

〈論文〉

漁業資源獲得競争のマルチリーダーフォロワーゲーム

中 川 義 行
山 下 章 夫

キーワード

マルチリーダーフォロワーゲーム, ナッシュ均衡, 漁業資源, 先手有利性, 後手有利性

1 はじめに

Stackelberg 競争のゲーム理論では、先導者および追随者がそれぞれ複数存在する場合の理論が展開されている。これらの理論は、一般にマルチリーダーフォロワーゲーム理論と呼ばれている。本稿では再生可能資源の一種として、特に漁業資源に焦点を当て、その獲得競争をマルチリーダーフォロワーゲームとして定式化する。

D. Sherali [6] は、漁業資源の動学モデルではないが、Stackelberg 競争モデルの一般化として、先導者が M 人と追随者が N 人の静学的市場モデルを構築し、その均衡解の存在を示している。漁業資源の動学ゲーム理論的分析は、計画期間が無限の場合においては、Levhari, D. and Mirman [3] で 2 人ゲーム Cournot-Nash 競争モデルとして展開されている。奥口 [5] は、そのモデルを n 人ゲーム Cournot-Nash 競争に拡張して、プレイヤー（国家）の数が増加した場合の効果を分析している。E. Denisova, A. Garnaev [1] は、プレイヤー間（国家間）に意思決定の順序が存在する有限期間モデルで、1 国の先導者と $n-1$ 国の追随者グループから構成される n 人ゲームの Stackelberg 競争モデルを分析している。これらの先行研究を踏まえて、中川・山下 [7] では、漁業資源の獲得競争に関する動学ゲーム理論の枠組みの中で、 n 人ゲームにおいて、 $n-1$ 人の先導者が存在するマルチリーダーフォロワーゲームのモデルを構築し、そのモデルの均衡解を再帰的に求めている。

本稿の目的は、マルチリーダーフォロワーゲームにおける先手有利性、後手有利性の条件を導くことである。そのためにプレイヤーの総数を 3 に限定している。マルチリーダーフォロワーゲームでは、先導者のグループに属するプレイヤーと追随者のグループに属するプレイヤー間では Stackelberg 競争が行われる。また先導者のグループに属するすべてのプレイヤーは、追随者のグループに属するすべてのプレイヤーの反応関数を知っているものと仮定される。そしてグループ内のプレイヤー間では Cournot-Nash 競争が行われる。

本稿の構成は以下のとおりである。第 2 節では、漁業資源の変化を表す動学方程式と増殖関数を定式化する。第 3 節では、資源の動学方程式の式変形を行い、制約条件式を導く。そして、その制約条件式をプレイヤーの目的関数に代入する方法で、制約条件を取り入れた目的関数を定式化する。第 4 節では、先導者の数が 1 の競争モデルと追随者の数が 1 の競争モデルにおいて、均衡解が存在することを示す。そして、先手有利性のための十分条件、すなわち、先導者の総効用が追随者の総効用を上回るための十分条件を導く。第 5 節では、逆に後手有利性が成立するための十分条件を考察する。最

後にまとめと残された課題を述べる。付録では均衡解を計算する Maxima のコードを掲載する¹⁾。

2 資源量の変化

本節では漁業資源の変化を表す動学方程式と純増殖関数²⁾を定式化する。そしてプレイヤーによる消費がこの純増殖関数に与える効果を見る。

2.1 純増殖関数の性質

本稿では漁業資源のストック（以下資源と略記する）の変化が Levhari, D. and Mirman [3] にしたがって、次の動学方程式で表されるものと仮定する。

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= x_t^r \\ x_0 &: \text{given}, \quad x_0 \in (0, 1) \end{aligned} \quad (1)$$

t は時間を表す離散変数である。 x_0 は期首の資源である。 r は生物学的要因によって決まるパラメタであり、1 よりも小さい正数と仮定する。漸化式 (1) から次式を得る。

$$\Delta x_t = x_{t+1} - x_t = x_t^r - x_t$$

この右辺を $h(x_t; r)$ と置く。

$$h(x_t; r) = x_t^r - x_t \quad (2)$$

この $h(x_t; r)$ は純増殖関数と呼ばれる。

性質 2.1. 純増殖関数 $h(x_t; r)$ は、変数である資源 $0 < x_t < 1$ において最大値を持ち、パラメタ r について狭義単調減少する。

証明. (2) において、 $\lim_{x_t \rightarrow 0} h(x_t; r) = \lim_{x_t \rightarrow 1} h(x_t; r) = 0$ が成り立つ。すなわち、極限 $x_t \rightarrow 0$ および $x_t \rightarrow 1$ では、 $\Delta x_t = 0$ となる。また、極限 $x_t \rightarrow 0$ および $x_t \rightarrow 1$ は、資源が時間を通じて不変であるという意味で定常点である。

また $h(x_t; r)$ の 1 階微分と 2 階微分について次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{dh(x_t; r)}{dx_t} &= r x_t^{r-1} - 1 \\ \frac{d^2 h(x_t; r)}{dx_t^2} &= (r-1) r x_t^{r-2} \end{aligned} \quad (3)$$

(3) の右辺を 0 と置いた式を解くと、 $h(x_t; r)$ の極値は次式で与えられる。

1) 本研究は、龍谷大学経営学会の研究部会「社会科学の研究や教育での Maxima の活用」の 2017 年度の研究成果である。

2) この用語は、J. M. Conrad [8], 38 頁を参照。

$$x_t^* = r^{\frac{1}{1-r}} \quad (4)$$

2 階微分が負であることから、(4) は最大値である。横軸に x_t 、縦軸に $h(x_t; r)$ をとって (2) のグラフを描くと図 1 のようになる。この図で上方の曲線は $r = 0.2$ 、下方の曲線は $r = 0.7$ を仮定している。 r が大きいほど x_t^* は大きい。また

$$\lim_{r \rightarrow 1} x_t^* = \frac{1}{e} \approx 0.368,$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} x_t^* = 0$$

が成り立つ。(4) の x_t^* は最大持続可能生産量 (MSY)³⁾ と呼ばれる。 $x_t < x_t^*$ の範囲では資源の変化量は増加するが、魚の餌や環境の限界などにより、 $x_t = x_t^*$ においてこの変化量は最大となる。そして $x_t > x_t^*$ の範囲では資源の変化量は減少して、新たに生まれる個体数と死亡する個体数が等しい定常点 1 に至る。また、異なる r について $h(x_t; r)$ の変化を見ると

$$\frac{\partial h(x_t; r)}{\partial r} = x_t^r \log(x_t)$$

となり、 $0 < x_t < 1$ より右辺は常に $\frac{\partial h(x_t; r)}{\partial r} < 0$ を満たすので、性質 2.1 のように狭義単調減少となる。□

本稿では、このパラメタ r を増殖度と呼ぶことにする。

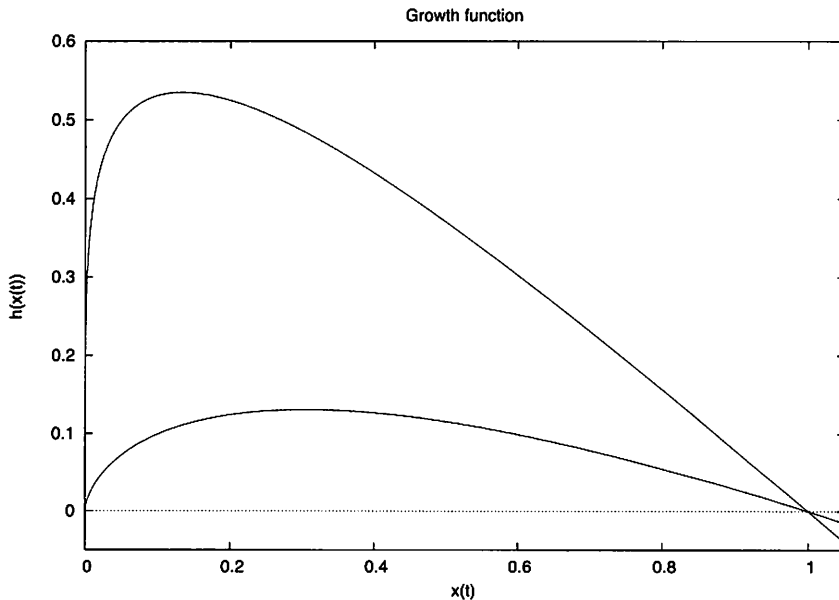


図 1 純増殖関数 ($r = 0.2, r = 0.7$)

3) MSY は Maximum Sustainable Yield の略記である。

2.2 純増殖関数と消費

以下では有限期間のモデルを考察する。 $T := \{0, 1, 2, \dots, T-1, T\}$ を計画期間とする。さらに T から最終期 T を除いたものを T^{-T} , T から初期 0 を除いたものを T^{-0} と記述する。 $\mathcal{P} := \{1, 2, 3\}$ をプレイヤーの集合とする。 $a_{i,t}$, ($i \in \mathcal{P}$) を t 期におけるプレイヤー i による資源の消費量とする。前節ではプレイヤーが消費を行わない場合の純増殖関数を考察した。本節ではプレイヤーが消費を行う場合の資源の動学方程式を導入する。ここでは Levhari, D. and Mirman [3] にしたがって、次の動学方程式を仮定する。

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= \left(x_t - \sum_{i \in \mathcal{P}} a_{i,t} \right)^r, \quad (0 \leq t \leq T-1) \\ x_0 &: \text{given}, \quad x_0 \in (0, 1) \end{aligned} \quad (5)$$

このとき、純増殖関数は次式で表される。

$$h(x_t, a_{1,t}, a_{2,t}, a_{3,t}; r) = \left(x_t - \sum_{i \in \mathcal{P}} a_{i,t} \right)^r - x_t \quad (6)$$

性質 2.2. プレイヤーによる消費 $a_{i,t} > 0$ は, (x, h) -平面上のグラフ全体を下にシフトさせる。

証明. (5) において, t 期における総消費はその期の資源を上回ることとはできない。それゆえ, 各期の消費は次の制約条件に従う。

$$x_t - \sum_{i \in \mathcal{P}} a_{i,t} > 0, \quad (t \in T^{-T}) \quad (7)$$

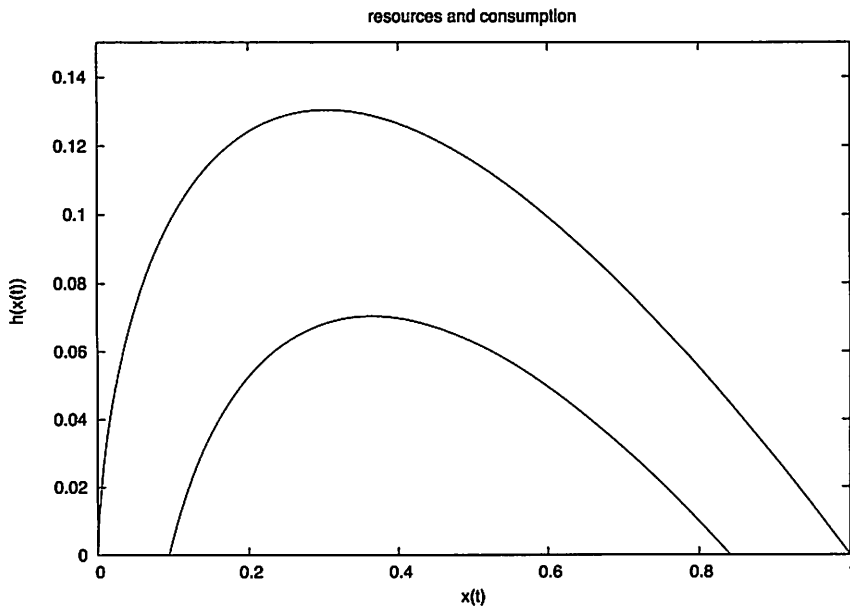


図2 消費による純増殖関数のシフト ($r = 0.7$)

また,

$$\frac{\partial h}{\partial a_{i,t}} = -r \left(x_t - \sum_{j \in \mathcal{P}} a_{j,t} \right)^{r-1}, \quad (i \in \mathcal{P})$$

より, 制約条件 (7) から $\partial h / \partial a_{i,t} < 0$ となるので, 性質 2.2 が導かれる。□

実際, (6) に具体的な数値を与えて純増殖関数のグラフを描く。図 2 では, $r = 0.7$ を仮定して横軸に資源 x_t , 縦軸に資源の変化量 $h(x_t)$ をとって純増殖関数のグラフを描いている。上方に位置するグラフは, プレイヤーによる消費が行われない自然状態での純増殖関数のグラフであり, 下方のそれは各プレイヤーが每期同じ量 $a_{i,t} = 0.02$, $(i \in \mathcal{P})$ を消費する場合の純増殖関数のグラフである。

3 プレイヤーの目的関数

本節では, 均衡解を計算するために, (5) の $t \in \mathcal{T}^{-T}$ に関する制約条件式を変形する。そして効用最大化問題を定式化する。

3.1 制約条件の式変形

最初に $t = 0$ のときを考える。仮定より $0 < x_0 < 1$ であるから, (5) は次式で表される。

$$\begin{aligned} x_1 &= \left(x_0 - \sum_{i \in \mathcal{P}} a_{i,0} \right)^r \\ &= x_0^r \left(1 - \sum_{i \in \mathcal{P}} \alpha_{i,0} \right)^r \end{aligned}$$

次に $t = 1$ のときを考えると, (5) は次式で表される。

$$\begin{aligned} x_2 &= \left(x_1 - \sum_{i \in \mathcal{P}} a_{i,1} \right)^r \\ &= x_1^r \left(1 - \sum_{i \in \mathcal{P}} \alpha_{i,1} \right)^r \\ &= x_0^{r^2} \left(1 - \sum_{i \in \mathcal{P}} \alpha_{i,0} \right)^{r^2} \left(1 - \sum_{i \in \mathcal{P}} \alpha_{i,1} \right)^r \end{aligned}$$

この操作を t を増やしながら再帰的に続けると次式を得る。

$$x_k = x_0^{r^k} \prod_{t=0}^{k-1} \left(1 - \sum_{i \in \mathcal{P}} \alpha_{i,t} \right)^{r^{k-t}}, \quad (k \in \mathcal{T}^{-0}) \quad (8)$$

ただし

$$\alpha_{i,t} = \frac{a_{i,t}}{x_t}, \quad (i \in \mathcal{P}, t \in \mathcal{T}^{-T}) \quad (9)$$

と置いている。(9)は、当該期における資源に対する消費の割合を意味する。本稿では、これを消費率と呼ぶ。すべてのプレイヤー $i \in \mathcal{P}$ および計画期間 $t \in \mathcal{T}^{-T}$ について、この消費率は次の制約条件に従う。

$$\begin{cases} 1 - \sum_{i \in \mathcal{P}} \alpha_{i,t} > 0 \\ 0 < \alpha_{i,t} < 1 \end{cases} \quad (10)$$

(8) の対数をとると次式を得る。

$$\log(x_k) = r^k \log(x_0) + \sum_{t=0}^{k-1} r^{k-t} \log\left(1 - \sum_{i \in \mathcal{P}} \alpha_{i,t}\right), \quad (k \in \mathcal{T}^{-0}) \quad (11)$$

プレイヤー $i \in \mathcal{P}$ は計画期間 $\mathcal{T}^{-T}$ 内で資源を獲得し消費する。その消費 $a_{i,t}$ から得る効用は、次の対数型効用関数で表されると仮定する。

$$u_i(a_{i,t}) = \log(a_{i,t})$$

そしてプレイヤー i は、計画期間に渡る効用の割引現在価値の総和と期末の資源 x_T から得る効用の合計を最大化する消費計画を立てるものと仮定する。また、期末の資源 x_T から得る効用は、 $\log(x_T)$ の線形関数で表されるものと仮定する。

$$v_i(x_T) = \sigma_i + \log(x_T)$$

σ_i は正定数である。このときプレイヤー $i \in \mathcal{P}$ の目的関数は次式で表される。

$$\begin{aligned} & \text{Maximize}_{\{a_{i,t} | t \in \mathcal{T}^{-T}\}} \beta_i^T v_i(x_T) + \sum_{t \in \mathcal{T}^{-T}} \beta_i^t u_i(a_{i,t}) \\ \Leftrightarrow & \text{Maximize}_{\{a_{i,t} | t \in \mathcal{T}^{-T}\}} \beta_i^T (\sigma_i + \log(x_T)) + \sum_{t \in \mathcal{T}^{-T}} \beta_i^t \log(a_{i,t}) \end{aligned} \quad (12)$$

ただし、 β_i はプレイヤー $i \in \mathcal{P}$ の効用の割引因子であり、期間に依らず同じであると仮定する。そして、範囲を $\beta_i \in (0, 1)$ と仮定する。

3.2 効用最大化問題の定式化

(12) にある目的関数を J_i とし、 $\alpha_{i,t}$ と x_t で表す。

$$\begin{aligned} & \text{Maximize}_{\{a_{i,t} | t \in \mathcal{T}^{-T}\}} J_i = \beta_i^T (\sigma_i + \log(x_T)) + \sum_{t \in \mathcal{T}^{-T}} \beta_i^t \log(a_{i,t}) \\ \Leftrightarrow & \text{Maximize}_{\{a_{i,t} | t \in \mathcal{T}^{-T}\}} J_i = \beta_i^T \sigma_i + \log(x_0) + \sum_{t \in \mathcal{T}^{-0}} \beta_i^t \log(x_t) + \sum_{t \in \mathcal{T}^{-T}} \beta_i^t \log(\alpha_{i,t}) \end{aligned} \quad (13)$$

定義より、 J_i は各 $a_{i,t}$ の単調増加関数である。そして式の表記を簡潔にするために、次の記号を使う。

$$\theta_{i,k} := \sum_{\tau=1}^k (\beta_i \tau)^\tau$$

また、定義より $\theta_{i,k}$ は β_i の単調増加関数である。(11) を (13) に代入して整理するとプレイヤー $i \in \mathcal{P}$ の目的関数を得る。

$$J_i = \beta_i^T \sigma_i + (1 + \theta_{i,T}) \log(x_0) + \sum_{t \in T-T} \beta_i^t \log(\alpha_{i,t}) + \sum_{t \in T-T} \beta_i^t (\theta_{i,T-t}) \log \left(1 - \sum_{j \in \mathcal{P}} \alpha_{j,t} \right) \quad (14)$$

プレイヤー $i \in \mathcal{P}$ は、他のプレイヤーの消費率 $\alpha_{j,t}$ ($j \neq i$) を所与として、自己の効用を最大化する。目的関数 (14) の第3項は、計画期間に渡る消費率 $\alpha_{i,t}$ から得る効用の割引現在価値を意味する。第4項は他のプレイヤーの消費率を所与としたとき、自己の貯蓄率から得る効用を意味する。ここで、貯蓄率とは当該期に消費されずに残された資源の当該期の資源に対する比率を意味する。各プレイヤーは、この貯蓄率から得る効用に関して主観的な評価を持っている。 $\theta_{i,T-t}$ は、その評価を表す係数と考えられる。各期の貯蓄率からプレイヤーが得る効用は、計画期間の初期 $t = 0$ では $\theta_{i,T}$ 、 $t = T-1$ では、 $\theta_{i,1}$ で表される。プレイヤー $i \in \mathcal{P}$ が $t \in T-T$ 期の消費率を増加させた場合、この消費率の増加によって効用の割引現在価値の合計は増加するが、 $t+1$ 期以降の貯蓄率の減少をもたらす、この貯蓄率の減少による効用の割引現在価値の合計は減少する。本稿で考察するプレイヤーの効用最大化問題は、今期どれだけの量を消費し、次期以降にどれだけの量を貯蓄するかという異時点間の選択の問題であり、かつその選択行動が他のプレイヤーの選択行動に依存する問題として特徴付けられる。

4 マルチリーダーフォロワーゲーム

本節では、プレイヤー3人のうち、先導者の数が1人および2人の場合のマルチリーダーフォロワーゲームの均衡解を求める。先導者数が1のとき、2人の追随者間で Cournot-Nash 競争が行われる。先導者の数が2のとき、2人の先導者間で Cournot-Nash 競争が行われる。いずれの場合も、先導者と追随者の間では Stackelberg 競争が行われる。

4.1 先導者の数が1、追随者の数が2のマルチリーダーフォロワーゲーム

プレイヤー1を先導者、プレイヤー2と3を追随者 $\mathcal{F} = \{2, 3\}$ とする。追随者は先導者の消費率を所与として自己の効用を最大化する。(14) の i に $f \in \mathcal{F}$ を代入した式を考える。

$$J_f = \beta_f^T \sigma_f + (1 + \theta_{f,T}) \log(x_0) + \sum_{t \in T-T} \beta_f^t \log(\alpha_{f,t}) + \sum_{t \in T-T} \beta_f^t (\theta_{f,T-t}) \log \left(1 - \sum_{j \in \mathcal{P}} \alpha_{j,t} \right) \quad (15)$$

(15) は追随者の目的関数である。 J_f の停留点を求めるために (15) を $\alpha_{f,t}$ 、 $(f \in \mathcal{F})$ で偏微分した式を0と置く。

$$\frac{\partial J_f}{\partial \alpha_{f,t}} = \frac{\beta_f^t}{\alpha_{f,t}} - \frac{\beta_f^t \theta_{f,T-t}}{1 - \sum_{j \in \mathcal{P}} \alpha_{j,t}} = 0 \quad (16)$$

これを $\alpha_{f,t}$, ($f \in \mathcal{F}$) について解いた式を整理すると次式を得る。

$$\alpha_{f,t} = \left(\theta_{f,T-t} \left(1 + \frac{1}{\theta_{2,T-t}} + \frac{1}{\theta_{3,T-t}} \right) \right)^{-1} (1 - \alpha_{1,t}) \quad (17)$$

(17) は追随者の反応関数である。追随者の消費率は、先導者の消費率の線形関数となる。

先導者であるプレイヤー 1 は、追随者の行動を把握している。すなわち、追随者の反応関数を知っている。このことから、先導者の目的関数に含まれる次式の $\alpha_{f,t}$, ($f \in \mathcal{F}$) を、 $\alpha_{1,t}$ の関数で置き換えることができる。

$$J_1 = \beta_1^T \sigma_1 + (1 + \theta_{1,T}) \log(x_0) + \sum_{t \in T-T} \beta_1^t \log(\alpha_{1,t}) + \sum_{t \in T-T} \beta_1^t (\theta_{1,T-t}) \log \left(1 - \sum_{j \in \mathcal{P}} \alpha_{j,t} \right) \quad (18)$$

先導者の目的関数は追随者の反応関数 (17) を (18) に代入した式である。この式を導くために、(18) の対数部分を、あらかじめ次式のように整理しておく。

$$\begin{aligned} \log \left(1 - \sum_{j \in \mathcal{P}} \alpha_{j,t} \right) &= \log \left((1 - \alpha_{1,t}) \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{\theta_{2,T-t}} + \frac{1}{\theta_{3,T-t}}} \right) \right) \\ &= \log(1 - \alpha_{1,t}) - \log \left(1 + \frac{1}{\theta_{2,T-t}} + \frac{1}{\theta_{3,T-t}} \right) \end{aligned} \quad (19)$$

(19) を (18) に代入すると、先導者の目的関数を得る。

$$J_1 = \text{const.} + \sum_{t \in T-T} \beta_1^t \log(\alpha_{1,t}) + \sum_{t \in T-T} \beta_1^t \theta_{1,T-t} \log(1 - \alpha_{1,t}) \quad (20)$$

ただし (20) では、定数項を const. と置いている。

$$\text{const.} = \beta_1^T \sigma_1 + (1 + \theta_{1,T}) \log(x_0) - \sum_{t \in T-T} \beta_1^t \theta_{1,T-t} \log \left(1 + \frac{1}{\theta_{2,T-t}} + \frac{1}{\theta_{3,T-t}} \right)$$

先導者は、(20) を最大にする $\alpha_{1,t}$ を選択する。停留点を求めるために $\alpha_{1,t}$ に関して微分した式を 0 と置くと次式を得る。

$$\frac{dJ_1}{d\alpha_{1,t}} = \frac{\beta_1^t}{\alpha_{1,t}} - \frac{\beta_1^t \theta_{1,T-t}}{1 - \alpha_{1,t}} = 0 \quad (21)$$

また $\alpha_{1,t}$ に関する 2 階微分について次式が成り立つ。

$$\frac{d^2 J_1}{d\alpha_{1,t}^2} = - \frac{\beta_1^t \left(\alpha_{1,t}^2 \theta_{1,T-t} + (\alpha_{1,t} - 1)^2 \right)}{(\alpha_{1,t} - 1)^2 \alpha_{1,t}^3} < 0$$

これより (21) から得られる先導者の消費率が、最適消費率であることが保証される。その最適値を $\alpha_{1,t}^*$ で表す。

$$\alpha_{1,t}^* = \frac{1}{1 + \theta_{1,T-t}} \quad (22)$$

(22) を (17) に代入すると、追従者の最適消費率を得る。この最適値を $\alpha_{f,t}^*, (f \in \mathcal{F})$ で表す。

$$\alpha_{f,t}^* = \left(\theta_{f,T-t} \left(1 + \frac{1}{\theta_{1,T-t}} \right) \left(1 + \frac{1}{\theta_{2,T-t}} + \frac{1}{\theta_{3,T-t}} \right) \right)^{-1} \quad (23)$$

(22), (23) が消費率に関する条件 (10) を満たすことを確かめる。 $\theta_{i,t} > 0, (i \in \mathcal{P})$ であるから (22), (23) は正数である。(22) の分母は 1 より大きい。それゆえ $\alpha_{1,t}^* < 1$ である。また (23) から $f \in \mathcal{F}$ について次式を得る。

$$\alpha_{f,t}^* = \left(\left(1 + \frac{1}{\theta_{1,T-t}} \right) \left(1 + \theta_{f,T-t} + \frac{\theta_{2,T-t}}{\theta_{3,T-t}} \right) \right)^{-1} \quad (24)$$

(24) において、右辺の第 1 因子と第 2 因子は共に 1 よりも大きい。それゆえ、それらの積は 1 よりも大きい。 $\alpha_{f,t}^*, (f \in \mathcal{F})$ はこの逆数であるから 1 よりも小さい。また次式が成り立つ。

$$1 - \sum_{i \in \mathcal{P}} \alpha_{i,t}^* = \frac{\theta_{1,T-t} \theta_{2,T-t} \theta_{3,T-t}}{(\theta_{1,T-t} + 1) (\theta_{2,T-t} \theta_{3,T-t} + \theta_{3,T-t} + \theta_{2,T-t})} > 0$$

以上の考察から、 $\alpha_{i,t}^*, (i \in \mathcal{P})$ はマルチリーダーフォロワーゲームの均衡解である。

4.1.1 先手有利性の十分条件

次に、先手有利性の十分条件について考察する。よって、本小々節において条件とは十分条件を意味する。

補題 4.1. 先手有利性、すなわち $J_1^* > \text{Max}(J_2^*, J_3^*)$ が成立するための十分条件は

$$\min(\beta_2, \beta_3) \geq \beta_1$$

である。

証明. 総効用を求めるために、均衡資源および均衡消費を求める。総効用 J_i^* と均衡消費 $a_{i,t}^*$ の単調性から、各期の均衡消費の大小を見る。

均衡資源は (8) から次式で表される。

$$\begin{aligned} x_t^* &= x_0^* \prod_{\tau=0}^{t-1} \left(1 - \sum_{i \in \mathcal{P}} \alpha_{i,\tau}^* \right)^{r^{t-\tau}} \\ &= x_0^* \prod_{\tau=0}^{t-1} \left(\left(1 + \frac{1}{\theta_{1,T-\tau}} \right) \left(1 + \frac{1}{\theta_{2,T-\tau}} + \frac{1}{\theta_{3,T-\tau}} \right) \right)^{-r^{t-\tau}}, \quad (t \in \mathcal{T}^{-0}) \end{aligned} \quad (25)$$

(22), (23), (25) から, 均衡消費 $a_{i,t}^*$, ($i \in \mathcal{P}$) は次式で表される。

$$\begin{aligned} a_{1,t}^* &= \alpha_{1,t}^* x_t^* = (1 + \theta_{1,T-t})^{-1} x_t^* \\ a_{f,t}^* &= \alpha_{f,t}^* x_t^* = \left(\theta_{f,T-t} \left(1 + \frac{1}{\theta_{1,T-t}} \right) \left(1 + \frac{1}{\theta_{2,T-t}} + \frac{1}{\theta_{3,T-t}} \right) \right)^{-1} x_t^* \end{aligned}$$

先導者の消費と追随者の消費を比較するために差をとると, 次式を得る。

$$a_{1,t}^* - a_{2,t}^* = \frac{x_t^* (\theta_{3,T-t} (\theta_{2,T-t} - \theta_{1,T-t}) + \theta_{3,T-t} + \theta_{2,T-t})}{(\theta_{1,T-t} + 1) (\theta_{2,T-t} \theta_{3,T-t} + \theta_{3,T-t} + \theta_{2,T-t})} \quad (26)$$

$$a_{1,t}^* - a_{3,t}^* = \frac{x_t^* (\theta_{2,T-t} (\theta_{3,T-t} - \theta_{1,T-t}) + \theta_{3,T-t} + \theta_{2,T-t})}{(\theta_{1,T-t} + 1) (\theta_{2,T-t} \theta_{3,T-t} + \theta_{3,T-t} + \theta_{2,T-t})} \quad (27)$$

(26), (27) の分母は共に正である。分子の第1項が正であれば, 先導者の消費は追随者の消費を上回る。すなわち, すべての計画期間に対して次の不等式が成り立つ。

$$a_{1,t}^* > a_{f,t}^*, \quad (f \in \mathcal{F}) \quad (28)$$

(28) の2つの不等式が共に成立するための十分条件は

$$\min(\theta_{2,T-t}, \theta_{3,T-t}) \geq \theta_{1,T-t}$$

が成り立つことである。そして, $\theta_{i,T-t}$ と β_i の単調性から,

$$\min(\beta_2, \beta_3) \geq \beta_1$$

が十分条件となる。 □

命題 4.1. 追随者の効用の割引因子について, $\beta_3 \geq \beta_2$ (resp. $\beta_3 \leq \beta_2$) であるとき, $\sigma_1 > \sigma_2$ (resp. $\sigma_1 > \sigma_3$) であれば, $J_1^* > J_2^*$ (resp. $J_1^* > J_3^*$) となる。これが先手有利性の十分条件である。

証明. 補題 4.1 より, 追随者の効用の割引因子 β_2 と β_3 のうち, 小さいほうが先導者の効用の割引因子よりも大きければ, (28) の2つの不等式は共に成り立つ。いま追随者の効用の割引因子について, $\beta_3 \geq \beta_2$ (resp. $\beta_3 \leq \beta_2$) と仮定する。このとき, $a_{2,t}^* \geq a_{3,t}^*$ (resp. $a_{2,t}^* \leq a_{3,t}^*$) であることが確かめられる。この場合, 効用の割引因子と消費には次の関係がある。

$$\begin{cases} \beta_3 \geq \beta_2 \geq \beta_1 & \text{ならば } a_{1,t}^* > a_{2,t}^* \geq a_{3,t}^* \\ \beta_2 \geq \beta_3 \geq \beta_1 & \text{ならば } a_{1,t}^* > a_{3,t}^* \geq a_{2,t}^* \end{cases} \quad (29)$$

(29) において, $\beta_2 = \beta_3$ のとき, $a_{2,t}^* = a_{3,t}^*$ となる。追随者のグループにおいて, 各プレイヤーの効用の割引因子が等しければ, そのグループにおけるプレイヤーの消費は等しい。そして, 追随者の効用の割引因子が先導者の効用の割引因子に等しいかそれ以上であれば, 先導者の消費は追随者の消費よりも大きい。

均衡における先導者の総効用を J_1^* 、追随者の総効用を J_f^* 、($f \in \mathcal{F}$) とする。

$$\begin{aligned} J_1^* &= \beta_1^T (\sigma_1 + \log(x_T^*)) + \sum_{t \in T-T} \beta_1^t \log(a_{1,t}^*) \\ J_f^* &= \beta_f^T (\sigma_f + \log(x_T^*)) + \sum_{t \in T-T} \beta_f^t \log(a_{f,t}^*) \end{aligned} \quad (30)$$

(30) では追随者の効用の割引因子を β_f 、期末の資源に関する効用関数の定数項を σ_f で表している。先導者と追随者の総効用を比較するために、(29) において $\beta_1 = \beta_f$ を仮定する。このとき、均衡における先導者の総効用と各追随者の総効用の差は次式で表される。

$$\begin{aligned} J_1^* - J_f^* &= \beta_1^T (\sigma_1 + \log(x_T^*)) - \beta_f^T (\sigma_f + \log(x_T^*)) + \sum_{t \in T-T} \beta_1^t \log(a_{1,t}^*) - \sum_{t \in T-T} \beta_f^t \log(a_{f,t}^*) \\ &= \beta_1^T (\sigma_1 - \sigma_f) + \sum_{t \in T-T} \beta_1^t \log\left(\frac{a_{1,t}^*}{a_{f,t}^*}\right) \end{aligned} \quad (31)$$

$a_{1,t}^*/a_{f,t}^* > 1$ であるから、 $\log(a_{1,t}^*/a_{f,t}^*) > 0$ である。したがって、(31) から、 $\sigma_1 > \sigma_f$ であれば、 $J_1^* > J_f^*$ となり、先手有利性の十分条件となる。 $\square$

4.1.2 数値例

パラメタに数値を代入して、マルチリーダーフォロワーゲーム下の資源の変化をグラフで表す。次の数値を仮定する。

$$T = 10, \quad \beta_1 = 0.5, \quad \beta_2 = 0.6, \quad \beta_3 = 0.7, \quad r = 0.5, \quad x_0 = 0.2 \quad (32)$$

図3では、横軸に時間 t 、縦軸に資源量 x_t をとっている。図3では資源は最初大きく減少するが、

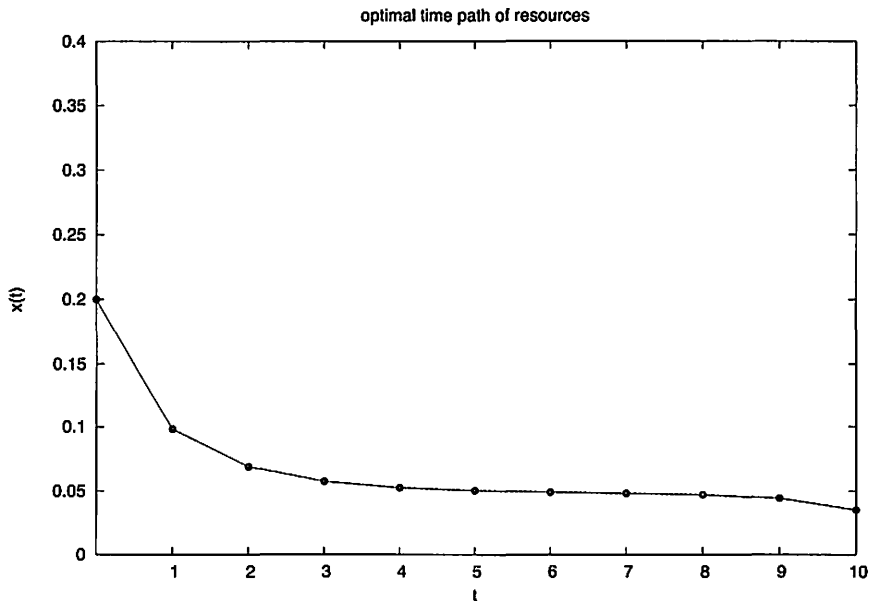


図3 マルチリーダーフォロワーゲーム下の資源の変化

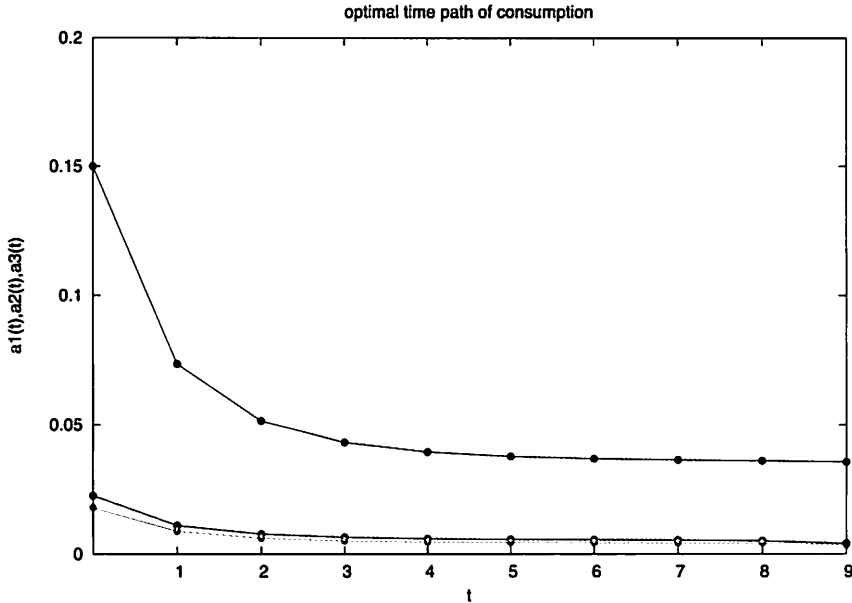


図4 先導者数が1の場合の消費の変化（上が先導者，下2つが追随者）

その後はほぼ一定の大きさで変化する。

次に、各プレイヤーの消費の変化をみる。図4では、横軸に時間 t 、縦軸に消費 $a_i(t)$, ($i \in \mathcal{P}$) をとっている。最も上に位置するグラフは、先導者の消費の変化を表すグラフである。計画期間の初めの期間では、消費の時間変化は先導者の方が追随者に比べて大きい。消費は第3期にかけて減少する。その減少傾向は第3期以降も続くが、時間変化は少なくなりほぼ一定の大きさで推移することがわかる。また先導者の消費は、すべての期間において追随者の消費を上回り、かつ両者間の消費の格差はかなり大きいことが確かめられる。いわゆる先導者が「一人勝ち」する状況が生じる。追随者の消費は、下方に位置する2つのグラフで表されている。追随者のグループに属するプレイヤー2の消費は、そのグループに属するプレイヤー3の消費を上回るが、その格差は極めて小さい。

4.2 先導者の数が2、追随者の数が1のマルチリーダーフォロワーゲーム

プレイヤー1と2を先導者 $\mathcal{L} = \{1, 2\}$ 、プレイヤー3を追随者とする。追随者の目的関数は次式で表される。

$$J_3 = \beta_3^T \sigma_3 + (1 + \theta_{3,T}) \log(x_0) + \sum_{t \in T-T} \beta_3^t \log(\alpha_{3,t}) + \sum_{t \in T-T} \beta_3^t \theta_{3,T-t} \log \left(1 - \sum_{i \in \mathcal{P}} \alpha_{i,t} \right) \quad (33)$$

追随者は先導者の消費率を所与として効用を最大化する。停留点を求めるために(33)を $\alpha_{3,t}$ で偏微分した式を0と置く。

$$\frac{\partial J_3}{\partial \alpha_{3,t}} = \frac{\beta_3^t}{\alpha_{3,t}} - \frac{\beta_3^t \theta_{3,T-t}}{1 - \sum_{i \in \mathcal{P}} \alpha_{i,t}} = 0 \quad (34)$$

(34) から次式を得る。

$$\alpha_{3,t} = \left(\frac{1}{1 + \theta_{3,T-t}} \right) \left(1 - \sum_{j \in \mathcal{L}} \alpha_{j,t} \right) \quad (35)$$

(35) は追随者の反応関数である。先導者 $\ell \in \mathcal{L}$ の目的関数は次式で表される。

$$J_\ell = \beta_\ell^T \sigma_\ell + (1 + \theta_{\ell,T}) \log(x_0) + \sum_{t \in \mathcal{T}-T} \beta_\ell^t \log(\alpha_{\ell,t}) + \sum_{t \in \mathcal{T}-T} \beta_\ell^t \theta_{\ell,T-t} \log \left(1 - \sum_{j \in \mathcal{P}} \alpha_{j,t} \right) \quad (36)$$

先導者は追随者の反応関数を知っている。それゆえ、先導者 $\ell \in \mathcal{L}$ の目的関数は (35) を (36) に代入した次式で表される。

$$J_\ell = \text{const.} + \sum_{t \in \mathcal{T}-T} \beta_\ell^t \log(\alpha_{\ell,t}) + \sum_{t \in \mathcal{T}-T} \beta_\ell^t \theta_{\ell,T-t} \log \left(1 - \sum_{j \in \mathcal{L}} \alpha_{j,t} \right) \quad (37)$$

ただし、定数項を次のように const. と置いている。

$$\text{const.} = \beta_\ell^T \sigma_\ell + (1 + \theta_{\ell,T}) \log(x_0) + \sum_{t \in \mathcal{T}-T} \beta_\ell^t \theta_{\ell,T-t} \log \left(\frac{\theta_{3,T-t}}{1 + \theta_{3,T-t}} \right)$$

先導者のグループ内では、Cournot-Nash 競争が行われる。すなわち、プレイヤー $\ell \in \mathcal{L}$ は $\mathcal{L}$ 内の ℓ 以外のプレイヤーの消費率を所与として効用を最大化する。停留点を求めるために、(37) を $\alpha_{\ell,t}$ 、($\ell \in \mathcal{L}$) に関して偏微分した式を 0 と置く。

$$\frac{\partial J_\ell}{\partial \alpha_{\ell,t}} = \frac{\beta_\ell^t}{\alpha_{\ell,t}} - \frac{\beta_\ell^t \theta_{\ell,T-t}}{1 - \sum_{j \in \mathcal{L}} \alpha_{j,t}} = 0 \quad (38)$$

(38) から、 $\alpha_{\ell,t}$ 、($\ell \in \mathcal{L}$) の最適値を求める。この最適値を $\alpha_{\ell,t}^*$ 、($\ell \in \mathcal{L}$) とする。

$$\alpha_{\ell,t}^* = \left(\theta_{\ell,T-t} \left(1 + \frac{1}{\theta_{1,T-t}} + \frac{1}{\theta_{2,T-t}} \right) \right)^{-1} \quad (39)$$

(39) を (35) に代入すると、追随者の消費率の最適値 $\alpha_{3,t}^*$ を得る。

$$\alpha_{3,t}^* = \left((1 + \theta_{3,T-t}) \left(1 + \frac{1}{\theta_{1,T-t}} + \frac{1}{\theta_{2,T-t}} \right) \right)^{-1} \quad (40)$$

(39) が 1 よりも小さいことは、 $\ell \in \mathcal{L}$ について

$$\alpha_{\ell,t}^* = \left(1 + \theta_{\ell,T-t} + \frac{\theta_{1,T-t}}{\theta_{2,T-t}} \right)^{-1} \quad (41)$$

と式を変形すれば、(41) は 1 よりも大きい正数の逆数であることから 1 よりも小さい。(40) の右辺の第 1 因子、第 2 因子は共に 1 よりも大きい正数である。その 2 つの因子の積は 1 よりも大きい。したがって、その逆数は 1 よりも小さい。また、次式が成り立つことを確かめることができる。

$$1 - \sum_{i \in \mathcal{P}} \alpha_{i,t}^{**} = \frac{\theta_{1,T-t} \theta_{2,T-t} \theta_{3,T-t}}{(\theta_{1,T-t} \theta_{2,T-t} + \theta_{1,T-t} + \theta_{2,T-t}) (\theta_{3,T-t} + 1)} > 0$$

よって、 $\alpha_{i \in \mathcal{I}}^{**}$ 、($i \in \mathcal{P}$) はマルチリーダーフォロワーゲームの均衡解である。

均衡消費率から均衡資源 x_i^{**} と均衡消費 $a_{i,t}^{**}$ 、($i \in \mathcal{P}$) が導かれる。

$$x_i^{**} = x_0^t \prod_{\tau=0}^{t-1} \left(\left(1 + \frac{1}{\theta_{1,T-\tau}} + \frac{1}{\theta_{2,T-\tau}} \right) \left(1 + \frac{1}{\theta_{3,T-\tau}} \right) \right)^{-r^t - \tau}, \quad (t \in \mathcal{T}^{-0}) \quad (42)$$

$$a_{\ell,t}^{**} = \left(\theta_{\ell,T-t} \left(1 + \frac{1}{\theta_{1,T-t}} + \frac{1}{\theta_{2,T-t}} \right) \right)^{-1} x_i^{**}, \quad (\ell \in \mathcal{L}) \quad (43)$$

$$a_{3,t}^{**} = \left((1 + \theta_{3,T-t}) \left(1 + \frac{1}{\theta_{1,T-t}} + \frac{1}{\theta_{2,T-t}} \right) \right)^{-1} x_i^{**} \quad (44)$$

4.2.1 先手有利性の十分条件

本小々節も 4.1.1 と同様の考察を行う。

補題 4.2. 先手有利性、すなわち $\min(J_1^{**}, J_2^{**}) > J_3^{**}$ が成立するための十分条件⁴⁾は

$$\beta_3 \geq \max(\beta_1, \beta_2)$$

である。

この補題 4.2 を用いて、次の命題を得る。

命題 4.2. 追隨者の効用の割引因子について、 $\beta_2 \geq \beta_1$ (resp. $\beta_2 \leq \beta_1$) であるとき、

$\sigma_2 > \sigma_3$ (resp. $\sigma_1 > \sigma_3$) であれば、 $J_2^{**} > J_3^{**}$ (resp. $J_1^{**} > J_3^{**}$) となる。これが先手有利性の十分条件である。

証明は大小構造に留意すると 4.1.1 と同様であるため、省略する。

4.2.2 数値例

先導者の数が 1 の場合の資源の変化と先導者の数が 2 の場合のそれを比較する。このために次式を計算する。

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{1}{\theta_{1,T-\tau}} \right) \left(1 + \frac{1}{\theta_{2,T-\tau}} + \frac{1}{\theta_{3,T-\tau}} \right) - \left(1 + \frac{1}{\theta_{1,T-\tau}} + \frac{1}{\theta_{2,T-\tau}} \right) \left(1 + \frac{1}{\theta_{3,T-\tau}} \right) \\ &= \frac{\theta_{3,T-\tau} - \theta_{1,T-\tau}}{\theta_{1,T-\tau} \theta_{2,T-\tau} \theta_{3,T-\tau}} \end{aligned} \quad (45)$$

いま追隨者の効用の割引因子が先導者のそれを上回るものと仮定する。すなわち、 $\beta_3 > \beta_1$ を仮定

4) ここで、 J_i^{**} 、($i \in \mathcal{P}$) は、(42)、(43)、(44) を目的関数 (12) の右辺に代入した値として定義されている。

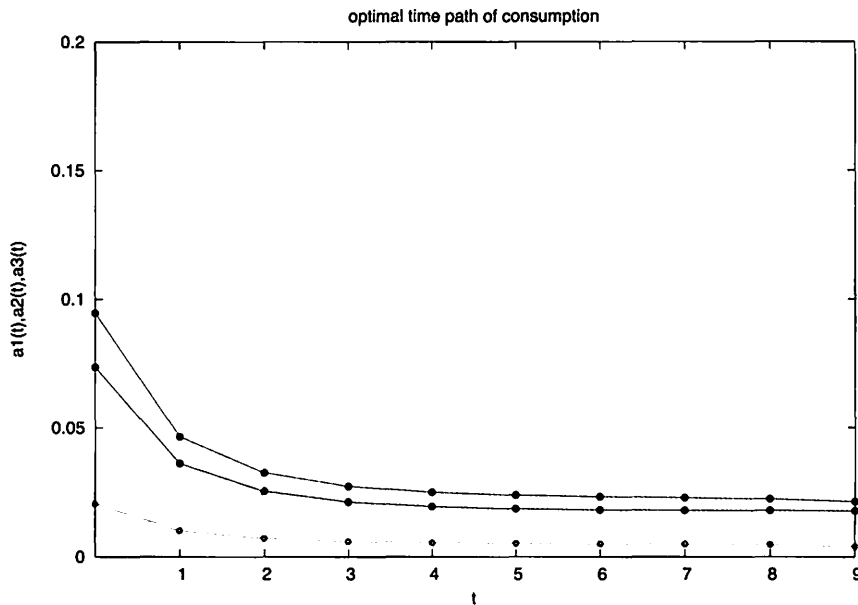


図5 先導者数が2の場合の消費の変化（上2つが先導者，下が追従者）

する。この仮定の下では $\theta_{3,T-\tau} > \theta_{1,T-\tau}$ であるから、(45) の右辺は正である。このとき、 x_t^* と x_t^{**} の大小を比較すると、(25) と (42) から、 $x_t^{**} > x_t^*$ となることがわかる。したがって、資源は先導者の数が2の場合の方が、先導者の数が1の場合に比べてより高い水準で変化する。(32) と同じ数値を仮定してグラフを描くと、先導者の数が2の場合の資源の変化を表すグラフは、図3のグラフの上方に位置する。

次に消費の変化をみる。図5の3つのグラフのうち、上の2つのグラフは先導者の消費の変化を表している。先導者の数が1の場合における消費の変化と同様に、計画期間の初めの期間では、消費の時間変化が相対的に大きい。消費は第3期まで、かなり急速に減少する。その減少傾向は第3期以降も続くが、第3期以後はほぼ一定の大きさに推移する。プレイヤー1の効用の割引因子 β_1 は、プレイヤー2の効用の割引因子 β_2 よりも小さい。それゆえ、すべての計画期間においてプレイヤー1の消費はプレイヤー2の消費を上回る。最も下に位置するグラフは、追従者の消費の変化を表している。追従者の消費は、先導者の消費に比べてかなり低い水準で推移する。

5 後手有利性

前節では、すべての計画期間について先導者の消費が追従者の消費を上回る十分条件を考察した。本節では、先導者の数が2の場合のマルチリーダーフォロワーゲーム⁵⁾において、追従者の総効用が先導者の総効用を上回る十分条件を考察する。よって、本節も条件とは十分条件を意味する。

いま先導者の効用の割引因子について $\beta_2 > \beta_1$ と仮定⁶⁾する。このとき、

$$\theta_{3,T-t} - \theta_{2,T-t} + 1 < \theta_{3,T-t} - \theta_{1,T-t} + 1 \quad (46)$$

5) 先導者の数が1の場合も同様の条件を導くことができるが、ここでは省略する。

6) $\beta_2 < \beta_1$ と仮定しても条件を導出する過程は同じである。

が成り立つ。したがって、(46)の右辺が負であれば、左辺も負となるから、 $a_{1,t}^{**} < a_{3,t}^{**}$ と $a_{2,t}^{**} < a_{3,t}^{**}$ が共に成り立つ。そこで(46)の右辺が負になる条件を考察する。

$$\phi(\beta_1, \beta_3, r, t) = \sum_{\tau=1}^{T-t} (\beta_3 r)^\tau - \sum_{\tau=1}^{T-t} (\beta_1 r)^\tau + 1 \quad (47)$$

と置く。(47)の右辺を0と置いた次の方程式を考える。

$$\phi(\beta_1, \beta_3, r, t) = 0, \quad (t \in T^{-T}) \quad (48)$$

(48)は、 r および t を一定とすると、 (β_1, β_3) -平面上では β_1 と β_3 を2変数とする曲線を表す。そして t に $t \in T^{-T}$ を指定するとき、(48)は曲線族を表す。以下では、この曲線族に関して曲線族を構成する各曲線について、 β_1 と β_3 が正の相関をもつこと、各曲線が横軸と1点で交わること、また曲線が互いに交わらないこと、曲線族が横軸と交わる点が、指定する t の値とどのような関係にあるかを述べる。

5.1 陰関数における変数の相関

β_1 と β_3 の関係を見るために、陰関数(48)の微分を式変形して次式を得る。

$$\frac{d\beta_3}{d\beta_1} = \frac{(\beta_3 r)^t (\beta_3 r - 1)^2 \left((\beta_1 r)^T (\beta_1 r - 1) (T - t) - \left((\beta_1 r)^T - (\beta_1 r)^t \right) \right)}{(\beta_1 r)^t (\beta_1 r - 1)^2 \left((\beta_3 r)^T (\beta_3 r - 1) (T - t) - \left((\beta_3 r)^T - (\beta_3 r)^t \right) \right)} \quad (49)$$

分母および分子の第3因子の符号を考察する。 $\beta_1 r - 1 < 0$, $\beta_3 r - 1 < 0$, $T - t > 0$ であるから、以下の不等式が成り立つ。

$$(\beta_1 r - 1) (T - t) < 0, \quad (\beta_1 r)^T - (\beta_1 r)^t > 0, \quad (\beta_3 r - 1) (T - t) < 0, \quad (\beta_3 r)^T - (\beta_3 r)^t > 0$$

(49)の分母、分子の第3因子はともに負である。このことから、(49)の右辺は正であり、すべての曲線について、 β_3 と β_1 は正の相関をもつ。

5.2 曲線族と横軸の交点

$t = T - 1$ のとき(47)は次式で表される。

$$\phi(\beta_1, \beta_3, r, T - 1) = \beta_3 r - \beta_1 r + 1 = \beta_3 r + (1 - \beta_1 r) \quad (50)$$

仮定より $0 < \beta_1 < 1$, $0 < r < 1$ であるから、 $0 < \beta_1 r < 1$ である。また、仮定より $0 < \beta_3 < 1$ である。したがって、(50)は常に正である。すなわち $t = T - 1$ のとき、先導者の消費 $a_{1,t}^{**}$ は追随者の消費 $a_{3,t}^{**}$ よりも大きい。

$t = T - 2$ のとき(47)は次式で表される。

$$\phi(\beta_1, \beta_3, r, T - 2) = \beta_3 r + \beta_3^2 r^2 - \beta_1 r - \beta_1^2 r^2 + 1 \quad (51)$$

(51) において, $\phi(\beta_1, \beta_3, r, T-2) = 0$ は (β_1, β_3) - 平面上では双曲線を表す。この双曲線が横軸と交わる点を見る。そして, その交点が区間 $(0,1)$ の範囲に存在する条件を考察する。

以下の表記を簡潔にするため, 極限操作 $\beta_i \rightarrow 0$ や $\beta_i \rightarrow 1 (i = 1, 3)$ を $\lim$ 記号を省略して単純に記号的代入で表す。また, 極限操作の順序を上添え字で書く⁷⁾。(51) から次式を得る。

$$\phi(\beta_1, 0^{(1)}, r, T-2) = -\beta_1 r - \beta_1^2 r^2 + 1 \quad (52)$$

(52) において次式が成り立つ。

$$\phi(0^{(2)}, 0^{(1)}, r, T-2) = 1 > 0 \quad (53)$$

$$\phi(1^{(2)}, 0^{(1)}, r, T-2) = 1 - r - r^2 \quad (54)$$

仮定より r は 1 より小さい正数である。(54) の右辺が負であれば, すなわち $r > (\sqrt{5}-1)/2$ であれば, 中間値の定理⁸⁾より区間 $(0,1)$ の範囲に少なくとも 1 つの解を持つ。したがって, 次の関係を得る。

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} < r < 1 \quad \text{ならば} \quad \phi(1^{(2)}, 0^{(1)}, r, T-2) < 0 \quad (55)$$

$t = T - k, (3 \leq k \leq T-1)$ のとき, (47) は次式で表される。

$$\phi(\beta_1, \beta_3, r, T-k) = (\beta_3^k - \beta_1^k) r^k + \phi(\beta_1, \beta_3, r, T-(k-1)) \quad (56)$$

一般に (56) が区間 $(0,1)$ の範囲に少なくとも 1 つの解を持つ条件を導く。(52), (53), (54) と同様の手順で極限值を求めると,

$$\begin{aligned} \phi(0^{(2)}, 0^{(1)}, r, T-k) &= \phi(0^{(2)}, 0^{(1)}, r, T-(k-1)) = 1 > 0 \\ \phi(1^{(2)}, 0^{(1)}, r, T-k) &= -r^k + \phi(1^{(2)}, 0^{(1)}, r, T-(k-1)) \end{aligned} \quad (57)$$

(57) において, $\phi(1^{(2)}, 0^{(1)}, r, T-(k-1)) < 0$ が成り立つものとする。このとき, $\phi(1^{(2)}, 0^{(1)}, r, T-k) < 0$ となるので, $\phi(\beta_1, 0^{(1)}, r, T-k) = 0$ は区間 $(0,1)$ の範囲に少なくとも 1 つの解を持つ。

以上の考察から, 次の関係が再帰的に導かれる。

7) すなわち例えば, 後述の (54) の左辺は,

$$\lim_{\beta_1 \rightarrow 1} \left(\lim_{\beta_3 \rightarrow 0} \phi(\beta_1, \beta_3, r, T-2) \right)$$

を意味している。

8) 連続関数の中間値の定理によれば, 関数 $f(x, y) = 0$ において, $f(x_0, y) > 0$, $f(x_1, y) < 0$ が成り立つとき, $x_0 < x < x_1$ を満たす x に対して $f(x, y) = 0$ となるものが存在する。

$$\begin{aligned}
& \frac{\sqrt{5}-1}{2} < r < 1 \\
\Rightarrow & \phi(1^{(2)}, 0^{(1)}, r, T-2) < 0 \\
\Rightarrow & \phi(1^{(2)}, 0^{(1)}, r, T-3) < 0 \\
& \vdots \\
\Rightarrow & \phi(1^{(2)}, 0^{(1)}, r, T-k) < 0
\end{aligned} \tag{58}$$

陰関数 (48) における β_3 と β_1 の正の相関性から、各曲線が横軸と交わる点は 1 つである。

5.3 曲線族の非交差性

$t = T - (k - 1)$ の場合と $t = T - k$ の場合の曲線を比較する。

$$\begin{cases} \phi(\beta_1, \beta_3, r, T - (k - 1)) = 0 \\ \phi(\beta_1, \beta_3, r, T - k) = 0 \end{cases} \tag{59}$$

と置く。

命題 5.1. (59) において、 $0 < \beta_3 < \beta_1 < 1$ ならば、この 2 つの曲線は、 (β_1, β_3) -平面上において交わらない。

証明. (59) が点 (β_1^*, β_3^*) で交わると仮定する。2 つの曲線の交点では、次式が共に成り立たねばならない。

$$\phi(\beta_1^*, \beta_3^*, r, T - (k - 1)) = 0 \tag{60}$$

$$\phi(\beta_1^*, \beta_3^*, r, T - k) = 0 \tag{61}$$

$\beta_1 = \beta_1^*, \beta_3 = \beta_3^*$ を (56) に代入すると次式を得る。

$$\phi(\beta_1^*, \beta_3^*, r, T - k) = \left((\beta_3^*)^k - (\beta_1^*)^k \right) r^k + \phi(\beta_1^*, \beta_3^*, r, T - (k - 1)) \tag{62}$$

(60) が成り立つとき、(62) から次式が成り立つ。

$$\phi(\beta_1^*, \beta_3^*, r, T - k) = \left((\beta_3^*)^k - (\beta_1^*)^k \right) r^k \tag{63}$$

仮定より、 $0 < r < 1$ 、 $0 < \beta_3^* < \beta_1^* < 1$ であるから、(63) から $\phi(\beta_1^*, \beta_3^*, r, T - k) \neq 0$ となる。これは (61) に矛盾する。よって両曲線は交わらない。 k を 2 から順に $T - 1$ まで変化させることによって、すべての曲線が交わらないことが分かる。□

5.4 解の大小関係

命題 5.2. $\phi(\beta_1, 0^{(1)}, r, T - (k - 1)) = 0$ を満たす解を β_1^* 、 $\phi(\beta_1, 0^{(1)}, r, T - k) = 0$ を満たす解を β_1^{**} と置く。このとき、 $\beta_1^{**} < \beta_1^*$ となる。

証明. $\phi(\beta_1, 0^{(1)}, r, T-k) = 0$ の β_1 に関する偏導関数は次式で表される。

$$\frac{\partial}{\partial \beta_1} \phi(\beta_1, \beta_3, r, T-k) = -r \left(\sum_{t=0}^k t (\beta_1 r)^{t-1} \right) < 0 \quad (64)$$

(56) より次式を得る。

$$\phi(\beta_1, 0^{(1)}, r, T-k) = -(\beta_1 r)^k + \phi(\beta_1, 0^{(1)}, r, T-(k-1)) \quad (65)$$

(65) より次式を得る。

$$\phi(\beta_1, 0^{(1)}, r, T-k) < \phi(\beta_1, 0^{(1)}, r, T-(k-1)) \quad (66)$$

$\beta_1 = \beta_1^*$ のとき, (66) より次式を得る。

$$\phi(\beta_1^*, 0^{(1)}, r, T-k) < \phi(\beta_1^*, 0^{(1)}, r, T-(k-1)) = 0 \quad (67)$$

仮定より次式が成り立つ。

$$\phi(\beta_1^{**}, 0^{(1)}, r, T-k) = 0 \quad (68)$$

(67), (68) および (64) から, $\beta_1^{**} < \beta_1^*$ が導かれる。□

以上の考察によって, 曲線族は β_1 と β_3 について正の相関をもち, 横軸と 1 点で交わる。そして, その交点の β_1 の値は $t = 0$ のとき最小であり, $t = T-2$ のとき最大である。 $t = T-1$ のとき, 曲線は横軸と $0 < \beta_1 < 1$ の範囲で交わらない。

5.5 追隨者の消費が先導者の消費を上回る例

図 6 は, $r = 0.7$, $T = 10$ と仮定して, (58) の不等式が等式で成立する場合の β_1 と β_3 の関係を表す曲線族を描いたものである。各曲線は横軸と 1 点で交わる, さらに曲線は互いに交わることがなく, β_3 は β_1 と正の相関をもつことがわかる。(58) のすべての不等式を満たす (β_1, β_3) の点の集合は, これらの曲線の下側の領域であり, 図 6 では, 右下隅の領域内の点から成る集合である。その図 6 において, 最も下に位置する曲線は $\phi(\beta_1, \beta_3, r, T-2) = 0$ である。

図 6 の右下隅の領域内の任意の点を次のようにして見つける。(55) を満たす r の値として, $r = 0.7$ とする。これを (52) に代入すると $\beta_1 \approx 0.8829$ を得る。この値よりも大きい値として, 例えば $\beta_1 = 0.89$ とする。次に

$$\phi(0.89, \beta_3, 0.7, T-2) = 0$$

の解として $\beta_3 \approx 0.0157$ を得る。この値よりも小さい値として $\beta_3 = 0.015$ とする。このようなパラメタの組に対して

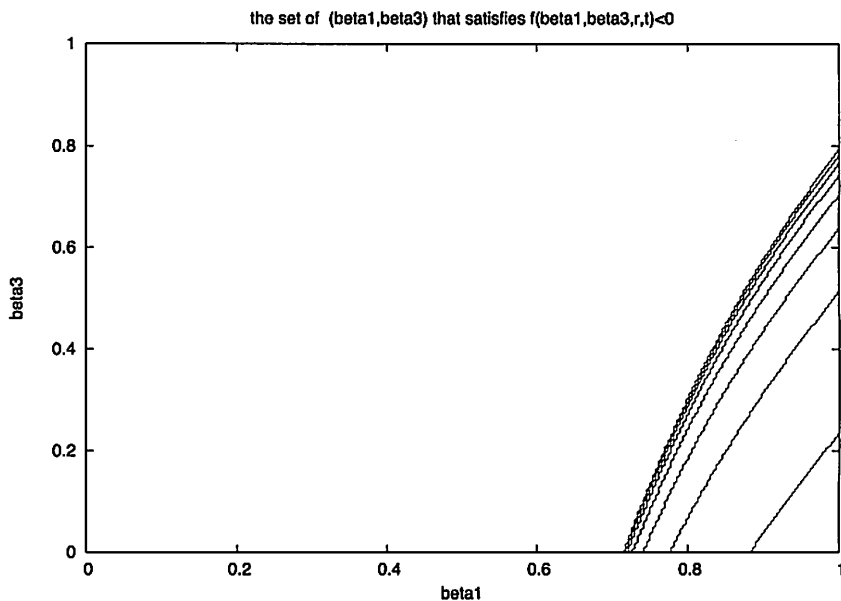


図6 追随者の消費が先導者の消費を上回るパラメタの領域

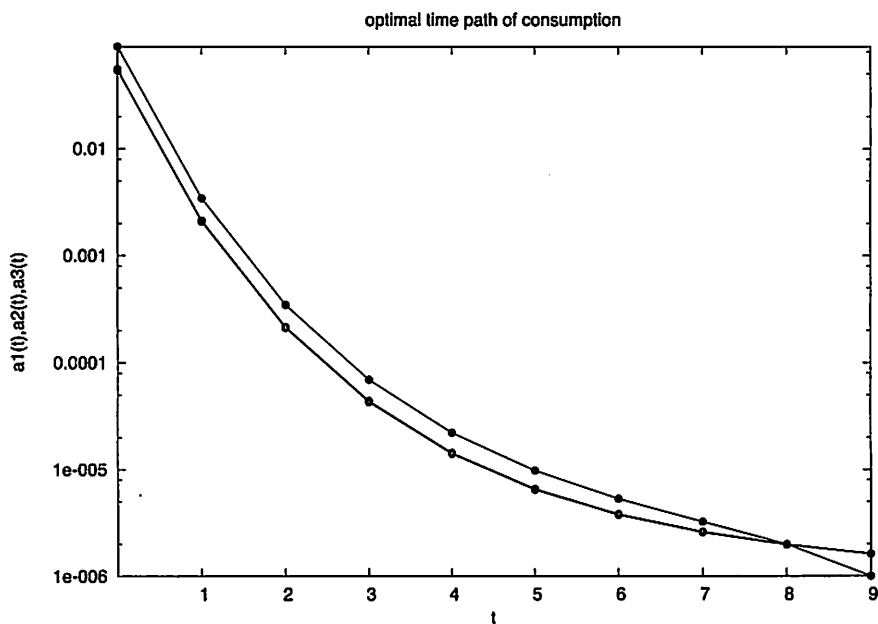


図7 追随者の消費と先導者の消費（上が追随者、下が先導者）

$$\phi(0.89, 0.015, 0.7, T-2) = -\frac{83}{160000} < 0$$

となるので、追随者の消費は先導者の消費を上回ることが確かめられる。図7では次の数値を仮定している。

$$r = 0.7, \quad \beta_1 = 0.89, \quad \beta_2 = 0.9, \quad \beta_3 = 0.015, \quad T = 10 \quad (69)$$

横軸に期間 t を、縦軸に対数目盛で消費量 $a_{i,t}$ ($i \in \mathcal{P}$) をとっている。ただし、先導者のグラフは値が近いので、ほぼ重なって差が分からず太線に見える。

プレイヤーの消費は効用の割引因子に依存する。割引因子が 0 に十分近ければ、プレイヤーは現時点の効用だけを重視する傾向があり、第 2 期以後の将来効用に対して無関心である。割引因子が 1 に十分近ければ、プレイヤーは将来の効用を重視する。

先導者と追随者の消費は、いずれも時間の減少関数であり、しかも追随者の消費は最終期を除く、すべての期間において先導者の消費を上回る。すなわち、 $0 \leq t \leq 8$ の期間において、追随者の消費は先導者の消費を上回ることが確かめられる。また、計画期間が第 1 期、第 2 期、第 3 期と経過する毎に、消費は前期の消費のおよそ 1/10 の大きさに激減する。この例では、先導者の効用の割引因子はかなり大きく、追随者の効用の割引因子は極めて小さいことから、追随者は現時点の効用を、先導者は将来の効用を重視している。追随者の消費は、最終期を除く期間において先導者の消費を上回るため、計画期間内の効用の割引現在価値の合計（総効用と呼ぶ）は、先導者の総効用を上回る。これは次の数値計算の結果から確かめることができる。

(69) を仮定したときの計算結果⁹⁾は次のとおりである。添え字の 1 と 2 が先導者、3 が追随者である。

$$\begin{aligned} J_1^{**} &= \sum_{t=0}^{T-1} \beta_1^t \log(a_{1,t}^{**}) \cong -57.49 \\ J_2^{**} &= \sum_{t=0}^{T-1} \beta_2^t \log(a_{2,t}^{**}) \cong -60.67 \\ J_3^{**} &= \sum_{t=0}^{T-1} \beta_3^t \log(a_{3,t}^{**}) \cong -2.497 \end{aligned}$$

先導者が計画期間内の消費から得る総効用は、 J_1^{**} 、 J_2^{**} 、追随者のそれは J_3^{**} である。仮定により、先導者のグループに属するプレイヤー 2 の効用の割引因子は、プレイヤー 1 の効用の割引因子よりも大きい。そのため、プレイヤー 1 の消費は、プレイヤー 2 の消費を上回る。その結果、 $J_1^{**} > J_2^{**}$ となっている。またこの計算結果から、追随者の総効用 J_3^{**} は、先導者の総効用を大きく上回る¹⁰⁾ことが確かめられる。

6 おわりに

本稿では、プレイヤーが漁業資源を競争的に捕獲する状況を、動学ゲーム理論の枠組みの中で考察した。漁業資源の獲得に関するマルチリーダーフォロワーゲームのモデルは、先導者と追随者が存在する状況を説明するモデルとしての意味がある。中川・山下 [7] では、漁業資源の獲得に関するマルチリーダーフォロワーゲームのモデル分析を行い、先導者の数が 2 の場合のマルチリーダーフォロワーゲームのモデルの均衡解を再帰的に計算している。そこでは、Cournot-Nash 競争に比して、資源

9) 計算のコードは付録に掲載している。

10) 効用値が負であるのは、プレイヤーの消費が 1 よりも小さく対数型の効用関数を仮定していることによる。また期末の資源 x_T^{**} を考慮に入れると、プレイヤーの得る総効用の大小関係は、各プレイヤーがその資源をどのように評価するかに依存する。すなわち、 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 に依存する。

の枯渇にさらに拍車を掛ける可能性があることが導かれている。

本稿では、Cournot-Nash 競争との比較は行っていないが、マルチリーダーフォロワーゲームのモデル分析の結果から、追従者の効用の割引因子が先導者のそれよりも大きいとき、先導者の数が2の場合の方が、1の場合に比して、資源はより高い水準で変化することが導かれた。またすべての計画期間に渡って先導者の総効用が追従者の総効用を上回るような均衡が存在すること、さらに先導者の数が2のマルチリーダーフォロワーゲームのモデル分析から、漁業資源の増殖度に関する生物学的環境やプレイヤー間の効用の割引因子の相対的な大きさ次第で、後手有利性が存在することが明らかとなった。

本稿では、プレイヤーの総数を3と仮定して、先導者の数が2または追従者の数が2のマルチリーダーフォロワーゲームを考察した。このゲームを先導者の数が m 、追従者の数が $n-m$ の n 人ゲームに拡張することは、モデルの一般化としての意義がある。この分析は今後の検討課題としたい。

A 均衡解の計算と Maxima を補助的に用いた式整理

本節では、プレイヤーの総数 n 、先導者の数 m 、期間 t を指定して、プレイヤーの消費率を計算する方法と、その Maxima による式整理方法を掲載する。ここで $t = T - \tau \in \mathbb{Z}$ の取り得る値は $0 \leq t < T$ 、すなわち $0 < \tau \leq T$ である。本稿では、 $n = 3$ のゲームを考察したが、先導者の消費率と追従者の消費率を決定する一般的な方程式を行列表現する。表記の簡潔化のため、以下の実成分行列を導入する。なお、 δ_{ij} は Kronecker のデルタとする。

$$\begin{aligned} O_{p,q} &= (0) \in \text{Mat}(p, q), & I_{p,q} &= (1) \in \text{Mat}(p, q), \\ \Delta_{L,t} &= (\delta_{i,j} \theta_{i,T-t}) + I_{m,m} \in \text{GL}(m), & \Delta_{F,t} &= (\delta_{i,j} \theta_{m+i,T-t}) + I_{n-m,n-m} \in \text{GL}(n-m), \\ A_t &= \begin{pmatrix} I_{n-m,m} & \Delta_{F,t} \\ \Delta_{L,t} & O_{m,n-m} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

このとき、消費率ベクトル $\alpha_t = {}^t(\alpha_{1,t}, \alpha_{2,t}, \dots, \alpha_{n,t})$ は次の方程式から決定される。

$$A_t \alpha_t = I_{n,1}$$

このように、消費率は各期ごとに決定される。また各期 t において、先導者の消費率は追従者の消費率とは独立して決定される。これらをまとめた次の線形方程式を考える。

$$\begin{pmatrix} A_0 & O_{n,n} & \cdots & O_{n,n} \\ O_{n,n} & A_1 & \cdots & O_{n,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{n,n} & O_{n,n} & \cdots & A_{T-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{T-1} \end{pmatrix} = I_{n \times T, 1}$$

この方程式は、その定義から各期の係数行列 A_t の逆行列

$$A_t^{-1} = \begin{pmatrix} O_{m,n-m} & \Delta_{L,t}^{-1} \\ \Delta_{F,t}^{-1} & -\Delta_{F,t}^{-1} I_{n-m,m} \Delta_{L,t}^{-1} \end{pmatrix}$$

を用いると、計算すべき行列のサイズをかなり小さくできるので、 $n \times T$ サイズの行列のまま lin-

solve を用いるより高速で解くことが可能である。この A_t^{-1} の導出は初等的であるので省略する。

以下のソースでは、各期の消費率ベクトル $\alpha_t = \text{Alpha}(n, m, T, t)$ を逆行列法で求め、その後 Maxima の機能で式整理をしている。

```
kill(all);
/* Usage: Alpha(n,m,T,t) : factorized */
/* Usage: TransformedAlpha(n,m,T,t) : transformed denominator into reciprocal sum */
/* n: the number of players in multi-leader-follower game */
/* m: the number of leaders */
/* T: planning period */
/* t: each time in T */
O(p,q):=zeromatrix(p,q)$
I(p,q):=O(p,q)+1$
L(m,t):=makelist(theta[i,t],i,1,m)$
DetL(m,t):=apply("*",L(m,t))+sum(apply("*",L(m,t))/theta[i,t],i,1,m)$
AdjL(i,j,m,t):=kron_delta(i,j)*diff(DetL(m,t),theta[i,t])+
    (kron_delta(i,j)-1)*apply("*",L(m,t))/(theta[i,t]*theta[j,t])$
InvDeltaL(m,t):=genmatrix(lambda([i,j],AdjL(i,j,m,t)),m,m)/DetL(m,t)$
F(n,m,t):=makelist(theta[i,t],i,m+1,n)$
DetF(n,m,t):=apply("*",F(n,m,t))+sum(apply("*",F(n,m,t))/theta[i,t],i,m+1,n)$
AdjF(i,j,n,m,t):=kron_delta(i,j)*diff(DetF(n,m,t),theta[m+i,t])+
    (kron_delta(i,j)-1)*apply("*",F(n,m,t))/(theta[m+i,t]*theta[m+j,t])$
InvDeltaF(n,m,t):=genmatrix(lambda([i,j],AdjF(i,j,n,m,t)),n-m,n-m)/DetF(n,m,t)$
Alpha(n,m,T,t):=factor(mat_unblocker(matrix(
    [O(m,n-m),InvDeltaL(m,T-t)],
    [InvDeltaF(n,m,T-t),-InvDeltaF(n,m,T-t).I(n-m,m).InvDeltaL(m,T-t)]))
    ).makelist(1,i,1,n))$
/* one of the transformation of Alpha(n,m,T,t) for readers */
TransformedAlpha(n,m,T,t):=block([E,P,N,F,S],
    E:expand(Alpha(n,m,T,t)),
    P:map(lambda([x],[first(denom(first(x)))]),E),
    N:map(lambda([x],[num(first(x))]),E),
    F:P/N,
    S:expand(N/E/P),
    return(makelist(alpha[i,t]=first(1/(F[i]*S[i])),i,1,n))
)$
```

B Maxima による均衡資源、均衡消費の計算

図7と総効用の計算は、次のコードに基づいている。

```
load(draw)$
ratprint:false$
simpproduct:true$
/* 2 leaders and 1 follower */
theta(i,k):=nusum((b[i]*r)^tau,tau,1,k)$
e1:subst(k=10-tau,theta(1,k))$
e2:subst(k=10-tau,theta(2,k))$
e3:subst(k=10-tau,theta(3,k))$
e4:((1+1/e1+1/e2)*(1+1/e3))^(r^(t-tau))$
e5:product(e4,tau,0,t-1)*(x0)^(r^t)$
/* consumption of player 1 */
a10:(theta(1,10)*(1+1/theta(1,10)+1/theta(2,10)))^(-1)*x0$
a1t:(subst(k=10-t,theta(1,k)*(1+1/theta(1,k)+1/theta(2,k))))^(-1)*e5$
e7:makelist(subst(t=i,a1t),i,1,9)$
e8:append([a10],e7)$
/* consumption of player 2 */
a20:(theta(2,10)*(1+1/theta(1,10)+1/theta(2,10)))^(-1)*x0$
a2t:(subst(k=10-t,theta(2,k)*(1+1/theta(1,k)+1/theta(2,k))))^(-1)*e5$
e9:makelist(subst(t=i,a2t),i,1,9)$
e10:append([a20],e9)$
/* consumption of player 3 */
a30:((1+theta(3,10))*(1+1/theta(1,10)+1/theta(2,10)))^(-1)*x0$
a3t:(subst(k=10-t,(1+theta(3,k))*(1+1/theta(1,k)+1/theta(2,k))))^(-1)*e5$
e11:makelist(subst(t=i,a3t),i,1,9)$
e12:append([a30],e11)$
/* a sample of numerical value */
sa1:subst([b[1]=0.89,b[2]=0.9,b[3]=0.015,r=0.7,x0=0.2],e8)$
sa2:subst([b[1]=0.89,b[2]=0.9,b[3]=0.015,r=0.7,x0=0.2],e10)$
sa3:subst([b[1]=0.89,b[2]=0.9,b[3]=0.015,r=0.7,x0=0.2],e12)$
/* z: (x axis) */
z:makelist(t-1,t,1,10)$
pa1:makelist([z[i],sa1[i]],i,1,length(z))$
pa2:makelist([z[i],sa2[i]],i,1,length(z))$
pa3:makelist([z[i],sa3[i]],i,1,length(z))$
draw2d(logy=true,points_joined=true,point_type=filled_circle,
color=red,
points(pa1),
color=red,
```

```

points(pa2),
color=black,
points(pa3),
xlabel="t",
xticks=setify(makelist(i,i,1,10)),
ylabel="a1(t),a2(t),a3(t)",
title="optimal time path of consumption");
/* computation of utility */
u1:sum((0.89^(i-1))*log(sa1[i]),i,1,length(sa1));
u2:sum((0.9^(i-1))*log(sa2[i]),i,1,length(sa2));
u3:sum((0.015^(i-1))*log(sa3[i]),i,1,length(sa3));

```

参考文献

- [1] E. Denisova, A. Gamaev, "Fish wars: Cooperative and Non-Cooperative Approaches", *Czech Economic Review*, Vol.2, (2008).
- [2] Dutta, P. K., *Strategies and Games: Theory and Practice*, MIT Press, (1999).
- [3] Levhari, D., and Mirman, L. J., "The great fish war: an example using a dynamic cournot- nash solution", *Bell Journal of Economics*, Vol.11, (1980).
- [4] M. Hu, M. Fukushima "Multi-leader-follower games: models, methods and applications," *Journal of the Operations Research of Japan*, Vol.58(1), (2015).
- [5] Okuguchi, K. "A Dynamic Cournot-Nash Equilibrium in Fishery: The Effects of Entry", *Decisions in Economics and Finance*, Vol.4, (1981).
- [6] Sherali, H. D., "A Multiple Leader Stackelberg Model and Analysis", *Operations Research Society of America*, Vol.32, No.2, (1984).
- [7] 中川義行・山下章夫「再生可能資源の動学ゲーム理論的分析」龍谷大学経営学論集 第56巻第1号 2016年。
- [8] J. M. Conrad 岡敏弘／中田実 訳『資源経済学』岩波書店 2002年。

(受理 2017年6月30日)