空間的であり、時空のいかなる所においても常に真である。したがって、数学の内容自体を学習するという意味では、数学の歴史をひもとく必要は一切ない。たとえば、現代においては、ユークリッド幾何学を学ぶために、ギリシア時代に書かれたユークリッド（エウクレイデス）の原著[18]を読む必要はない（初学者にとっては、文献[18]を読みこなすことは困難であろう）。他方、これまでの歴史が示すように、数学の内容が人間によって発見される過程は時間的に段階的である。しかし、この歴史は、本源的に精神的存在である人間の精神的進化——存在認識と自己認識の深化を含む——という観点から見た場合、たいへん興味深いものである。本論文における歴史的考察はこの意味でなされるものである。ちなみに、世間にありがちな誤解を解く意味で、ここで、数学は自然科学ではないことを強調しておく。自然科学は、物質的自然の事物を対象とするが、数学が扱う対象は物質的自然の事物ではなく、非物質的・非感覚的なものだからである。たとえば、数学における“点”は、物質的・感覚的世界において、人が通常、点として表象する対象ではない（第5節を参照）。
- (6) ピュタゴラスは自らを愛智者(philosophos)=哲学者と名乗った最初の人といわれる。文献[26]の58節(p.60)を参照。
- (7) こうした秩序の一例が音と数比の関連であり、ピュタゴラスは、これに基づいて、今日、世界的に標準となっている7音階——ドレミファソラシド'（ド'はドより1オクターブ高い

音) — を構成したとされる。この音階はピュタゴラス音階とも呼ばれる。音楽学でよく知られているように、ドとド'の音程(音の高さの隔たり)は完全8度、ドとファの音程は完全4度、ドとソの音程は完全5度と呼ばれ、それぞれの対の音を同時に鳴らしたとき、たいへん美しく、調和的に響く和音 — 協和音 — が出現する。音の高さは、物理的には、振動数で表される(弦の場合は弦の長さとも対応し、これは振動数に逆比例する)。完全8度の振動数比は1:2、完全4度の振動数比は3:4、完全5度の振動数比は2:3であり、自然数列のはじめの四つ1、2、3、4で構成されることは驚異的である。現代数学的な観点(群論的観点)からは、ピュタゴラス音階は、音の空間における、完全5度の並進対称構造の1オクターブ間隔への射影として得られることが示される[11, 第6章]。この意味において、ピュタゴラス音階は恣意的・作爲的なものではなく、根源的な数学的理念に根ざしているのである。弦の振動によって発生する音の調和的構造は、近代力学の基礎方程式であるニュートンの運動方程式によって説明される。すなわち、ニュートンの運動方程式から弦の振動方程式が導かれ、これを解くことにより、倍音列の存在がある基本振動数の自然数倍という形で示される。こうして、なぜ協和音と関連して自然数が現れるのかが解明されるとともに、弦の一音の中に無限の音が含まれているという深遠な事実も認識される(以上の詳細については文献[11]の第6章を参照)。ここで、哲学的な観点から、次の点に注意を促しておきたい。すなわち、ピュタゴラス音階の音要素から構成される楽音は、所与の自然界にはほとんど現れないという事実である。ゆえに、楽音は、楽器という装置を用いて形而上的次元から取り出される対象であると考えることが可能であり、楽音を用いて構成される音楽は数学の精神性と類似の精神性を持つ得るのである。ここでは、詳細は割愛せざるを得ないが、実は、形而上的な音空間には、古代的な意味での宇宙秩序、すなわち、七惑星(月、水星、金星、太陽、火星、木星、土星)と恒星天球(黄道十二宮)に照応する構造が存在し(基本的照応は、七惑星とピュタゴラス音階、黄道十二宮と十二音の照応であり、他にも興味深い照応がある)、ピュタゴラスが「聴く」ことができたという「天球の音楽」の地上的的写しが、まさに、ヴィヴァルディやJ. S. バッハのような偉大な天才的音楽家が靈感をもって受け取る、非常に崇高で精神性の高い音楽であることが推測されるのである。

- (8) 幾何学的対象の本性については、本論文の第5節であらためて論じる。なお、プラトンの対話編には、いま引用した箇所以外にも、数や幾何学に関する論及が多く見られる。普遍と特殊の絶対的同一に基づいて成立するという意味において哲学と数学を同一水準においたシェリングは「数学が示現するのは理念、事物そのものの真の根本本質ならびに根本形式である」と語っている[40, 64頁]。
- (9) 言うまでもなく、ユークリッドからニュートン・ライプニッツの時代にいたる期間においても、数学や自然学の進展はあった。数学においては、特に、インド・アラビアの記数法による代数学の発展は、数学史上、重要な出来事の一つである(たとえば、文献[22]、[30]を参照)。物理学では、コペルニクス(1473-1543)、ケプラー(1571-1630)、ガリレイ(1564-1642)らの仕事がニュートン力学への道を準備した。
- (10) たとえば、[1]や[43]などを参照。
- (11) ヒルベルト空間については[3]を参照。
- (12) 水や空気や火は特定の形態をもたないが、周囲の環境に応じて(広義の意味での)形態をとると考える。

- (13) ただし、残念ながら、人間界を除かねばならない。実は、ここに人間が他の生類とは異なり、独特の存在であることが暗示されている。
- (14) この後に続く文章も重要であるが、ここでは割愛する。哲学的に詳細な解釈については [27, VII 章] を参照。
- (15) これは、禅における言葉が、通常言葉の使い方からすれば、無意味に見えるのと同じである。
- (16) たとえば、平面上の 2 点 A, B があれば、それらを結ぶ線分 AB が “生成” され、A または B を中心とし、半径が AB の長さの円も “生成” される。また、平面上の直線 ℓ と ℓ 上にない点 P に対して、P を通り、 ℓ に平行な直線が “生成” される。
- (17) ゼノンの “パラドックス” は実際にはパラドックスではない。亀の出発点がアキレスのそれよりも前方にあるとして、競走が始まるとした場合、亀がいた位置にアキレスが来るとき、亀が常にアキレスの前方にいるということは正しい（亀とアキレスの大きさは無視し、その位置は大きさのない点として理想化して考える）。だが、「ゆえにアキレスは亀に追いつけない」と結論することはできない。ここに論理的な飛躍があるのである。この “パラドックス” は、有限の論法をもってしては、亀よりも駿足のアキレスが亀に追いつくことを説明できないということを示しているにすぎない。「運動は存在しない」という “パラドックス” についても同様である。「飛ぶ矢は止まっている」については以下の註 (24) を参照。
- (18) もちろん、空間のどこかに観測の基準点（静止点）を予め定めておく。また、物体がこの基準点に対して静止している場合も運動の特殊形態とみなす。
- (19) 区間 J は次の 9 個の部分集合のいずれかである ($\{x \in \mathbb{R} | P(x)\}$ は条件 $P(x)$ を満たす実数 x の集合を表す)。 $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$ 、 $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$ 、 $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$ 、 $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$ 、 $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x\}$ 、 $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | a < x\}$ 、 $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq a\}$ 、 $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} | x < a\}$ 、 $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ 。
- (20) 極限の概念を厳密に定義するには、 ε - δ 論法を使わなければならないが、ここでは、直観的な扱いで満足する。 ε - δ 論法については、たとえば、[31] を参照。
- (21) 「 $A := B$ 」は「 B によって A 」を定義すること表す。
- (22) だが、この逆は成立しない。つまり、グラフが視覚的につながっているように見えても、連続でない関数がある。視覚はあてにならない。
- (23) 定積分の定義については、たとえば、[31] を参照。
- (24) ゼノンの言明「飛ぶ矢は止まっている」がパラドックスと化すのは、矢がある位置を占めることと、矢が静止していることを同一視する場合である。だが、この同一視は正しくない。なぜなら、飛ぶ矢は瞬間速度をもつからである。瞬間速度は超感覚的なものであるがゆえに、感覚的・悟性的な思考に留まる人には “見えない”。ゼノンの時代から微分・積分の発見の時まで実に 2000 年近い時間が経過しことは、いかに瞬間速度の把握が困難なものであったかを物語る。

- (25) 運動曲線が微分可能でない曲線で記述されるものもある。この場合、瞬間速度が確定しないので、状態は一意的に決まらず、運動は確率的になり得る。このような運動の典型的な例がブラウン運動である（たとえば、非常に小さい花粉の水中での運動）。この種の運動は、確率過程という概念で記述される。だが、いずれにしても運動の源は超感覚的な力にある。
- (26) 紙幅の都合上、以下、断わり無しに、アファイン空間、計量ベクトル空間等に関する術語を用いる。詳しくは [6] を参照。
- (27) これとは対照的に、4次元ユークリッド空間における点 (x^0, x^1, x^2, x^3) の計量は $(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$ であり、常に非負である。しかも、これが 0 となるのは、 $x^0 = 0, x^1 = 0, x^2 = 0, x^3 = 0$ となるときのみである。このような計量を正定値計量という。
- (28) ローレンツ座標系での $\gamma(s)$ の成分表示を $(\gamma^0(s), \gamma^1(s), \gamma^2(s), \gamma^3(s))$ とすれば、 $\dot{\gamma}(s)$ の成分表示は $(d\gamma^0(s)/ds, d\gamma^1(s)/ds, d\gamma^2(s)/ds, d\gamma^3(s)/ds)$ である。ただし、 $d\gamma^\mu(s)/ds$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) は $\gamma^\mu(s)$ の導関数である。
- (29) 光の存在とともに時間が始まるという構造は、すでに旧約聖書『創世記』の冒頭に語られている。すなわち、神の「光あれ」という言のあとで、「夕」、そして「朝」と続くのである。なお、太陽と月そして星々、すなわち、物質的宇宙が現れるのは、創造の四日目であることに注意されたい。したがって、創造の3日目までは、物質的宇宙が現れる以前の非顕現的形態——これは形而上的次元の存在——に関わる事柄が感覚的な言葉を借りて語られているとみなければならない。
- (30) M^4 の点（ベクトル） x は $g(x, x) > 0$ を満たすとき時間的、 $g(x, x) = 0$ を満たすとき光的、 $g(x, x) < 0$ を満たすとき空間的と呼ばれる。
- (31) 虚粒子が通常の観測方法では発見されない理由に対する試論が [6, 391 頁] に提示してある。
- (32) 量子力学の一般論は公理的に展開される。ここでは、量子力学の公理のすべてを書き下すことはしない。詳しくは、[3, 第6章] や [6, 10 章] を参照。
- (33) 状態のヒルベルト空間は、状態曲線で埋め尽くされる [10, 命題 4.39]。哲学的な解釈の詳細については、[8, 9] を参照されたい。
- (34) 一般に、代数関係式を満たす対象をベクトル空間上の線形作用素を用いて実現することを当の代数関係式の表現という。
- (35) ただし、個々の場合にふさわしい観測装置があればの話である。人間に限れた種類の観測装置しかもちあわせていないので、人間にとっては、量子的粒子の有限の種類の現象的姿が認知されるのみである。
- (36) 「有限自由度の CCR の既約な自己共役表現はシュレーディンガー表現（シュレーディンガー流の量子力学を構成する CCR の表現）に同値である」という誤解がしばしば見られる。この意味での一意性が成立するのは、ヴァイル表現と呼ばれる表現で、しかも表現空間が可分であるものに限られる（フォン・ノイマンの一意性定理）。一般には、一意性定理は成立しない（自由度 N の CCR の既約な自己共役表現で、同じ自由度のシュレーディンガー表現に同値でないものが存在する；[10, 3.6 節] を参照）。この点は特に強調しておきたい。

- (37) 詳しくは、[5]、[13]を参照。
- (38) 集合と写像については、たとえば、[41]を参照。
- (39) [5, 第1章]を参照。
- (40) 引き算と割り算に対応する普遍的理念も存在するがこれらについては割愛する。
- (41) これらの術語および華嚴哲学については[28, 五章]を参照。

文献

- [1] 天野 清『量子力学史』、中央公論社、1973、1993(10 版)。
- [2] A. Arai, An asymptotic analysis and its application to the nonrelativistic limit of the Pauli-Fierz and a spin-boson model, J. Math. Phys. **31** (1990), 2653–2663.
- [3] 新井朝雄『ヒルベルト空間と量子力学』、共立講座 21 世紀の数学 16 巻、共立出版、1997。改訂増補版 2014。
- [4] 新井朝雄「数学、自然科学、抽象芸術」、堀田真紀子編『抽象芸術の誕生』、北海道大学言語文化部研究報告集 41、2000、211–259。
- [5] 新井朝雄『フォック空間と量子場 上下』、日本評論社、2000。増補改訂版 2017。
- [6] 新井朝雄『物理現象の数学的諸原理』、共立出版、2003。
- [7] 新井朝雄『現代物理数学ハンドブック』、朝倉書店、2005。
- [8] 新井朝雄、量子現象によって開示される存在論的構造、『シェリング年報』第 14 号、平成 18 年 (2006)、95–103。
- [9] A. Arai, Fundamental symmetry principles in quantum mechanics and its philosophical phases, *Symmetry : Culture and Science*, **17** (1-2), 2006, pp.141-157. <http://hdl.handle.net/2115/38226>
- [10] 新井朝雄『量子現象の数理』、朝倉物理学大系 12、朝倉書店、2006。
- [11] 新井朝雄『美の中の対称性 数学から見る自然と芸術』、日本評論社、2009。
- [12] 新井朝雄『物理学の数理 ニュートン力学から量子力学まで』、丸善出版、量子数理シリーズ 3 (荒木不二洋・大矢雅則 監修)、2012。
- [13] 新井朝雄・河東泰之・原隆・廣島文生『量子場の数理』、数学書房、2016。
- [14] ベック『仏教 上下』、渡辺照宏・渡辺重朗 訳、岩波文庫、岩波書店、1962、1977。
- [15] N. Bourbaki『ブルバキ数学史』、村田 全・清水達雄 訳、東京図書、1970。
- [16] 『大乘起信論』。たとえば、池田魯参『現代語訳 大乘起信論』、大蔵出版、1998。

- [17] 道元『正法眼蔵』。たとえば、岩波文庫、岩波書店、1993。
- [18] ユークリッド『原論』、中村幸四郎・寺坂英孝・伊東俊太郎・池田美恵 訳・解説、共立出版、1971。紀元前 300 年頃書かれた。
- [19] ゲーテ『ファウスト』。たとえば、世界文学全集 2、河出書房、1971。
- [20] ゲーテ『自然と象徴 — 自然科学論集 —』高橋義人編訳、前田富士男訳、富山房百科学文庫 33、富山房、1982。
- [21] 『般若心経』。たとえば、里道徳雄 編著『和訳 般若心経 白隠禅師毒語解』、東京美術、1994。
- [22] T. L. ヒース『ギリシア数学史』、復刻版、平田 寛 訳、共立出版、1998。原書は 1931 年に出版。
- [23] A. Hellemans and B. H. Bunch, "The Timetables of Science", Simon & Schuster, 1988. 邦訳：『Maruzen 科学年表 — 知の 5000 年史』(上村美佐子・海部宣男・香原志勢・道家達将・藤村 淳・八杉貞雄・山下 昇 編訳)、丸善株式会社、1993。
- [24] D. ヒルベルト『幾何学基礎論』、中村 幸四郎 訳、ちくま学芸文庫、筑摩書房、2005。
- [25] F. Hiroshima, Weak coupling limit and a removal of an ultraviolet cut-off for a Hamiltonian of particles interacting with a quantized scalar field, J. Math. Phys. **40** (1999), 1215–1236.
- [26] イアンブリコス『ピタゴラスの生き方』、水地 宗明 訳、京都大学学術出版会、2011。280 年頃から 320 年頃の間にギリシア語で書かれたとされる。
- [27] 井筒俊彦『意識と本質』、井筒俊彦著作集 6、中央公論社、1992。
- [28] 井筒俊彦『東洋哲学』、井筒俊彦著作集 9、中央公論社、1992。
- [29] 井筒俊彦『意識の形而上学 — 『大乘起信論』の哲学』、中央公論社、1993。
- [30] カジョリ『初等数学史』(小倉金之助 補訳)、共立出版、1997。英語で書かれた原書は 1917 年の出版。
- [31] 黒田成俊『微分積分』、共立講座 21 世紀の数学 1 巻、共立出版、2002。
- [32] 日下部吉信 編訳『初期ギリシア自然哲学者断片集 I』、ちくま学芸文庫、筑摩書房、2000。
- [33] 旧約聖書『創世記』、関根正雄 訳、岩波文庫、岩波書店、1956。
- [34] ポルピュリオス『ピタゴラスの生涯 付録：黄金の詩』、水地 宗明 訳、晃洋書房、2007。3 世紀後半頃にギリシア語で書かれた。
- [35] プラトン『国家』。たとえば、岩波文庫、藤沢令夫 訳、岩波書店、1979。
- [36] プラトン『パイドーン』。たとえば、プラトン『ソクラテースの弁明・クリトーン・パイドーンエ』、田中美知太郎・池田美恵 訳、新潮文庫、新潮社、1968。

- [37] プラトン『テアイテトス』、岩波文庫、田中美知太郎訳、岩波書店、1966。
- [38] プラトン『ティマイオス』、種山恭子訳、プラトン全集 12、岩波書店、1975。
- [39] 佐武一郎『線型代数学』、裳華房、第 32 版、1976。
- [40] シェリング『学問論』、勝田守一訳、岩波文庫、岩波書店、1957。
- [41] 赤 堀也『集合論入門』、培風館、増補版、1959。
- [42] 鈴木康孝『理工系物理学』、開成出版、1979。
- [43] 高林武彦『量子論の発展史』、中央公論社、1977。ちくま学芸文庫、筑摩書房、2010。
- [44] 上垣 渉『ギリシア数学のあけぼの』、日本評論社、1995。
- [45] J. von Neumann「量子力学の数学的基礎づけ」(新井朝雄 訳)。ノイマン・コレクション『数理物理学の方法』(伊東恵一編訳、ちくま学芸文庫、筑摩書房、2013) 所収。
- [46] J. von Neumann, Die Eindeutigkeit der Schrödingerschen Operatoren, Mathematische Annalen **104** (1931), 570–578。
- [47] J. von Neumann『Die mathematische Grundlagen der Quantenmechanik』、Springer、1932。邦訳：J. v. ノイマン『量子力学の数学的基礎』(井上 健、広重 徹、恒藤敏彦 訳)、みすず書房、1957。