

〈指定研究〉

「地方分権における公共部門効率化のための新たな政策評価モデル構築と国際比較」

ヤードスティック競争、地方公共財供給の効率性と均等化補助金

西垣 泰幸*・東 裕三**・西本 秀樹***

概要

地方政府や地域を管轄する政治家の行動を正しい方向へ導く方法としてヤードスティック競争が知られている。しかしながら、ヤードスティック競争下においては、地方政府や政治家と住民との間の情報の非対称性が原因で、地方公共財の供給水準は過少となる。本稿では、ヤードスティック競争下における非効率性の改善方法として、補助金政策を考える。その結果、地方政府間の平行補助金は無効であり、中央政府による一括補助金と定率補助金は地方公共財供給の非効率性を改善する可能性が示された。また、定率補助金には財政格差を縮小させる効果があることが明らかになった。

JEL classification: D72, H77

Keywords: ヤードスティック競争、財政格差、均等化補助金

1. はじめに

地方政府や地域を管轄する政治家の行動を正しい方向へ導く方法としていくつかの理論が存在する。その代表的な理論は、Tieboutの「足による投票」仮説とヤードスティック競争である。「足による投票」仮説では住民の自由な地域間移動が、ヤードスティック競争では住民による投票が地方政府や政治家の行動を住民が望む方向へと導く。「足による投票」仮説とヤードスティック競争のいずれがわが国住民の行動をより表現しているのかを考えたとき、直感的には次のような疑問が生じる。住民は地方政府や地域の政治家に何か問題が生じたとき、即座に居住地域を変更するのであろうか。より現実的には居住地域を変更する前に、非効率的な行動を行う自地域の政治家を選挙によって落選させる行動をとるのではないかと考えられる。このようにヤードスティック競争はわが国の地方政府や地域の政治家の行動をより良い方向へ導く重要な理論の一つとなっている。しかしながら、ヤードスティック競争下においては、地方政府や政治家と住民との間の情報の非対称性が原因で、地方公共財の供給水準は過少となる。本稿では、このようなヤードスティック競争の非効率性を改善するために地方政府間相互の補助金と中央政府から地方政府への補助金政策を考察する。さらに、それらの補助金はヤードスティック競争

* 龍谷大学経済学部教授, E-mail:nisigaki@econ.ryukoku.ac.jp

** 神戸市外国語大学客員研究員

*** 龍谷大学経済学部教授

下における財政格差を改善することが可能なのかも考察する。

Myers (1990), Wellisch (1994, 2000) は、足による投票（住民の自由な移動）を想定した場合、地域間の自発的補助金政策によって地域経済の効率性は達成されるため、中央政府の役割は最小限にすべきであると指摘した。しかしながら、ヤードスティック競争下において、地方政府間の自発的な平行補助金によって地方公共財の最適供給は達成されない。これは、ヤードスティック競争下では、他地域へ補助金を与えることは自地域政治家の再選確率を低下、他地域の政治家の再選確率を上昇させるためである。したがって、ヤードスティック競争下においては、その非効率性を改善するために中央政府による補助金政策を考察しなければならない。

Boadway et al. (1989) は地域間の住民移動がない下で、中央政府の補助金政策の効果を考察している。彼らは、中央政府による一般的補助金の地域の厚生水準への効果は中立的であり、定率補助金は地域の厚生水準へ効果を与えることを明らかにしている。それに対して、Nishigaki et al. (2015b) は、Seabright (1996) のモデルを応用し、ヤードスティック競争モデルを構築した上で、ヤードスティック競争下において、中央政府による補助金が地方公共財の供給を効率的な水準に導くことが可能であるのかを考察している。そして、中央政府による一般補助金は地域経済の厚生水準に影響を与えないが、一方、定率補助金は、ヤードスティック競争下で生じた地方公共財の過少性を緩和することを明らかにした。これは Boadway et al. (1989) と類似的な結果であり、ヤードスティック競争下においても、中央政府による定率補助金の政策が有効であることが示された。

Allers (2012) は地域間において財政格差が存在すれば、投票者が選択を誤り、レントを多くとる悪い政治家を再選させる可能性が大きくなることを指摘している。これは財源が豊かな地域の地方政府は多くのレントをとる余裕があり、放漫財政になる可能性を示したものである。本稿では、ヤードスティック競争下において、地域間に財政格差がある場合、地方政府間あるいは中央政府と地方政府間の補助金政策によって財政格差を改善させることができるのか否かを考察する。分析の結果、中央政府による一般的補助金および定率補助金は一定の仮定の下で財政格差を改善することが可能であることが示された。

本稿の構成は以下の通りである。第2節では基本モデルを説明し、ヤードスティック競争の下では地方公共財供給が過小であることと、地域間財政格差がある場合、財源が豊かな地域の地方政府は、財源が豊かでない地域の地方政府に比較して、多くのレントを取る可能性が示唆される。第3節では、このようなヤードスティック競争下の非効率性を改善するために地域間の平行補助金、中央政府による一般補助金と定率補助金の政策を考察し、第4節では結論を述べる。

2. モデル

2.1 基本モデル

2地域からなる経済を考える。各地域の住民数は n_i であり、住民の効用関数は、

$$U_i = u(x_i, g_i) + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2 \quad (1)$$

である。ここで、 x_i は私的財消費量、 g_i は地方公共財供給量、 ε_i は攪乱項である。関数 u は、 $u_x^i > 0$, $u_g^i > 0$, $u_{xx}^i < 0$, $u_{gg}^i < 0$, $u_{xg}^i = u_{gx}^i > 0$ を満たすと仮定する¹⁾。 ε_i は平均ゼロ、密度関数 $h(\varepsilon)$ に従い決定され、例えば地域独自に生じる環境の変化などを示している。

住民は外生的な賃金 w_i を得るが、賃金に一括税 t_i が課され、その課税後所得をすべて私的財の購入に費やす。住民の予算制約は次式のようになる。

$$x_i = w_i - t_i, \quad i=1,2 \quad (2)$$

地方政府は住民に一括税 t_i を課税し、地方公共財供給量を賄うが、税収から一定額のレント ρ_i (≥ 0) を取ることができるとする。地方政府の予算制約は、次式のようになる。

$$g_i = t_i m_i - \rho_i, \quad i=1,2 \quad (3)$$

ここで、住民と地方政府の情報構造は次のように仮定する。住民は x_i と g_i を観察することができるが、 ε_i と ρ_i は観察することができない。地方政府は x_i 、 g_i と ρ_i を観察することができるが、 ε_i は観察することができない。

この経済では、各地域で y_i ($i=1,2$) の生産物が外生的に存在するとし、経済の総生産物が各地域の私的財と地方公共財にどのように配分されるべきなのかを考える。すなわち、資源制約 ($y_1 + y_2 = n_1 x_1 + n_2 x_2 + g_1 + g_2$) の下で、両地域の総効用を最大にするソーシャルプランナーの最適化問題を考える。問題の解より、サミュエルソン条件 ($n_i(u_g^i/u_x^i)=1$) が導出される。

2.2 ヤードスティック競争モデル

地方政府は地方公共財供給によって自身に生じる不効用関数 $v(g_i)$ ($v'(g_i) < 0, v''(g_i) < 0$) と再選したときに得られる再選レント R の期待確率を最大するように g_i を決定する²⁾。したがって、地方政府の最適化問題は次のように定式化することができる³⁾。

$$\begin{aligned} \max_{\{g_i, t_i, \rho_i\}} E[v(g_i) + \rho_i + R] &= v(g_i) + \rho_i + R \cdot \int_{-\infty}^{u(x_i, g_i) - u(x_j, g_j)} f(\xi) d\xi \quad (MAX I) \\ s.t. \quad (2), (3), g_i &\geq 0, \rho_i \geq 0 \end{aligned}$$

ここで、 $E[\cdot]$ は期待確率、 $f(\cdot)$ は確率密度関数を示している。問題(MAX I)の1階の条件を求めると次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial E[v(g_i) + \rho_i + R]}{\partial g_i} &= v'(g_i) + \rho_i + R \left(u_x^i \frac{\partial x_i}{\partial g_i} + u_g^i \right) f(u(x_i(g_i, \rho_i), g_i) - u(x_j(g_j, \rho_j), g_j)) \leq 0, \\ g_i^* \frac{\partial E[v(g_i) + \rho_i + R]}{\partial g_i} &= g_i^* \left\{ v'(g_i) + \rho_i + R \left(u_x^i \frac{\partial x_i}{\partial g_i} + u_g^i \right) f(u(x_i(g_i, \rho_i), g_i) - u(x_j(g_j, \rho_j), g_j)) \right\} = 0, \\ g_i &\geq 0, i, j=1,2, i \neq j \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E[v(g_i) + \rho_i + R]}{\partial \rho_i} &= 1 + R \cdot u_x^i \frac{\partial x_i}{\partial \rho_i} \cdot f(u(x_i(g_i, \rho_i), g_i) - u(x_j(g_j, \rho_j), g_j)) \leq 0, \\ \rho_i^* \frac{\partial E[v(g_i) + R]}{\partial \rho_i} &= \rho_i^* \left[1 + R \cdot u_x^i \frac{\partial x_i}{\partial \rho_i} \cdot f(u(x_i(g_i, \rho_i), g_i) - u(x_j(g_j, \rho_j), g_j)) \right] = 0, \\ \rho_i &\geq 0, i, j=1,2, i \neq j \end{aligned} \quad (2.2)$$

ここで、シンメトリック均衡 ($x_i = x_j = x$, $g_i = g_j = g$, $n_i = n_j = n$, $\rho_i = \rho_j = \rho$) を仮定すると、 $g > 0$ であるとき、(2.1)式より、

$$\rho + R \left(u_x \frac{\partial x}{\partial g} + u_g \right) f(0) = -v'(g) \quad (2.3)$$

を得る。(2.3)式を次式のように変形する。

$$n \frac{u_g}{u_x} = 1 - v'(g) \frac{n}{\rho + R \cdot f(0) \cdot u_x} \quad (2.4)$$

(2.4)式より、ヤードスティック競争の下で地方公共財は過少供給になることがわかる⁴⁾。地方公共財の最適性を達成するために、地方政府間の補助金あるいは中央政府による補助金政策を考える必要がある。

次に地方政府におけるレント ρ_i の決定方法を考える。(2.2)式の第2式の角括弧内の符号は確定されない。したがって、(2.2)式の第2式角括弧内の符号が負であるとき ρ_i はゼロであり、一方、角括弧内の値がゼロであるとき ρ_i は正の値で決定されることが分かる。このような ρ_i の決定方法は次のように説明することができる。(2.2)式の第2式の角括弧内は ρ_i を変化させたときに発生する限界便益と限界費用が示されている。レント ρ_i を1単位増加させると、レント ρ_i の1単位分の効用が増加する。

しかしながら、レント ρ_i を増加させると課税 t_i が増加し、住民の私的財消費量 x_i が減少し、住民の効用水準は減少する。これは、地域 i の地方政府の再選確率を低下させ、再選することで得られるレントである R を得る確率が低下する。このような効果は ρ_i を上昇させることによって地方政府に発生する限界費用であり、次式で示される。

$$R \cdot u_x^i \frac{\partial x_i}{\partial \rho_i} \cdot f(u(x_i(g_i, \rho_i), g_i) - u(x_j(g_j, \rho_j), g_j))$$

以上のように、(2.2)式はレント ρ_i を増加させたときの限界便益が限界費用よりも大きいとき、あるいは限界便益と限界費用が等しいときには、レント ρ_i を正の値に設定し、限界便益が限界費用よりも小さいときにはレント ρ_i をゼロに設定することを示している。

次に財政格差とレント ρ_i との関係を見る。そのために、地域 i は地域 j よりも賃金水準が高く ($w_i > w_j$)、財源が豊かな地域であり、 $\rho_i \neq \rho_j$ を仮定した上で、シンメトリック均衡 ($x_i = x_j = x$, $g_i = g_j = g$, $n_i = n_j = n$) を仮定する。このような仮定の下では、両地域の住民の予算制約式は(2)式と(3)式より次のようになる。

$$x = w_i - \frac{g + \rho_i}{n}, i = 1, 2 \quad (2.5)$$

(2.5)式より両地域の賃金の差、つまり財政格差は次式のようになる。

$$n(w_i - w_j) = \rho_i - \rho_j \quad (2.6)$$

いま、 $w_i > w_j$ を仮定しているので、(2.6)式より次式を得る。

$$\rho_i > \rho_j \quad (2.7)$$

(2.7)式は、財政格差がある場合、財源が豊かな地域はレントを多く取る可能性を示している。この結果の直観的解釈は次の通りである。ヤードスティック競争の下では他地域の効用水準よりもより高い効

用を住民に与える地方政府が再選される。財源が豊かな地域は、財源が貧しい地域に比較して住民に高い効用を与えることは容易な状況にある。このような状況では、財源が豊かな地域は自地域の効用が、財源が貧しい地域の効用水準と少なくとも同じ水準になるまでレントを取るインセンティブを持つ。(2.7)式は財源豊かな地域の放漫財政を示している。

3. 地方政府間相互の補助金と中央政府による補助金政策

前節の議論において、ヤードスティック競争下では、地方公共財が過少に供給されること、また、地域間に財政格差が存在するとき、財源が豊かな地域は放漫財政になるといった諸問題が明らかになった。本節では地方政府間相互の補助金、中央政府による一括補助金および定率補助金によりヤードスティック競争下で生じる非効率性が改善されるのか否かを考察する。

3.1 地方政府間相互による自発的補助金政策

ヤードスティック競争の下で、地方政府は地域間相互の自発的補助金をどのような値に設定するのかを考察する。 S_{ij} は地方政府 i から地方政府 j への補助金であるとする。地方政府間の相互補助金がある場合の地方政府の最適化問題は次のように定式化される。

$$\begin{aligned} \max_{\{g_i, t_i, S_{ij}, \rho_i\}} \quad & E[v(g_i) + R] = v(g_i) + \rho_i + R \cdot \int_{-\infty}^{u(g_i, x_i) - u(g_j, x_j)} f(\xi) d\xi \quad (MAX II) \\ \text{s.t.} \quad & x_i = w_i - t_i, \quad g_i = t_i n_i - S_{ij} + S_{ji} - \rho_i, \quad S_{ij} \geq 0, \quad g_i \geq 0, \quad \rho_i \geq 0 \end{aligned}$$

(MAXII)におけるキューン・タッカー条件は次式のようにになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial E[v(g_i) + \rho_i + R]}{\partial g_i} &= v'(g_i) + \rho_i + R \left(u_x^i \frac{\partial x_i}{\partial g_i} + u_g^i \right) f(u(x_i(g_i, \rho_i, S_{ij}, S_{ji}), g_i) - u(x_j(g_j, \rho_j, S_{ij}, S_{ji}), g_j)) \leq 0, \\ g_i^* \frac{\partial E[v(g_i) + \rho_i + R]}{\partial g_i} &= g_i^* \left\{ v'(g_i) + \rho_i + R \left(u_x^i \frac{\partial x_i}{\partial g_i} + u_g^i \right) f(u(x_i(g_i, \rho_i, S_{ij}, S_{ji}), g_i) - u(x_j(g_j, \rho_j, S_{ij}, S_{ji}), g_j)) \right\} = 0, \\ g_i &\geq 0, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j \quad (3.1.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E[v(g_i) + \rho_i + R]}{\partial S_{ij}} &= \rho_i + R \left(u_x^i \frac{\partial x_i}{\partial S_{ij}} - u_x^j \frac{\partial x_j}{\partial S_{ij}} \right) f(u(x_i(g_i, \rho_i, S_{ij}, S_{ji}), g_i) - u(x_j(g_j, \rho_j, S_{ij}, S_{ji}), g_j)) \leq 0, \\ S_{ij}^* \frac{\partial E[v(g_i) + \rho_i + R]}{\partial S_{ij}} &= S_{ij}^* \left\{ \rho_i + R \left(u_x^i \frac{\partial x_i}{\partial S_{ij}} - u_x^j \frac{\partial x_j}{\partial S_{ij}} \right) f(u(x_i(g_i, \rho_i, S_{ij}, S_{ji}), g_i) - u(x_j(g_j, \rho_j, S_{ij}, S_{ji}), g_j)) \right\} = 0, \\ S_{ij} &\geq 0, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j \quad (3.1.2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E[v(g_i) + \rho_i + R]}{\partial \rho_i} &= 1 + R \cdot u_x^i \frac{\partial x_i}{\partial \rho_i} \cdot f(u(x_i(g_i, \rho_i, S_{ij}, S_{ji}), g_i) - u(x_j(g_j, \rho_j, S_{ij}, S_{ji}), g_j)) \leq 0 \\ \rho_i^* \frac{\partial E[v(g_i) + \rho_i + R]}{\partial \rho_i} &= \rho_i^* \left\{ 1 + R \cdot u_x^i \frac{\partial x_i}{\partial \rho_i} \cdot f(u(x_i(g_i, \rho_i, S_{ij}, S_{ji}), g_i) - u(x_j(g_j, \rho_j, S_{ij}, S_{ji}), g_j)) \right\} = 0 \\ \rho_i &\geq 0, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j \quad (3.1.3) \end{aligned}$$

g_i に関して内点解を仮定し、そして、シンメトリック均衡 ($x_i = x_j = x$, $g_i = g_j = g$, $n_i = n_j = n$) を仮定する

と、(3.1.1)式より次式を得る。

$$\frac{\partial E[v(g)+\rho+R]}{\partial g}=v'(g)+\rho_i+R\left(u_x\frac{\partial x}{\partial g}+u_g\right)f(0)=0 \quad (3.1.4)$$

(3.1.4)式より、地域間の相互補助金があるケースにおいても地方公共財供給は過少であることがわかる。次に地域間の相互補助金を実施させるのか否かを考察するため、(3.1.2)式をみる。 $u_x^i>0$, $u_x^j>0$, $\partial x_i/\partial S_{ij}<0$, $\partial x_j/\partial S_{ij}>0$ であり、 $f(\cdot)$ は確率密度関数であるので、一般的に $f(\cdot)>0$ である。このような符号条件から(3.1.2)式の第2式より、 $S_{ij}^*=0$ ($i,j=1,2, i\neq j$)が導かれる。これは、地域間の自発的な平行補助金は無効となることを示している。

次に、地域間の相互補助金があるケースにおいて、財政格差が存在するもとで、地方政府のレントの大きさがどのような値になるのかを見る。そのため、シンメトリック均衡 ($x_i=x_j=x$, $g_i=g_j=g$, $n_i=n_j=n$)を仮定し、さらに $w_i>w_j$, $\rho_i\neq\rho_j$, $S_{ij}\neq S_{ji}$ を仮定する。この仮定の下では、両地域の住民の予算制約式は式より次のようになる。

$$x=w_i-\frac{g+S_{ij}-S_{ji}+\rho_i}{n}, i,j=1,2, i\neq j \quad (3.1.5)$$

ここで、(3.1.2)式の第2式より、 $S_{ij}^*=0$ ($i,j=1,2, i\neq j$)となることを考慮し、(3.1.5)式より両地域の賃金の差、つまり財政格差は次式のようになる。

$$n(w_i-w_j)=\rho_i-\rho_j \quad (3.1.6)$$

いま、 $w_i>w_j$ であるので、(3.1.6)式より次式を得る。

$$\rho_i>\rho_j \quad (3.1.7)$$

(3.1.7)式から、ヤードスティック競争の下では地域間の相互補助金は無効になるため、財政格差とレントの関係は、地域間の相互補助金がないケースと同様であることが分かる。すなわち、財源が豊かな地域は、レントを多く取る可能性を示している。このように、ヤードスティック競争の下では、地域間の補助金によって、地方政府が得るレントを改善させることはできない。

3.2 中央政府による一括補助金政策

前細節では、地方政府による自発的な平行補助金によって、ヤードスティック競争下における非効率性は改善されないことが示された。したがって、ここでは地方政府間ではなく、中央政府による一括補助金の政策を考える。そのために、中央政府がシュタッケルベルグ・リーダー、地方政府 i ($i=1,2$) がシュタッケルベルグ・フォロアーである2段階のゲームを考える⁵⁾。ゲームのタイミングは次の通りである。

第1段階 中央政府は、地方政府がどのように地方公共財の供給量 (g_1, g_2) を決定するのかを観察しながら、経済の全住民の効用水準を最大にするように各地域の一括補助金 (S_1, S_2) を決定する。

第2段階 地方政府1, 2は、第1段階で決定された一括補助金 (S_1, S_2) を所与として、自身の期待効用を最大にするように地方公共財の供給量 (g_1, g_2) を決定する。

以上のようなゲームのタイミングより、中央政府と地方政府の最適化問題は下記のように定式化される。

第1段階 中央政府の最適化問題

$$\max_{\{S_1, S_2, T\}} W \equiv n_1 U_1 + n_2 U_2 \quad (MAX III)$$

$$\begin{aligned} s.t. \quad & x_i = w_i - t_i - T \text{ (住民の予算制約)}, g_i = t_i n_i + S_i - \rho_i \text{ (地方政府の予算制約)}, \\ & S_1 + S_2 = T_1 n_1 + T_2 n_2 \text{ (中央政府の予算制約)}, g_i = g_i(S_i, S_j), \rho_i = \rho_i(S_i, S_j) \end{aligned}$$

ここで、 t_i は地方税、 T_1 は国税、 S_i は中央政府から地方政府 i への補助金、 $g_i = g_i(S_i, S_j)$ と $\rho_i = \rho_i(S_i, S_j)$ は第2段階の解である。

第2段階 地方政府 i の最大化問題

$$\max_{\{g_i, t_i, \rho_i\}} E[v(g_i) + R] = v(g_i) + \rho_i + R \cdot \int_{-\infty}^{u(x_i, g_i) - u(x_j, g_j)} f(\xi) d\xi \quad (MAX IV)$$

$$s.t. \quad x_i = w_i - t_i - T, g_i = t_i n_i + S_i - \rho_i, g_i \geq 0, \rho_i \geq 0$$

最初に第2段階の地方政府の問題から解いていく。(MAX IV)におけるキューン・タッカー条件は次式ようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial E[v(g_i) + \rho_i + R]}{\partial g_i} &= v'(g_i) + \rho_i + R \left(u_x^i \frac{\partial x_i}{\partial g_i} + u_g^i \right) f(u(x_i(g_i, \rho_i), g_i) - u(x_j(g_j, \rho_j), g_j)) \leq 0, \\ g_i^* \frac{\partial E[v(g_i) + \rho_i + R]}{\partial g_i} &= g_i^* \left\{ v'(g_i) + \rho_i + R \left(u_x^i \frac{\partial x_i}{\partial g_i} + u_g^i \right) f(u(x_i(g_i, \rho_i), g_i) - u(x_j(g_j, \rho_j), g_j)) \right\} = 0, \\ g_i &\geq 0, i, j = 1, 2, i \neq j \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E[v(g_i) + \rho_i + R]}{\partial \rho_i} &= 1 + R \cdot u_x^i \frac{\partial x_i}{\partial \rho_i} \cdot f(u(x_i(g_i, \rho_i), g_i) - u(x_j(g_j, \rho_j), g_j)) \leq 0 \\ \rho_i^* \frac{\partial E[v(g_i) + \rho_i + R]}{\partial \rho_i} &= \rho_i^* \left\{ 1 + R \cdot u_x^i \frac{\partial x_i}{\partial \rho_i} \cdot f(u(x_i(g_i, \rho_i), g_i) - u(x_j(g_j, \rho_j), g_j)) \right\} = 0 \\ \rho_i &\geq 0, i, j = 1, 2, i \neq j \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

ここで、 $\partial x_i / \partial g_i = \partial x_i / \partial \rho_i = -1/n_i$ である。 g_i, ρ_i に関して内点解を仮定し、そして、シンメトリック均衡 ($x_i = x_j = x, g_i = g_j = g, n_i = n_j = n$) を仮定すると、(3.2.1)式と(3.2.2)式より次式を得る。

$$\frac{\partial E[v(g) + \rho + R]}{\partial g} = v'(g) + \rho + R \left(u_x \frac{\partial x}{\partial g} + u_g \right) f(0) = 0 \quad (3.2.3)$$

$$\frac{\partial E[v(g) + \rho + R]}{\partial \rho} = 1 + R \cdot u_x \frac{\partial x}{\partial \rho} \cdot f(0) = 0 \quad (3.2.4)$$

これら地方政府の1階の条件式より、中央政府による一括補助金 S は地方公共財供給量 g および地方政府が得るレント ρ に影響を与えないことが分かる。すなわち、

$$\frac{\partial g}{\partial S} = \frac{\partial \rho}{\partial S} = 0 \quad (3.2.5)$$

である。

第1段階の中央政府の最適化問題(MAX III)を解くと、一階の条件式は次式のようにになる。

$$\frac{\partial W}{\partial S_i} = n_i u_x^i \left(-\frac{1}{n_i} \frac{\partial g_i}{\partial S_i} + \frac{1}{n_i} - \frac{1}{n_i} \frac{\partial \rho_i}{\partial S_i} \right) + n_i u_g^i + n_i u_x^i \left(-\frac{1}{n_j} \frac{\partial g_j}{\partial S_i} + \frac{1}{n_j} - \frac{1}{n_j} \frac{\partial \rho_j}{\partial S_i} \right) + n_i u_g^j = 0$$

$$i, j = 1, 2, i \neq j \quad (3.2.6)$$

シンメトリック均衡を仮定すると(3.2.6)式は、次式のようにになる。

$$\frac{\partial W}{\partial S} = 2u_x + 2(nu_g - u_x) \frac{\partial g}{\partial S} - 2u_x \frac{\partial \rho}{\partial S} = 0 \quad (3.2.7)$$

(3.2.7)式は中央政府が補助金 S を用いて、 g と ρ を調整し、両地域の厚生水準 W を最大にする行動が示されているが、地方政府の最適化問題の結果から導出された(3.2.5)式から分かるように、中央政府による補助金 S は地方公共財供給量 g と地方政府が得るレント ρ に影響を与えることはできない。したがって、一括補助金ではヤードスティック競争下で生じる地方公共財供給の過少性や地方政府によるレント取得を改善させることはできない。

次に、財政格差が生じる場合でも同様に、一括補助金 S の政策効果はないことを見よう。、 $w_i > w_j$ かつ $\rho_i \neq \rho_j$ を仮定し、シンメトリック均衡 ($x_i = x_j = x$, $g_i = g_j = g$, $n_i = n_j = n$, $S_i = S_j = S$) を仮定し、 w_i と w_j の差をとれば、

$$n(w_i - w_j) = \rho_i - \rho_j \quad (3.2.8)$$

を得る。いま、 $w_i > w_j$ であるので、(3.2.8)式より $\rho_i > \rho_j$ となり、一括補助金は豊かな財源を持つ地域の放漫財政を改善することはできない。

財政格差が存在するケースにおける一括補助金の効果を考えるために、シンメトリック均衡 ($x_i = x_j = x$, $g_i = g_j = g$, $n_i = n_j = n$ であり、ただし $w_i > w_j$, $\rho_i \neq \rho_j$, $S_i \neq S_j$ であるとする) を考える。これは、2地域に財政格差 ($w_i > w_j$) がある状況で中央政府と地方政府がどのようなレントと補助金を決定するかという問題を考察するための仮定である。このようなシンメトリック均衡の仮定の下においては、一括補助金 (S_1, S_2) が地方公共財供給量 (g_1, g_2) と地方政府のレント (ρ_1, ρ_2) に与える影響 ($\partial g_i / \partial S_1$, $\partial g_i / \partial S_2$, $\partial \rho_i / \partial S_1$, $\partial \rho_i / \partial S_2$, $i=1, 2$) が求められる⁶⁾。したがって、中央政府による地域独自の一括補助金 ($S_i \neq S_j$) は政策効果を持つことが分かる。

3.3 中央政府による定率補助金政策

前細節において、中央政府による一括補助金政策を考察した。しかしながら、財政格差は是正される可能性があるものの地方公共財の過少性は改善されないことがわかった。ここでは、中央政府による定率補助金政策を考える。本稿では以下のような中央政府と地方政府の2段階のゲームを考える。

第1段階 中央政府は、地方政府がどのように地方公共財の供給量 (g_1, g_2) を決定するのかを観察しながら、経済の全住民の効用水準を最大にするように補助率 (σ) を決定する。

第2段階 地方政府1, 2は、第1段階で決定された補助金率(σ)を所与として、自身の期待効用を最大にするように地方公共財の供給量(g_1, g_2)を決定する。

以上のゲームのタイミングより、中央政府と地方政府の最適化問題は次のように定式化される。

第1段階 中央政府の最適化問題

$$\begin{aligned} \max_{\{\sigma, T\}} \quad & W \equiv n_1 U_1 + n_2 U_2 \quad (MAX \ V) \\ \text{s.t.} \quad & x_i = w_i - t_i - T \text{ (住民の予算制約)}, g_i = t_i n_i (1 + \sigma) - \rho_i \text{ (地方政府の予算制約)}, \\ & t_1 n_1 \sigma + t_2 n_2 \sigma = T(n_1 + n_2) \text{ (中央政府の予算制約)}, g_i = g_i(\sigma), \rho_i = \rho_i(\sigma) \end{aligned}$$

ここで、 t_i は地方税、 T は国税、 σ は地方政府への補助率 $g_i = g_i(\sigma)$ と $\rho_i = \rho_i(\sigma)$ は第2段階の解である。

第2段階 地方政府 i の最大化問題

$$\begin{aligned} \max_{\{g_i, \rho_i\}} \quad & E[v(g_i) + R] = v(g_i) + (\rho_i + R) \cdot \int_{-\infty}^{u(g_i, x_i) - u(g_j, x_j)} f(\xi) d\xi \quad (MAX \ VI) \\ \text{s.t.} \quad & x_i = w_i - t_i - T, g_i = t_i n_i (1 + \sigma) - \rho_i, g_i \geq 0, \rho_i \geq 0 \end{aligned}$$

第2段階の地方政府の問題(MAX VI)を解くと、次のキューン・タッカー条件を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial E[v(g_i) + \rho_i + R]}{\partial g_i} &= v'(g_i) + \rho_i + R \left(u_x^i \frac{\partial x_i}{\partial g_i} + u_g^i \right) f(u(x_i(g_i, \rho_i), g_i) - u(x_j(g_j, \rho_j), g_j)) \leq 0, \\ g_i^* \frac{\partial E[v(g_i) + \rho_i + R]}{\partial g_i} &= g_i^* \left\{ v'(g_i) + \rho_i + R \left(u_x^i \frac{\partial x_i}{\partial g_i} + u_g^i \right) f(u(x_i(g_i, \rho_i), g_i) - u(x_j(g_j, \rho_j), g_j)) \right\} = 0, \\ g_i &\geq 0, i, j = 1, 2, i \neq j \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E[v(g_i) + \rho_i + R]}{\partial \rho_i} &= 1 + R \cdot u_x^i \frac{\partial x_i}{\partial \rho_i} \cdot f(u(x_i(g_i, \rho_i), g_i) - u(x_j(g_j, \rho_j), g_j)) \leq 0 \\ \rho_i^* \frac{\partial E[v(g_i) + \rho_i + R]}{\partial \rho_i} &= \rho_i^* \left\{ 1 + R \cdot u_x^i \frac{\partial x_i}{\partial \rho_i} \cdot f(u(x_i(g_i, \rho_i), g_i) - u(x_j(g_j, \rho_j), g_j)) \right\} = 0 \\ \rho_i &\geq 0, i, j = 1, 2, i \neq j \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

ここで、 $\partial x_i / \partial g_i = \partial x_i / \partial \rho_i = -[1/n_i(1 + \sigma)]$ である。 $g_i > 0$ であるとき、(3.3.1)式より次式を得る。

$$\frac{\partial E[v(g_i) + R]}{\partial g_i} = v'(g_i) + \rho_i + R \left(u_x^i \frac{\partial x_i}{\partial g_i} + u_g^i \right) \cdot f(u(x_i, g_i) - u(x_j, g_j)) = 0 \quad (3.3.3)$$

シンメトリック均衡($x_i = x_j = x$, $g_i = g_j = g$, $n_i = n_j = n$)を仮定すると(3.3.3)式は、

$$v'(g) + \rho + R \left(u_x(x, g) \cdot \frac{-1}{n(1 + \sigma)} + u_g(x, g) \right) \cdot f(0) = 0 \quad (3.3.4)$$

となる。(3.3.4)式を整理すると、

$$n \frac{u_g}{u_x} = \frac{1}{(1 + \sigma)} - \frac{v'(g)}{\rho + R \cdot f(0)} \frac{n}{u_x} \quad (3.3.5)$$

を得る。(3.3.5)式の右辺第1項目は $\sigma > 0$ であるとき、1より小さい値をとり、右辺第2項目は $v'(g) < 0$ であるので負の値をとる。したがって、 $\sigma > 0$ のとき、地方公共財が過少あるいは過大供給であるのかは確定できない。ただし、 $\sigma = 0$ のときは補助金がないケースと同様に(3.3.5)式より地方公共財供給は過少であることがわかる。また、 $\rho > 0$ であるとき、(3.3.2)式より次式を得る。

$$1 + R \cdot u_x \frac{\partial x}{\partial \rho} \cdot f(0) = 0 \quad (3.3.6)$$

(3.3.5)式と(3.3.6)式より、

$$g = g(\sigma) \quad (3.3.7)$$

$$\rho = \rho(\sigma) \quad (3.3.8)$$

を得る⁷⁾。

次に中央政府の最適化問題(MAX V)を解くと次式を得る。

$$\frac{\partial W}{\partial \sigma} = n_1 \left[u_x^1 \frac{\partial x_1}{\partial g_1} \left(\frac{dg_1}{d\sigma} + \frac{d\rho_1}{d\sigma} \right) + u_g^1 \frac{dg_1}{d\sigma} \right] + n_2 \left[u_x^2 \frac{\partial x_2}{\partial g_2} \left(\frac{dg_2}{d\sigma} + \frac{d\rho_2}{d\sigma} \right) + u_g^2 \frac{dg_2}{d\sigma} \right] = 0 \quad (3.3.9)$$

(3.3.9)式は中央政府が定率補助金 σ を用いて、 $g_i (i=1, 2)$ と $\rho_i (i=1, 2)$ を調整し、両地域の厚生水準 W を最大にする行動が示されている。地方政府の最適化問題の結果から導出された(3.3.7)式と(3.3.8)式からも分かるように、中央政府は定率補助金 σ を操作することにより、地方公共財供給量 g_i と地方政府が得るレント ρ_i の大きさに影響を与え、 g_i と ρ_i の変化によって、住民の効用を最大にすることができる。両地域同一の一括補助金ではヤードスティック競争下で生じる地方公共財供給の過少性や地方政府によるレント取得を改善させることはできなかったが、定率補助金はそれらを改善する可能性を持つ。

ここでは、定率補助金による政策は財政格差を改善することが可能なのかを考察する。そして、定率補助金政策が財政格差に及ぼす効果をみる。そのため、 $w_i > w_j$ かつ $\rho_i \neq \rho_j$ を仮定し、シンメトリック均衡($x_i = x_j = x$, $g_i = g_j = g$, $n_i = n_j = n$)を仮定する。 w_i と w_j の差をとれば、次式を得る。

$$n(w_i - w_j) = \frac{\rho_i - \rho_j}{(1 + \sigma)} \quad (3.3.10)$$

いま、 $w_i > w_j$ であるので、(3.3.10)式より $\rho_i > \rho_j$ となり、定率補助金は豊かな財源を持つ地域の放漫財政を改善することはできない。一方、(3.3.10)式右辺を見ると補助率 σ が上昇すると地域の財政格差が縮小することが分かる。

4. おわりに

本稿ではヤードスティック競争下において生じる地方公共財の過少性、財政豊かな地域の地方政府による大きなレント取得が、補助金政策によって改善されるのか否かを考察した。補助金政策として、地方政府間の平行補助金、中央政府による一括補助金および定率補助金を考えた。地方政府間の平行補助金はヤードスティック競争下においては、他地域へ補助金を与えると自地域地方政府の再選確率を低下させ、他地域地方政府の再選確率を上昇させるため、各地方政府は補助金額をゼロに決定するため、地方政府間の平行補助金によって、ヤードスティック競争下における非効率性は改善されないことが示された。したがって、ヤードスティック競争下においては中央政府による介入が必要となる。シンメトリッ

ク均衡の下での中央政府による一括補助金は地方政府による地方公共財の過少供給を改善することはできない。しかしながら、中央政府による地域独自の一般補助金と定率補助金は地方公共財の過少性を改善し地域間の財政格差を是正する可能性が示された。

Myers (1990), Wellisch (1994) は、足による投票（地域間人口移動）を想定した場合、地方政府間の平行補助金によって地域の厚生は最適となることから、中央政府の役割は最小限にすべきであると指摘している。しかしながら、地域間でヤードスティック競争が生じている場合、地方公共財の過少性や財政格差の是正のために中央政府による補助金の役割が重要になる可能性がある。

注

- 1) 関数 u の偏微分係数は、 $u'_x \equiv \partial u(x_i, g_i) / \partial x_i$, $u'_g \equiv \partial u(x_i, g_i) / \partial g_i$, $u''_{xx} \equiv \partial^2 u(x_i, g_i) / \partial x_i^2$, $u''_{gg} \equiv \partial^2 u(x_i, g_i) / \partial g_i^2$, $u''_{xg} \equiv \partial^2 u(x_i, g_i) / \partial g_i \partial x_i$, $u''_{gx} \equiv \partial^2 u(x_i, g_i) / \partial x_i \partial g_i$ のように定義される。
- 2) $v(g_i)$ は地方政府が公共財を供給する際に発生する不効用である。例えば、地方の政治家が公共財をある水準だけ供給するためには、議会の承認を得る必要があり、そのような公共財供給の過程で地方政府に不効用が生じることを仮定している。この仮定は、Seabright (1996) と同様である。
- 3) 地方政府の最適化問題の定式化方法については付録Aを参照。
- 4) ヤードスティック競争の下で、地方公共財が過少供給になる結果の証明は、Nishigaki et al. (2015a) にて行われている。
- 5) 中央政府と地方政府による2段階のゲームは、Caplan et al. (2000) においても構築されている。
- 6) $g = g(S_1, S_2)$, $\rho_i = \rho_i(S_1, S_2)$, $i = 1, 2$ であることの証明は付録Bを参照。
- 7) (3.3.7)式と(3.3.8)式の導出過程は、付録Cを参照。

参考文献

- Allers, M. A. (2012) "Yardstick competition, fiscal disparities, and equalization, *Economics Letters*," Vol. 117, pp. 4-6.
- (2014) "Are we getting value for our tax money? Improving the transparency of subnational government performance," mimeo.
- Boadway, R. W., P. Pestieau and D. Wildasin (1989) "Tax-transfer policies and the voluntary provision of public goods," *Journal of Public Economics*, Vol. 39, pp. 157-176.
- Boadway, R.W. and D.E. Wildasin (1984) *Public Sector Economics*, 2nd ed. Little Brown, Boston.
- Caplan, A. J., R. Cornes and E. Silva (2000) "Pure public goods and income redistribution in a federation with decentralized leadership and imperfect labor mobility," *Journal of Public Economics*, Vol. 77, pp. 265-284.
- Seabright, P. (1996) "Accountability and decentralisation in government: An incomplete contracts model," *European Economic Review*, Vol. 40, pp. 61-89.
- Lazear, E. P. and S. Rosen (1981) "Rank-order tournaments as optimum labor contracts," *Journal of Political Economy*, Vol. 89, pp. 841-864.
- Myers, G. M. (1990) "Optimality, free mobility, and the regional authority in a federation," *Journal of Public Economics*, Vol. 43, pp. 107-121.
- Nishigaki, Y., Y. Higashi and H. Nishimoto (2015a) "Yardstick competition and efficiency of local public goods," mimeo.
- Nishigaki, Y., Y. Higashi and H. Nishimoto (2015b) "Yardstick competition, efficiency of local public goods and fiscal transfers," 日本財政学会第72回大会報告論文.
- Wellisch, D. (1994) "Interregional spillovers in the presence of perfect and imperfect household mobility," *Journal of Public Economics*, Vol. 55, pp.167-184
- (2000) *Theory of Public Finance in a Federal State*, Cambridge University Press, Cambridge.

付録A

地方政府の最適化問題は下記のように定式化される。

$$\max_{\{g_i, t_i\}} E[v(g_i) + R] = v(g_i) + R \cdot pr(u(x_i, g_i) + \varepsilon_i \geq u(x_j, g_j) + \varepsilon_j) \\ \text{s.t.} \quad (2), (3)$$

ここで、 $pr(u(x_i, g_i) + \varepsilon_i \geq u(x_j, g_j) + \varepsilon_j)$ は地域 i の地方政府が再選する確率を示している。Lazear and Rosen (1981, p. 845) に従い、地方政府の再選確率を次のように変形させる。

$$\begin{aligned}
pr(u(x_i, g_i) + \varepsilon_i \geq u(x_j, g_j) + \varepsilon_j) &= pr(u(x_i, g_i) - u(x_j, g_j) \geq \varepsilon_j - \varepsilon_i) \\
&= pr(u(x_i, g_i) - u(x_j, g_j) \geq \xi) \\
&= F(u(x_i, g_i) - u(x_j, g_j)) \\
&= \int_{-\infty}^{u(x_i, g_i) - u(x_j, g_j)} f(\xi) d\xi
\end{aligned} \tag{A-1}$$

ここで、 $\xi = \varepsilon_j - \varepsilon_i$ と置いている。また、 $F(\cdot)$ は累積分布関数であり、 $f(\cdot)$ は確率密度関数である。(A-1) 式を地方政府 i の目的関数に代入すると (MAX I) が得られる。

付録 B

シンメトリック均衡 ($x_i = x_j = x$, $g_i = g_j = g$, $n_i = n_j = n$, $w_i > w_j$, $\rho_i \neq \rho_j$, $S_i \neq S_j$) を仮定したとき、住民の予算制約、地方政府の予算制約式、中央政府の予算制約式はそれぞれ次のように設定される。

$$x = w_i - t - T, i = 1, 2 \tag{B-1}$$

$$g = tn + S_i - \rho_i, i = 1, 2 \tag{B-2}$$

$$T = (S_i + S_j) / 2n, i, j = 1, 2, i \neq j \tag{B-3}$$

(B-2) 式と (B-3) 式を (B-1) 式に代入すれば、

$$x = w_i - \frac{g - S_i + \rho_i}{n} - \frac{S_i + S_j}{2n}, i, j = 1, 2, i \neq j \tag{B-4}$$

を得る。(B-4) 式と地方政府の 1 階の条件 (3.2.3), (3.2.4) 式を地方公共財供給量 g , 中央政府の一括補助金 S_i , 地方政府のレント ρ_i , 私的財消費量 x_i に関して全微分すると次式を得る。

$$dx = -\frac{1}{n}dg + \frac{1}{n}dS_i - \frac{1}{n}d\rho_i - \frac{1}{2n}(dS_i + dS_j), i, j = 1, 2, i \neq j \tag{B-5}$$

$$\left[v'(g) + Rf(0) \cdot \left(u_{xg} \frac{\partial x}{\partial g} + u_{gg} \right) \right] dg + d\rho_i + Rf(0) \cdot \left(u_{xx} \frac{\partial x}{\partial g} + u_{gx} \right) dx = 0, i = 1, 2 \tag{B-6}$$

$$Rf(0) \frac{\partial x}{\partial \rho_i} u_{xg} dg + R \cdot f(0) \cdot \frac{\partial x}{\partial \rho_i} u_{xx} dx = 0, i = 1, 2 \tag{B-7}$$

(B-5) を (B-6), (B-7) 式へ代入すると、

$$\left(A_i - B_i \frac{1}{n} \right) dg + \left(1 - B_i \frac{1}{n} \right) d\rho_i + B_i \frac{1}{2n} dS_i - B_i \frac{1}{2n} dS_j = 0, i, j = 1, 2, i \neq j \tag{B-8}$$

$$\left(C_i u_{xg} - \frac{1}{n} \right) dg - C_i u_{xx} \frac{1}{n} d\rho_i + C_i \cdot u_{xx} \frac{1}{2n} dS_i - C_i \cdot u_{xx} \frac{1}{2n} dS_j = 0, i, j = 1, 2, i \neq j \tag{B-9}$$

を得る。ここで、

$$A_i \equiv v'(g) + R \cdot f(0) \cdot \left(u_{xg} \frac{\partial x}{\partial g} + u_{gg} \right), i = 1, 2$$

$$B_i \equiv R \cdot f(0) \cdot \left(u_{xx} \frac{\partial x}{\partial g} + u_{gx} \right), i = 1, 2$$

$$C_i \equiv R \cdot f(0) \frac{\partial x}{\partial \rho_i}, i = 1, 2$$

と置いている。(B-8) 式と (B-9) 式を行列を用いてまとめると次式のようになる。

$$\begin{bmatrix} A_1 - B_1 \frac{1}{n} & 0 & 1 + B_1 \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & A_2 - B_2 \frac{1}{n} & 0 & 1 - B_2 \frac{1}{n} \\ C_1 u_{xg} - \frac{1}{n} & 0 & -C_1 u_{xx} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & C_2 u_{xg} - \frac{1}{n} & 0 & -C_2 u_{xx} \frac{1}{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dg \\ dg \\ d\rho_1 \\ d\rho_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_1 \frac{1}{2n} dS_1 + C_2 \frac{1}{2n} dS_2 \\ -C_2 \frac{1}{2n} dS_2 + C_1 \frac{1}{2n} dS_1 \\ -D_1 \cdot u_{xx} \frac{1}{2n} dS_1 + D_2 \cdot u_{xx} \frac{1}{2n} dS_2 \\ -D_2 \cdot u_{xx} \frac{1}{2n} dS_2 + D_1 \cdot u_{xx} \frac{1}{2n} dS_1 \end{bmatrix} \quad (\text{B-10})$$

(B-10)式の左辺第1項目の行列は正則である。したがって、

$$\begin{aligned} g &= g(S_1, S_2) \\ \rho_i &= \rho_i(S_1, S_2), \quad i=1,2 \end{aligned}$$

を得ることができる。□

付録C

シンメトリック均衡 ($x_i = x_j = x$, $g_i = g_j = g$, $\rho_i = \rho_j = \rho$, $n_i = n_j = n$, $t_i = t_j = t$) を仮定したとき、住民の予算制約、地方政府の予算制約式、中央政府の予算制約式はそれぞれ次のように設定される。

$$x = w - t - T \quad (\text{C-1})$$

$$g = tn(1 + \sigma) - \rho \quad (\text{C-2})$$

$$T = t\sigma \quad (\text{C-3})$$

(C-2)式と(C-3)式を(C-1)式に代入すれば、

$$x = w - \frac{g + \rho}{n} \quad (\text{C-4})$$

を得る。(C-4)式と地方政府の1階の条件(3.3.4), (3.3.5)式を地方公共財供給量 g , 中央政府の定率補助金 σ , 地方政府のレント ρ , 私的財消費量 x に関して全微分すると次式を得る。

$$dx = -\frac{1}{n} dg - \frac{1}{n} d\rho \quad (\text{C-5})$$

$$\left[v'(g) + R \cdot f(0) \left(-\frac{1}{n(1+\sigma)} + u_{gg} \right) \right] dg + d\rho + \left[R \cdot f(0) \cdot \left(-\frac{1}{n(1+\sigma)} u_{xx} + u_{gx} \right) \right] dx + R \cdot f(0) \cdot u_x \frac{n}{n^2(1+\sigma)^2} d\sigma = 0 \quad (\text{C-6})$$

$$R \cdot f(0) \frac{1}{n(1+\sigma)} u_{xg} dg + R \cdot f(0) \frac{1}{n(1+\sigma)} u_{xx} dx + R \cdot f(0) \cdot u_x \frac{-n}{n^2(1+\sigma)^2} d\sigma \quad (\text{C-7})$$

(C-5)を(C-6), (C-7)式へ代入すると、

$$A \cdot dg + B \cdot d\rho + C \cdot d\sigma = 0 \quad (\text{C-8})$$

$$D \cdot dg + E \cdot d\rho + F \cdot d\sigma = 0 \quad (\text{C-9})$$

を得る。ここで、

$$A \equiv v'(g) + R \cdot f(0) \left[-\frac{1}{n(1+\sigma)} + u_{gg} - \frac{-1}{n(1+\sigma)} u_{xx} \frac{1}{n} + u_{gx} \frac{1}{n} \right]$$

$$B \equiv 1 - R \cdot f(0) \left[\frac{-1}{n(1+\sigma)} u_{xx} \frac{1}{n} + u_{gx} \frac{1}{n} \right]$$

$$C \equiv R \cdot f(0) \cdot u_x \frac{n}{n^2(1+\sigma)^2}$$

$$D \equiv R \cdot f(0) \left[\frac{1}{n(1+\sigma)} u_{xg} - \frac{1}{n(1+\sigma)} u_{xx} \frac{1}{n} \right]$$

$$E \equiv -R \cdot f(0) \frac{1}{n(1+\sigma)} u_{xx} \frac{1}{n}$$

$$F \equiv R \cdot f(0) \cdot u_x \frac{-n}{n^2(1+\sigma)^2}$$

と置いている。(C-8)式と(C-9)式を行列を用いてまとめると次式のようになる。

$$\begin{bmatrix} A & B \\ D & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dg \\ d\rho \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C \cdot d\sigma \\ -F \cdot d\sigma \end{bmatrix} \quad (\text{C-10})$$

(C-10)式の左辺第1項目の行列は正則である。したがって、

$$g = g(\sigma)$$

$$\rho = \rho(\sigma)$$

を得ることができる。□