

2015年度博士論文

**肺胞毛細血管における
酸素輸送・交換のモデル方程式の研究**

龍谷大学大学院 理工学研究科 数理情報専攻

T13D002 新城 直幸

指導教員 森田 善久

肺胞毛細血管における酸素輸送・交換のモデル方程式の研究

理工学研究科 数理情報学専攻

T13D002 新城直幸

指導教員 森田善久

要旨

現在医療の進歩により臓器や脳などの生理学的メカニズムの解析が進んでいる。特に呼吸は生物が活動するエネルギーを得るため重要である。呼吸器系は体の各組織における酸素 (O_2), 二酸化炭素 (CO_2) などの輸送を担っている。この各組織の代謝により生成される二酸化炭素は血液によって肺に送られ、換気により外気へと放出される。また、酸素については肺により外気から取り込まれる。このような呼吸器系の生理学的メカニズムの一つを理解するため、本研究では、肺胞と毛細血管間の膜を通して行われるガス交換の生理的機能について数理モデル化し、そのモデルを数学的に解析する。こうして二酸化炭素濃度や酸素濃度がガス交換の後、毛細血管内である一定の濃度に維持されるメカニズムを数理的観点から明らかにする。

まず、研究の最初のステップとして、Keener-Sneyd(1998)の研究を基に一樣な毛細血管を流れる血液中のガス輸送と、血液内での化学反応に加え膜を通したガス交換を表現した数理モデルを考える。このとき得られるモデル方程式は反応項をもつ空間一次元の移流方程式になる。次に、今回の研究では肺胞の換気の機能を入れた拡散方程式を導入し、ガスの輸送方程式と組み合わせた数理モデルを提案する。ここで肺胞とのガス交換は毛細血管との分圧差による拡散によって行われていると仮定している。

酸素輸送の場合には非線形の反応項をもつ移流方程式と拡散方程式をカップリングした連立偏微分方程式系になる。このモデル方程式について以下のような結果が得られた。まず数値シミュレーション結果では、時間発展した解が定常解に収束することが確かめられた。しかもその定常解の形状から肺胞毛細血管の出口でガス交換の後、高い酸素濃度が維持されるという特徴が確認できる。さらにモデルに現れる肺胞-毛細血管間の拡散係数が低い場合の数値計算結果から拡散係数が低くても毛細血管の長さを十分長く設定すれば、肺胞毛細血管の出口で酸素が高い濃度で維持されることが示される。この数値計算結果から適当な初期値、境界値に対する解の存在と一意性、定常解の存在とその漸近安定性の研究を行った。反応項に非線形性が現れるが、協調系とよばれる性質に着目し、それを利用すると解が構成できる。また、膜を通した拡散の強さを表す係数が大きいときに定常解の漸近安定性が示される。この論文ではこれらの結果について数学的な証明を与える。数値計算の手法についても述べる。

また、この研究は二酸化炭素輸送のモデルにも拡張できる。このモデルの数値シミュレーションによって、定常解が単調減少していることや、肺胞毛細血管の出口で二酸化炭素がガス交換の後、低い濃度に維持され、十分除去されている事が示される。さらに酸素輸送のモデルと同様に適当な境界条件を課すと定常解の存在が示される。

Mathematical study for an oxygen transport model with the gas exchange in capillary-alveoli

T13D002 Naoyuki Shinjo

Adviser Yoshihisa Morita

Graduate Course of Applied Mathematics and Informatics

Graduate School of Science and Technology Ryukoku University

Abstract

It is important for the human health to understand the mechanism of the respiratory system that works for the transportation of oxygen (O_2) and carbon dioxide (CO_2) between capillary and alveoli in the lungs. There are mathematical models for capillary-alveoli gas exchange proposed by Keener-Sneyd(1998). Those models are described by 1-dimensional transportation equations assuming a uniform capillary and chemical reactions in blood. Motivated by their work, we take the ventilation of the gas CO_2 or O_2 in alveoli into account for the capillary-alveoli gas exchange model. We describe the ventilation by a simple equation of the gas diffusion with a linear kinetics and couple it with the gas transport equations by diffusion through the membrane, and then we obtain the model of a weakly coupled system of advection-reaction and diffusion equations. Our aim is to develop the mathematical study of this gas transport system mainly for the case of O_2 , in which the system has nonlinear reaction terms.

Assuming appropriate boundary conditions and initial conditions, we perform numerical computations of the model system. Numerically, the solution converges to a stationary state whose profile exhibits that O_2 is sufficiently supplied at the end of the capillary provided that the diffusion in the capillary-alveoli and the ventilation work well. Our mathematical study partially justifies the numerical computation. Under some conditions we prove the existence of a time global solution to the system, the existence of a stationary solution and the asymptotic stability of the stationary solution. In the proof of those results the monotone property of the equations plays a key role.

On the other hand for the CO_2 model the equations have linear reaction terms. We can also prove the existence of a positive stationary solution and numerical computation show the convergence of solutions to the stationary solution.

目次

1	序論	1
1.1	研究の背景	1
1.2	研究の内容	1
2	毛細血管内のガス輸送と肺胞とのガス交換モデル	3
3	モデル方程式の数値計算	9
3.1	差分化の方法	9
3.2	酸素供給モデルの数値計算	11
4	解の存在と一意性	15
5	定常解の存在	18
6	解の漸近安定性	23
7	解の存在の証明	28
8	二酸化炭素輸送・交換モデル	37
8.1	二酸化炭素輸送・交換のモデル化	37
8.2	二酸化炭素輸送・交換モデルの数値計算	38
8.3	二酸化炭素輸送・交換モデルの定常解の存在	42
8.4	解の漸近安定性	49
9	まとめ	58

1 序論

1.1 研究の背景

現在医療の進歩により臓器や脳などの生理学的メカニズムの解析が進んでいる。特に呼吸は生物が活動するエネルギーを得るため重要である。呼吸器系は体の各組織における酸素 (O_2), 二酸化炭素 (CO_2) などの輸送を担っている。この各組織の代謝により生成される二酸化炭素は血液によって肺に送られ、換気により外気へと放出される [3], [4]。また、酸素については肺により外気から取り込まれる。このような呼吸器系の生理学的メカニズムの一つを理解するため様々な研究がなされている。Keener-Sneyd[1] らは呼吸器系の生理的メカニズムの一つを理解するため、肺胞と毛細血管間の膜を通して行われるガス交換の生理的機能についてモデル化を行った。彼らはまず血液中に流れる酸素や二酸化炭素の血液内での化学反応についてモデル化し、実験データからそのモデルにおけるパラメータの値を同定した。さらに彼らは毛細血管を流れる血液中のガスの濃度変化を移流方程式 $u_t + c_0 u_x = f(u)$ を基に、次のようなモデル化を行った。まず彼らは血液中の二酸化炭素の濃度変化に着目し、血液中の二酸化炭素の化学反応を考慮に入れた移流方程式を構築した。そのモデル方程式は線形の式で表され、適当な境界値を与えるとその定常解は容易に求めることができる。この求めた定常解を実験データと比較し、血液中の二酸化炭素濃度のデータとある程度一致することを確認した。次に彼らは血液中の酸素の化学反応を考慮に入れた移流方程式を構築した。二酸化炭素のモデル方程式とは異なり、酸素のモデル方程式は非線形の項を持つ移流方程式となる。非線形方程式の解を求めるのは一般的に容易ではない。しかし、酸素の総量で考えることにより方程式を積分方程式に書き直し、その積分方程式から導かれる近似解と実験データを比較し、考察を行った。

1.2 研究の内容

本論文では Keener-Sneyd らにより構築されたモデル [1] を参考にして、肺胞での酸素や二酸化炭素の濃度変化についても考慮した上記のモデルを考える。こうして得られたモデル方程式から二酸化炭素濃度や酸素濃度がガス交換の後、毛細血管内である一定の濃度に維持されるメカニズムを数理的観点から明らかにする。特に濃度が時間的に変化する様子を調べ、数学的に考察する。

本論文は序論を含めた以下の 9 章で構成されている。第 2～7 章が酸素輸送・交換の数理モデルについての研究で、第 8 章が二酸化炭素輸送・交換の数理モデルの研究となっている。

第 2 章では、生理的背景を基に、まず血液中の酸素や二酸化炭素の化学反応について質量作用の法則を用いてモデル化を行う。次に毛細血管内のガス輸送、肺胞間でのガス交換をモデル化を行う。ここで考える毛細血管は簡単のために太さが一定なシリンダー状のものである。ここで得られた移流方程式に毛細血管内での化学反応の項を導入し、毛細血管

内での酸素輸送・交換モデル方程式を導く．ここで新たに肺胞内でのガスの濃度変化に着目し、これを拡散方程式を用いてモデル化する．以上のモデル化で得られた方程式は反応項をもつ移流方程式と拡散方程式をカップリングした方程式系になっている．さらにこのモデル方程式を無次元化して u, v, w の3変数の方程式に書き直す．

第3章では、まず移流方程式の風上差分、拡散方程式の陰解法と呼ばれる差分化について述べる．次に第2章で得られた酸素輸送・交換のモデル方程式を差分化して数値計算を行う．この数値計算から定常解が境界 ($x = L$) つまり毛細血管の出口で酸素濃度が最大になっていることがわかる．

第4章では、第2章で得られた酸素輸送・交換のモデル方程式の解の存在と初期値に対する解の一意性についての結果を述べる．解の存在についてはその証明の方針を示し、第7章で詳しく証明を述べる．解の一意性については同じ初期値に対して2つの解が存在したとして、それらが恒等的に等しいことを示す．

第5章では、このモデル方程式の定常解の存在について証明を行う．この証明では酸素輸送・交換のモデル方程式の反応を表す常微分方程式が、協調系の連立方程式系になっている性質を用いる．このことを用いると解の上からの評価と下からの評価を得ることができる．次に拡散方程式の定常問題の評価はグリーン関数を用いて上からの評価と下からの評価を与える．以上の作業を繰り返すと単調な関数列を得ることができるのでその極限関数が存在する．さらにこの関数列の同等連続性と一様有界性を示し、Ascoli-Arzelà の定理によって極限関数への一様収束が証明される．最後に積分方程式を用いて極限関数が解になっていることが示される．

第6章では、第2章で得られたモデルの定常解の漸近安定性について証明を行う．ここでも第5章と同様に方程式が協調系の連立方程式系になっていることが重要である．定常解まわりで方程式を書き直し、 L^2 ノルムによるエネルギー不等式を導く．毛細血管と肺胞間の酸素の拡散が十分大きいとき指数的に漸近する結果を得る事ができる．

第7章では、第4章の解の存在について詳しい証明を述べる． u, v の方程式は特性曲線上 $x - t = \xi$ 上では2変数の常微分方程式系の形に書き直される．この u, v の方程式は $w(x, t)$ が与えられたとき協調系で比較定理が成り立つ．この性質と w の拡散方程式の性質を使うと解が構成できる．

第8章では、移流方程式に二酸化炭素の化学反応項および肺胞での二酸化炭素の濃度変化を考慮したモデル方程式についての数値計算、定常解の存在、解の漸近安定性について述べる．酸素の場合とは異なり二酸化炭素の場合は線形の反応項をもち、定常解が境界値 ($x = 0$) で最大値になっていることが証明される．数値計算結果からは、その解の形状は単調減少していることが見て取れる．さらに解の漸近安定性では H^1 の位相で収束することまで示すことができる．

第9章では本論文のまとめが述べられている．

2 毛細血管内のガス輸送と肺胞とのガス交換モデル

呼吸器系は鼻, 口, 咽頭, 気管, 気管支樹, 肺胞, 呼吸筋から構成されている. 肺胞の表面には毛細血管が張り巡らされており, 気管支からきた酸素を毛細血管内の血液へ, 血液内の二酸化炭素を外気へといったガス交換を行っている. 酸素や二酸化炭素などのガスはまず呼吸により取り込まれ, 気管を通して肺に送られる. ガスは肺の末端器官の肺胞に送られ, 毛細血管とガス交換が行われる. 血液中の交換されて新しくなったガスは血液中に溶け込んで, 各器官を循環していく. 肺胞と肺胞毛細血管の間でのガス移動は, 分圧の高い方から低い方へ, Fick の拡散法則に従ってすみやかに移動する. 以上の生理的背景のもとに血管内のガス輸送と肺胞とのガス交換をモデル化する. まず肺胞と接する毛細血管を考える (Fig 2.1).

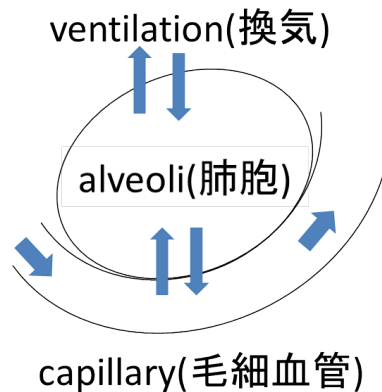
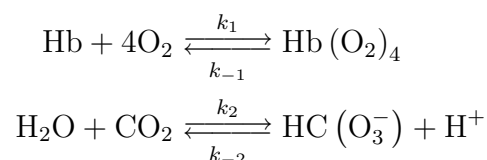


Fig 2.1: 肺胞と接する毛細血管の略図

血液中の酸素はヘモグロビンと結合し易い性質を持っており, 酸素の大部分がヘモグロビンと結合した状態で運ばれる. 一つのヘモグロビンは最大 4 個の酸素分子と結合できる (Fig 2.2).

また二酸化炭素 (CO_2) は大部分は水 (H_2O) と結合した状態で運ばれている. この状態はそれぞれ次の化学反応式によって記述される.



ただし Hb , HCO_3^- , H^+ はそれぞれヘモグロビン, 重炭酸塩, 水素イオンを表し, k_1 , k_{-1} , k_2 , k_{-2} は反応係数である. これらの化学反応は質量作用の法則を用いてそれぞれ次のように微分

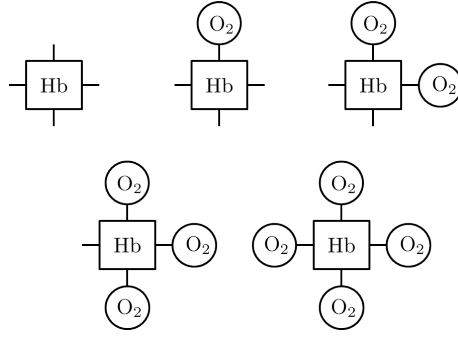


Fig 2.2: ヘモグロビンと酸素の結合

方程式で書き表す事ができる. 酸素の場合は

$$\begin{aligned}\frac{d[\text{O}_2]}{dt} &= -4k_1 [\text{Hb}] [\text{O}_2]^n + 4k_{-1} [\text{Hb}(\text{O}_2)_4], \\ \frac{d[\text{Hb}(\text{O}_2)_4]}{dt} &= k_1 [\text{Hb}] [\text{O}_2]^n - k_{-1} [\text{Hb}(\text{O}_2)_4], \\ \frac{d[\text{Hb}]}{dt} &= -k_1 [\text{Hb}] [\text{O}_2]^n + k_{-1} [\text{Hb}(\text{O}_2)_4],\end{aligned}$$

で, 二酸化炭素については

$$\begin{aligned}\frac{d[\text{CO}_2]}{dt} &= k_{-2} [\text{H}^+] [\text{HCO}_3^-] - k_2 [\text{CO}_2], \\ \frac{d[\text{HCO}_3^-]}{dt} &= -k_{-2} [\text{H}^+] [\text{HCO}_3^-] + k_2 [\text{CO}_2].\end{aligned}$$

ただし, $[\text{Hb}]$, $[\text{O}_2]$, $[\text{Hb}(\text{O}_2)_4]$, $[\text{CO}_2]$, $[\text{HCO}_3^-]$ はそれぞれの濃度を表す. ここで n は実験データから約 $n = 2$ であるが, 文献 [1] では $n = 4$ としたモデルを使っている. また H^+ は血液内に十分 H_2O が存在するので $[\text{H}^+]$ は一定としてよい.

次に毛細血管内のガス輸送, 肺胞間でのガス交換をモデル化する. ここでは毛細血管は太さが一定なシリンダー状のものを考えることにする (Fig 2.3). 肺胞と接している部分の長さを L , 断面積を A , 断面の外周は p とする. 以下では A , p は一定として, 位置を x ($0 \leq x \leq L$) で表す. 時刻 t , 位置 x における血液中のガス濃度を $U(x, t)$ とする. 任意に $\tilde{x}$ を取るとこの毛細血管の $[0, \tilde{x}]$ に含まれる溶解ガスの総量は, $A \int_0^{\tilde{x}} U(s, t) ds$ となる. さらに質量保存則より

$$\frac{d}{dt} \int_0^{\tilde{x}} A \cdot U(s, t) ds = \int_0^{\tilde{x}} A \frac{\partial U}{\partial t}(s, t) ds = c_0 U(0, t) - c_0 U(\tilde{x}, t) + p \int_0^{\tilde{x}} q(s, t) ds. \quad (2.1)$$

ただし, c_0 は毛細血管内の血液の流速, q は毛細血管の x 軸に垂直な面による断面の境界を通して流入するガスの濃度である. $p \int_0^{\tilde{x}} q(s, t) ds$ は毛細血管から流入するガスの濃度を表

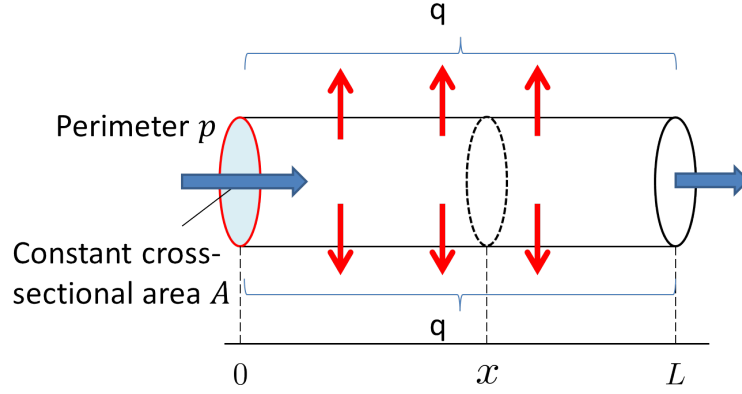


Fig 2.3: モデル化に用いる毛細血管

す. 質量保存則によって (2.1) が全ての $\tilde{x}$ について成り立つとして, 両辺を $\tilde{x}$ で微分し, $\tilde{x}$ は任意なので $\tilde{x}$ を x について書き換えると

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x, t) = -c_0 \frac{\partial U}{\partial x}(x, t) + \frac{p}{A} q(x, t), \quad (2.2)$$

という輸送方程式が得られる.

毛細血管内の血液中のガス濃度はガス分圧を P , ガスの溶解度を σ とすると

$$U = \sigma P$$

と表される. 肺胞から毛細血管内へのガスの移動は拡散による. このとき血液に溶け込んだ状態を考えているので分圧差に比例した量が移動する. よって

$$q = D_s \left(P - \frac{U}{\sigma} \right) = \frac{D_s}{\sigma} (\sigma P - U),$$

と表される. ここで D_s は膜交換速度を表す. こうして (2.2) は

$$\frac{\partial U}{\partial t} + c_0 \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{D_s p}{\sigma A} (\sigma P - U) = D_U (\sigma P - U)$$

となる. ただし, $D_U = D_s p / \sigma A$ である.

同様に $V = [\text{Hb}(\text{O}_2)_4]$, $Z = [\text{Hb}]$ について, 移流方程式を考えることができる. これら U , V , Z の移流方程式に血液内での酸素の化学反応を導入すると以下のモデル方程式を得る.

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + c_0 \frac{\partial U}{\partial x} &= D_{\text{O}_2} (\sigma P - U) - 4k_1 Z U^n + 4k_{-1} V, \\ \frac{\partial V}{\partial t} + c_0 \frac{\partial V}{\partial x} &= -k_1 V + k_1 Z U^n, \\ \frac{\partial Z}{\partial t} + c_0 \frac{\partial Z}{\partial x} &= -k_1 Z U^n + k_{-1} V, \end{aligned}$$

以下偏微分は $U_x = \partial U / \partial x$, $U_t = \partial U / \partial t$ のように略記する. 以下のモデルについては $n = 4$ として文献 [1] で提案されている.

次に肺胞内の換気を考慮した肺胞内のガス濃度 P の変化を考える. 肺胞内のガスの濃度変化は呼気, 吸気および毛細血管とのガス濃度差によって生じる. 肺胞内のガスの流入速度を Λ_i , 流出速度を Λ_α とすると肺胞内のガス濃度変化を表す方程式は以下のようになる.

$$P_t - D_0 \Delta P = -D_U (\sigma P - U) + \Lambda_i - \Lambda_\alpha \quad (2.3)$$

となる. ただし, Δ はラプラシアンで, D_0 は肺胞内でのガスの拡散係数である. 呼気により肺胞から流出するガスは肺胞内のガス濃度に比例すると仮定して (2.3) で $\Lambda_\alpha = R_0 P$ とおく,

$$P_t - D_0 \Delta P = -D_U (\sigma P - U) + \Lambda_i - R_0 P$$

となる. ここで R_0 は肺胞内のガス濃度の流出速度と見なす事ができる. 呼吸による周期的なガス濃度の変化は毛細血管内のガスの変化に比べてゆっくりしているので, 以下では Λ_i と R_0 は一定と仮定して考える事にする. またモデルを簡略化するため P の存在する領域として毛細血管に接する矩形領域を考え垂直方向は一様とする. このとき P についての方程式は一次元の拡散方程式になる. 上の方程式と P をまとめて書くと

$$\begin{cases} U_t + c_0 U_x = D_{O_2} (\sigma P - U) - 4k_1 Z U^n + 4k_{-1} V \\ V_t + c_0 V_x = -k_1 V + k_1 Z U^n \\ Z_t + c_0 Z_x = -k_1 Z U^n + k_{-1} V \\ P_t - D_0 P_{xx} = -D_{O_2} (\sigma P - U) + \Lambda_i - R_0 P \end{cases} \quad (2.4)$$

となる.

次に境界条件を定める. 肺胞と接した毛細血管の入り口では低い濃度の O_2 を含んだ血液が流れ込む. ここでは毛細血管での入り口での O_2 , Hb , $Hb(O_2)_4$ 濃度を一定と仮定して, 入り口での境界条件は次のように与える.

$$U(0, t) = U_{in}, \quad V(0, t) = V_{in}, \quad Z(0, t) = Z_{in}.$$

また毛細血管と接した肺胞の境界での酸素の出入りはないと仮定してノイマン境界条件を与える.

$$P_x(0, t) = P_x(L, t) = 0$$

次に方程式 (2.4) を無次元化する.

$$\begin{aligned} u &:= U, \quad v := V, \quad z := Z, \quad w := \sigma P, \quad d_1 := D_{O_2} / \sigma, \\ \lambda &:= \sigma \Lambda_i / R_0, \\ d_w &:= D_0, \quad d_2 := \sigma D_{O_2}, \quad x' := x / c_0, \quad L' := L / c_0 \end{aligned}$$

と置いて, u, v, z, w の方程式に書き直し, x' を x , L' を L と置き直すと

$$\begin{cases} u_t + u_x = -4k_1 u^n z + 4k_{-1} v + d_1 (w - u) \\ v_t + v_x = k_1 u^n z - k_{-1} v \\ z_t + z_x = -k_1 u^n z + k_{-1} v \\ w_t - d_w w_{xx} = \alpha (\lambda - w) + d_2 (u - w) \end{cases} \quad (2.5)$$

を得る. 以下では境界条件は

$$u(0, t) = u_{in}, \quad v(0, t) = v_{in}, \quad z(0, t) = z_{in}, \quad w_x(0, t) = w_x(L, t) = 0, \quad (2.6)$$

とする. 初期条件を

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad z(x, 0) = z_0(x), \quad w(x, 0) = w_0(x)$$

とおく. ただし

$$u(0, 0) = u_{in}, \quad v(0, 0) = v_{in}, \quad z(0, 0) = z_{in}$$

である. (2.5) は 4 変数の方程式系になっているが (2.5) の第 2 式と第 3 式を足すと

$$(v + z)_t + (v + z)_x = 0$$

が満たされている. $S = v + z$ とおくと

$$S_t + S_x = 0$$

をみたす解 S は特性曲線 $x - t = \xi$ 上では

$$\frac{d}{dt} S(t + \xi, t) = 0$$

を満たすので一定である. 区間 $[0, L]$ を考えているので $t > L$ では初期条件の影響がなくなり

$$S(x, t) = v(x, t) + z(x, t) = v_{in} + z_{in}$$

となる. 従って

$$z = m - v$$

を用いて

$$\begin{cases} u_t + u_x = -4k_1 u^n (m - v) + 4k_{-1} v + d_1 (w - u) \\ v_t + v_x = k_1 u^n (m - v) - k_{-1} v \\ w_t - d_w w_{xx} = \alpha (\lambda - w) + d_2 (u - w) \end{cases} \quad (2.7)$$

と 3 変数の微分方程式を初期条件, 境界条件

$$u(0, t) = u_{in}, \quad v(0, t) = v_{in}, \quad w_x(0, t) = w_x(L, t) = 0, \quad u_0, v_0 \in C^1[0, L] \quad (2.8)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad w(x, 0) = w_0(x) \quad (t \geq 0) \quad (2.9)$$

のもとで考える事にする. ただし境界 $x = 0$ での両立条件は

$$u_0(0) = u_{in}, \quad v_0(0) = v_{in}, \quad w_0(0) = 0 \quad (2.10)$$

である.

次の章では方程式系 (2.7) について u_{in}, v_{in} を適当に設定し, 数値計算を行う.

3 モデル方程式の数値計算

この章ではモデル方程式の差分化と数値計算結果を示す.

3.1 差分化の方法

まず

$$u_t = -cu_x + f(u) \quad (0 < x < L)$$

の差分化について説明する. ここで $c \neq 0$ として風上差分を適用したを差分化を適用する. 移流項の差分化を c の符号によって場合分けする. 時間 $n\Delta t$, 位置 $i\Delta x$ での u を u_i^n とすると

$$cu_x \approx \begin{cases} c \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} + O(\Delta x) & (c \geq 0), \\ c \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} + O(\Delta x) & (c < 0) \end{cases}$$

と差分化する. よってまとめて書くと

$$\begin{aligned} cu_x &\approx \frac{c + |c|}{2} \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} + \frac{c - |c|}{2} \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} \\ &= c \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} + |c| \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{2\Delta x} \end{aligned}$$

と表すことができる. この差分法を風上差分と呼ぶ. 従って $u_t = -cu_x + f(u)$ は差分化は

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t \left(c \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} + |c| \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{2\Delta x} \right) + \Delta t f(u_i^n)$$

となる. (2.7) の場合については $c = 1$ として上記の風上差分を用いる. 次に一般的な反応拡散系

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = d \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + g(v), & (0 < x < L, \ t > 0) \\ v(x, 0) = v_0(x), & (0 < x < L) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial v}{\partial x}(L, t) = 0 & (t > 0) \end{cases} \quad (3.1)$$

の空間一次元の差分について述べる.

$$v(x_i, t_n) = v_i^n \quad (x_i = i\Delta x, \ t_n = n\Delta t)$$

とすると (3.1) の陰的な差分方程式は

$$\frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\Delta t} = d \frac{v_{i+1}^{n+1} - 2v_i^{n+1} + v_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + g(v_i^n)$$

である. ここで $r = \Delta t / \Delta x^2$ と置くと

$$-rdv_{i-1}^{n+1} + (1 + 2rd)v_i^{n+1} - rdv_{i+1}^{n+1} = v_i^n + \Delta tg(v_i^n) \quad (3.2)$$

となる. 次に境界条件の差分化をおこなう. (3.1) の境界条件より

$$\frac{v_1^n - v_{-1}^n}{2\Delta x} = 0, \quad \frac{v_{N+1}^n - v_{N-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

となるように

$$v_{-1}^n = v_1^n, \quad v_{N+1}^n = v_{N-1}^n \quad (3.3)$$

と置く. 次に $0 \leq i \leq N$ において (3.2) を解く. まず $i = 0$ のとき (3.3) より

$$(1 + 2rd)v_0^{n+1} - 2rdv_1^{n+1} = v_0^n + \Delta tg(v_0^n)$$

となる. $i = N$ のとき (3.3) より

$$-2rdv_{N-1}^n + (1 + 2rd)v_N^{n+1} = v_N^n + \Delta tg(v_N^n)$$

となる. $i = 1, \dots, N-1$ の場合は (3.2) を用いて, 計算すべき差分方程式の行列表記

$$\begin{pmatrix} 1 + 2rd & -rd & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -rd & 1 + 2rd & -rd & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -rd & 1 + 2rd & -rd \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -rd & 1 + 2rd \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0^{n+1} \\ v_1^{n+1} \\ \vdots \\ v_{N-1}^{n+1} \\ v_N^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0^n + \Delta tg(v_0^n) \\ \vdots \\ v_i^n + \Delta tg(v_i^n) \\ \vdots \\ v_N^n + \Delta tg(v_N^n) \end{pmatrix}$$

が得られる. 反応項がない拡散方程式

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = d \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \\ v(x, 0) = v_0(x), \\ \frac{\partial v}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial v}{\partial x}(L, t) = 0 \end{cases}$$

では上記のような陰的差分法は無条件安定である事が知られており $\Delta x, \Delta t$ をどのように取っても差分解は発散しない。しかし、反応項がある場合は Δt をある程度小さく取る必要がある。さらに今回のような移流方程式と拡散方程式をカップリングした系では移流方程式の差分の制約から

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \approx c \quad (c = 1)$$

と取る必要がある。

3.2 酸素供給モデルの数値計算

(2.7) の数値計算を行う。まず各パラメータを以下のように設定する。

$$\begin{cases} n = 4, d_2 = 0.3, k_1 = 0.01, k_{-1} = 0.3, \\ d_w = 100, \alpha = 10, \lambda = 9.0. \end{cases}$$

u, v に関する境界条件,

$$u(0, t) = u_{in} = 2.0, v(0, t) = v_{in} = \frac{5.0k_1u_{in}^4}{k_1u_{in}^4 + k_{-1}},$$

また初期条件を

$$u(x, 0) = 2.0, v(x, 0) = v_{in} = \frac{5.0k_1u_{in}^4}{k_1u_{in}^4 + k_{-1}}, w(x, 0) = 8.0$$

と設定する。

$d_1 = 3.5, L = 3.0$ の数値計算の定常状態 ($t = 2.8$) では低い濃度で流入してきた血液中の O_2 が肺胞に接した毛細血管の出口では十分供給され、高い濃度に維持されている事が分かる (Fig 3.1)。さらに肺胞における O_2 濃度も高い濃度に維持されている。これは実際の肺胞毛細血管での O_2 濃度変化の特徴をうまく再現できている。さらに定常状態から摂動を加えても定常状態に戻る事も確認できた。

次に拡散係数 d_1 を小さく取った数値計算を行う。 $d_1 = 0.05, L = 3.0$ の数値計算では $t = 160$ では低い濃度で流入してきた血液中の O_2 が肺胞に接した毛細血管の出口では全く供給されずに、低い濃度に維持されている事が分かる (Fig 3.2)。そこで次に毛細血管の長さ L を十分長く取り数値計算を行うと次の結果を得た。 $d_1 = 0.05, L = 190$ の数値計算では $d_1 = 0.05, L = 3.0$ と異なり $t = 160$ では低い濃度で流入してきた血液中の O_2 が肺胞に接した毛細血管の出口では供給され、高い濃度に維持されている (Fig 3.3)。上の数値計算より毛細血管の長さを十分長く取れば拡散係数 d_1 が十分小さくても酸素が供給されることがわかる。しかし、 $d_1 = 3.5, L = 3.0$ の場合とは定常状態に落ち着くまでの時間がかなり異なることがわかる。これらの結果より (2.8), (2.9) を満たす (2.7) の解は安定な定常解に近づく事が予想できるが、 d_1 の大きさが定常解の形状や収束速度に大きく関係していると考えられる。次の章以降ではこの方程式系の解について数学的に議論する。

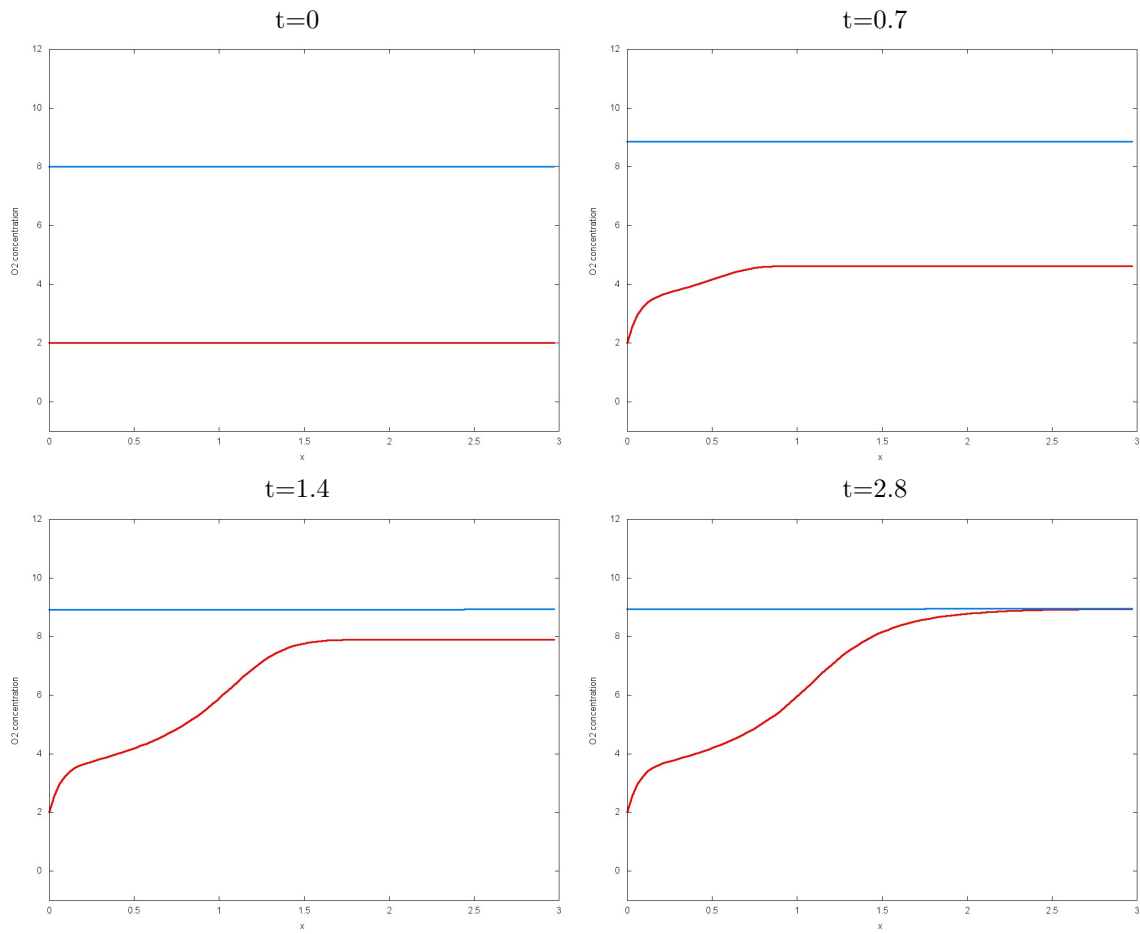


Fig 3.1: 横軸: x , 縦軸:酸素濃度, $d_1 = 3.5$, $L = 3.0$ の数値計算結果. 赤: u , 青: w

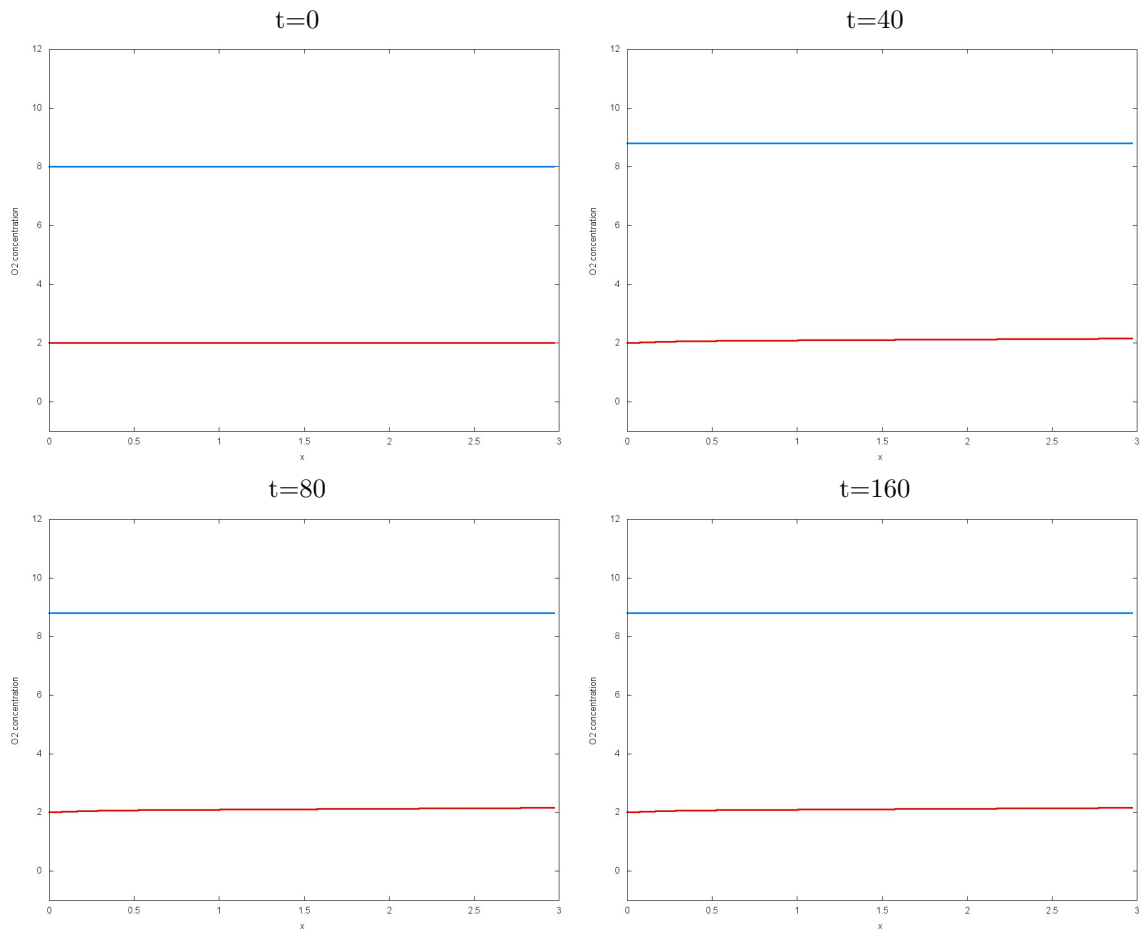


Fig 3.2: 横軸: x , 縦軸:酸素濃度, $d_1 = 0.05$, $L = 3.0$ の数値計算結果. 赤: u , 青: w

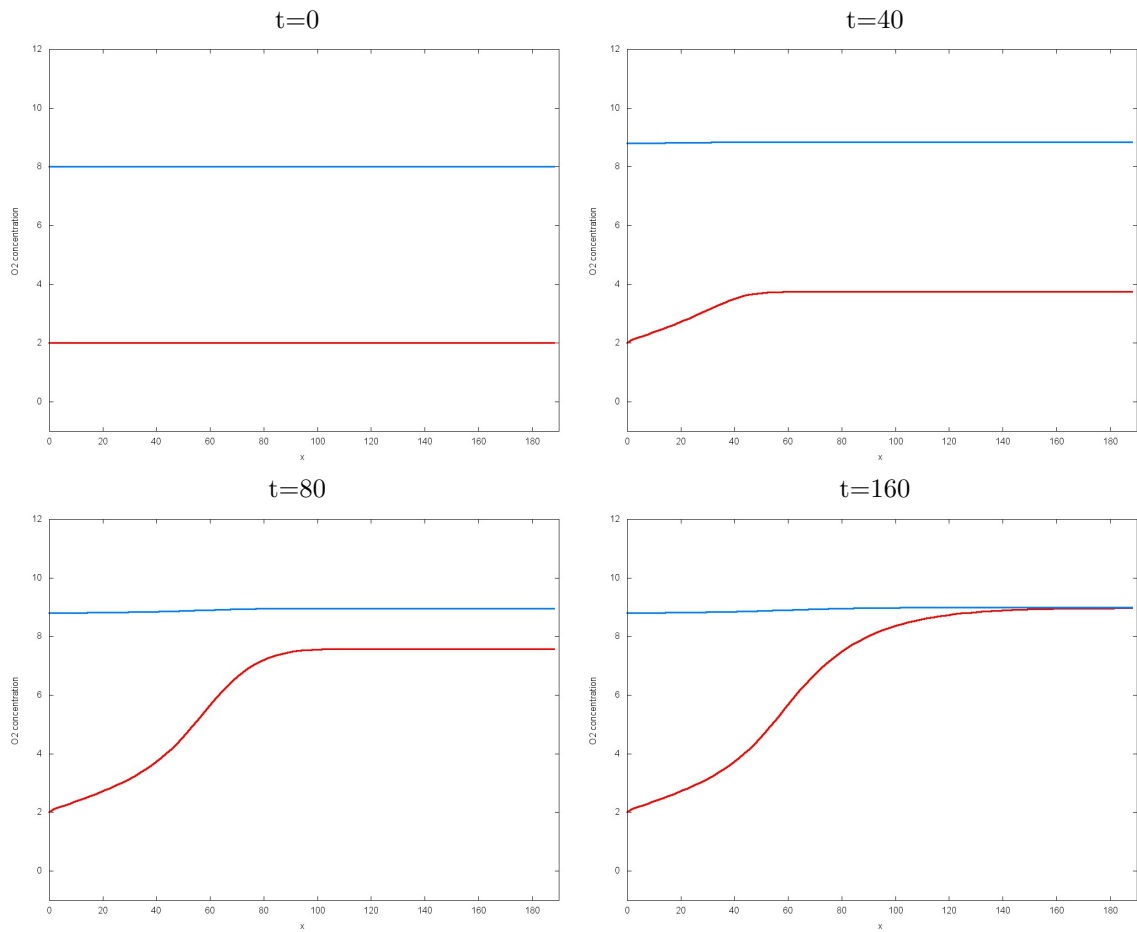


Fig 3.3: 横軸: x , 縦軸:酸素濃度, $d_1 = 0.05$, $L = 190$ の数値計算結果. 赤:u, 青:w

4 解の存在と一意性

まず (2.7), (2.8), (2.9) の解の存在について述べる. この章の結果は文献 [5] を基にしている.

命題 4.1. $n \geq 2$ とする. (2.9) について

$$0 < u_0(x) < \lambda, \quad 0 < v_0(x) < v_e := \frac{mk_1\lambda^n}{k_{-1} + k_1\lambda^n}, \quad 0 < w_0 < \lambda \quad (4.1)$$

を仮定すると (2.7), (2.8), (2.9) の解で

$$\begin{aligned} u(x, t), v(x, t) &\in C^0([0, L] \times [0, \infty)) \cap C^1([0, L] \times [0, \infty)) \setminus \Sigma, \\ w(x, t) &\in C^1([0, L] \times (0, \infty)) \cap C^2((0, L) \times (0, \infty)), \\ 0 < u(x, t) < \lambda, \quad 0 < v(x, t) < v_e, \quad 0 < w(x, t) < \lambda \quad &(\forall (x, t) \in [0, L] \times (0, \infty)) \end{aligned} \quad (4.2)$$

を満たすものが存在する. ただし, $\Sigma := \{(x, t) : 0 \leq x \leq L, x = t\}$ である.

命題 4.1 の証明は以下のようにして行われる. 任意の $T > L$ に対して領域 $[0, L] \times (0, T]$ 上で解の存在を証明すればよい.

まず u, v を特性曲線 $x - t = \xi$ 上の常微分方程式の形に書き直す. このとき方程式の考える範囲を初期条件が影響する領域 $\Omega_1 := \{(x, t) : 0 < x < L, 0 < t \leq x\}$ と境界条件が影響する領域 $\Omega_2 := \{(x, t) : 0 < x < L, x \leq t < T\}$ に分けて考える. 次に (u, v) と w に方程式を分けて考える. (u, v) の方程式の右辺にある w を条件を満たす任意の関数 $\tilde{w}$ に置き換える. この $\tilde{w}$ に対して解 $(\tilde{u}, \tilde{v})$ を構成する (命題 7.1). このとき解 $(\tilde{u}, \tilde{v})$ は Ω_1 と Ω_2 それぞれにおいて C^1 級であることがいえるが (2.10) では微分可能性が一般的には成り立たない. そこで各領域での一階偏導関数が一様に評価できることを示す (補題 7.2).

次に w の方程式の右辺にある u を命題 7.1 で得られた解 $(\tilde{u}, \tilde{v})$ の $\tilde{u}$ に置き換え, その方程式が条件を満たす解 $\tilde{w}_1$ を持つことを示す (命題 7.2).

こうして $\tilde{w}$ から $(\tilde{u}, \tilde{v})$ が決まり, $(\tilde{u}, \tilde{v})$ から $\tilde{w}_1$ が決まる. 方程式の持つ単調性を利用して, この行程を繰り返すと関数列が構成できる. よってその収束先が存在することがわかる. 収束した関数が求める解になっていることはその収束が一様収束であることからいえる. 以上の議論の詳細については 7 章で述べる.

次に命題 4.1 で得られる解の初期値に関する一意性について示す.

命題 4.2. 命題 4.1 の解 $u(x, t), v(x, t), w(x, t)$ は初期値に関して一意に存在する

証明 同じ初期値に対して 2 つの解が存在したとして, それらが恒等的に等しいことを証明する.

(2.7) の 2 つの解を

$$(u_j(x, t), v_j(x, t), w_j(x, t)) \quad (j = 1, 2)$$

とする.

$$\Gamma = u_1 - u_2, \quad \Lambda = v_1 - v_2, \quad \Phi = w_1 - w_2$$

と置くと (Γ, Λ, Φ) の満たす方程式は

$$\begin{cases} \Gamma_t + \Gamma_x = -4\tilde{a}(x, t) \Gamma + 4\tilde{b}(x, t) \Lambda + d_1 (\Phi - \Gamma), \\ \Lambda_t + \Lambda_x = \tilde{a}(x, t) \Gamma - \tilde{b}(x, t) \Lambda, \\ \Phi_t - d_w \Phi_{xx} = d_2 \Lambda - (\alpha + d_2) \Phi \end{cases} \quad (4.3)$$

となる. ただし

$$\begin{aligned} \tilde{a}(x, t) &:= - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial u} f(u_2 + s\Gamma, v_2 + s\Lambda) ds, \\ \tilde{b}(x, t) &:= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial v} f(u_2 + s\Gamma, v_2 + s\Lambda) ds \end{aligned}$$

である. 境界条件は

$$\Gamma(0, t) = 0, \quad \Lambda(0, t) = 0, \quad \Phi_x(0, t) = \Phi_x(L, t) = 0 \quad (t > 0)$$

で, 初期条件は

$$\Gamma(x, 0) = 0, \quad \Lambda(x, 0) = 0, \quad \Phi(x, 0) = 0 \quad (0 \leq x \leq L) \quad (4.4)$$

である. (4.3) の第 1 式に Γ をかけて変形すると

$$\begin{aligned} \Gamma(\Gamma_t + \Gamma_x) &= -4\tilde{a}(x, t) \Gamma^2 + 4\tilde{b}(x, t) \Gamma \Lambda + d_1 (\Phi - \Gamma) \Gamma \\ &\leq 4\tilde{b}(x, t) \Gamma \Lambda + d_1 \Gamma \Phi \end{aligned}$$

となる.

$$\frac{\partial f}{\partial u} = -nk_1(m - v)u^{n-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = k_1u^n + k_{-1}$$

だから

$$0 < u(x, t) < \lambda, \quad 0 < v(x, t) < v_e = \frac{mk_1\lambda^n}{k_{-1} + k_1\lambda^n}$$

より

$$0 < \tilde{a}(x, t) \leq nk_3m\lambda^{n-1}, \quad k_{-1} < \tilde{b}(x, t) \leq k_{-1} + k_1\lambda^n$$

という評価が得られる. よって

$$\Gamma(\Gamma_t + \Gamma_x) \leq 4(k_{-1} + k_1\lambda^n) \Gamma \Lambda + d_1 \Gamma \Phi$$

となる. ここでヤングの不等式を用いると

$$\begin{aligned}\Gamma(\Gamma_t + \Gamma_x) &\leq 4(k_{-1} + k_1\lambda^n)(\Gamma^2 + \Lambda^2) + \frac{d_1}{2}(\Gamma^2 + \Phi^2) \\ &= \left(2(k_{-1} + k_1\lambda^n) + \frac{d_1}{2}\right)\Gamma^2 + 2(k_{-1} + k_1\lambda^n)\Lambda^2 + \frac{d_1}{2}\Phi^2\end{aligned}\quad (4.5)$$

を得る. 第2, 第3式から同様に

$$\begin{aligned}\Lambda\Lambda_t + \Lambda\Lambda_x &= \tilde{a}(x, t)\Gamma\Lambda - \tilde{b}(x, t)\Lambda^2 \\ &\leq \tilde{a}(x, t)\Gamma\Lambda \\ &\leq \frac{1}{2}nk_1m\lambda^{n-1}(\Gamma^2 + \Lambda^2)\end{aligned}\quad (4.6)$$

と

$$\begin{aligned}\Phi\Phi_t - d_w\Phi\Phi_{xx} &= d_2\Lambda\Phi - (\alpha + d_2)\Phi^2 \\ &\leq \frac{d_2}{2}(\Lambda^2 + \Phi^2)\end{aligned}\quad (4.7)$$

を得る. (4.5), (4.6), (4.7) を足し合わせると

$$\frac{1}{2}(\Gamma^2 + \Lambda^2 + \Phi^2)_t + \frac{1}{2}(\Gamma^2 + \Lambda^2)_x - d_w\Phi\Phi_{xx} \leq M(\Gamma^2 + \Lambda^2 + \Phi^2)\quad (4.8)$$

となる. ただし

$$M := \max \left\{ \left(2(k_{-1} + k_1\lambda^n) + \frac{d_1}{2} + \frac{1}{2}nk_1m\lambda^{n-1} + \frac{d_2}{2} \right), \right. \\ \left. \left(2(k_{-1} + k_1\lambda^n) + \frac{1}{2}nk_1m\lambda^{n-1} \right), \frac{1}{2}(d_1 + d_2) \right\}$$

である. (4.8) の両辺を区間 $[0, L]$ で積分し

$$\begin{aligned}\int_0^L (\Gamma^2 + \Lambda^2)_x dx &= 0 \\ \int_0^L \Phi\Phi_{xx} dx &= - \int_0^L \Phi_x^2 dx \leq 0\end{aligned}$$

を使うと

$$\frac{d}{dt}(\|\Gamma\|^2 + \|\Lambda\|^2 + \|\Phi\|^2) \leq 2M(\|\Gamma\|^2 + \|\Lambda\|^2 + \|\Phi\|^2)$$

となる. よって

$$\|\Gamma(\cdot, t)\|^2 + \|\Lambda(\cdot, t)\|^2 + \|\Phi(\cdot, t)\|^2 \leq (\|\Gamma(\cdot, 0)\|^2 + \|\Lambda(\cdot, 0)\|^2 + \|\Phi(\cdot, 0)\|^2) e^{2Mt}$$

を得る. ただし $\|\cdot\|$ は区間 $(0, L)$ における L^2 ノルムである. (4.4) より $t > 0$ に対して $\Gamma(\cdot, t)$, $\Lambda(\cdot, t)$, $\Phi(\cdot, t)$ は恒等的に 0 になることがわかる. したがって

$$u_1 = u_2, \quad v_1 = v_2, \quad w_1 = w_2$$

より解の一意性が証明された. □

5 定常解の存在

この章では (2.7) の定常問題

$$\begin{cases} u_x = -4k_1 u^n (m - v) + 4k_{-1} v + d_1 (w - u) \\ v_x = k_1 u^n (m - v) - k_{-1} v \\ d_w w_{xx} + \alpha (\lambda - w) + d_2 (u - w) = 0 \end{cases} \quad (0 < x < L) \quad (5.1)$$

を考える. 境界条件は

$$(u(0), v(0)) = (u_{in}, v_{in}), \quad w_x(0) = w_x(L) = 0 \quad (5.2)$$

である. (5.1) は独立変数 x の常微分方程式で (u, v) については $x = 0$ での初期値, w については境界値を与えた問題になっている.

命題 5.1. (5.1) と (5.2) の解 $(\bar{u}(x), \bar{v}(x), \bar{w}(x))$ で

$$0 < \bar{u}(x) < \lambda, \quad 0 < \bar{v}(x) < v_e, \quad 0 < \bar{w}(x) < \lambda \quad (0 \leq x \leq L)$$

を満たすものが存在する.

証明 まずはじめに

$$\begin{aligned} F(u, v, w) &= -4k_1 u^n (m - v) + 4k_{-1} v + d_1 (w - u), \\ G(u, v, w) &= k_1 u^n (m - v) - k_{-1} v \end{aligned}$$

とおく. (5.1) において $w(x) \equiv 0$ とおいた問題

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dx} = F(u_1, v_1, 0) = -4k_1 u_1^n (m - v_1) + 4k_{-1} v_1 - d_1 u_1, \\ \frac{dv_1}{dx} = G(u_1, v_1) = k_1 u_1^n (m - v_1) - k_{-1} v_1 \end{cases} \quad (5.3)$$

を考える. ただし $(u_1(0), v_1(0)) = (u_{in}, v_{in})$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial v}(u_1, v_1, 0) &= 4k_3 u_1^n + 4k_{-1} \geq 0, \quad (u_1 \geq 0) \\ \frac{\partial G}{\partial u}(u_1, v_1) &= nk_3 (m - v_1) u^{n-1} \geq 0 \quad (u_1 \geq 0, \quad 0 \leq v_1 \leq m) \end{aligned}$$

より (5.3) は (u_1, v_1) の協調系と呼ばれる連立方程式系になっている. ここで $(\underline{u}_1, \underline{v}_1) = (0, 0)$ と置くと

$$\begin{aligned} -\frac{d\underline{u}_1}{dx} + F(\underline{u}_1, \underline{v}_1, 0) &= 0, \\ -\frac{d\underline{v}_1}{dx} + G(\underline{u}_1, \underline{v}_1) &= 0 \end{aligned}$$

より $u_1(0) > 0, v_1(0) > 0$ なら

$$u(x) > 0, v(x) > 0$$

となる. さらに $(\bar{u}_1, \bar{v}_1) = (\lambda, v_e)$ ($v_e < m$) とおくと

$$\begin{aligned} -\frac{d\bar{u}_1}{dx} + F(\bar{u}_1, \bar{v}_1, 0) &< 0, \\ -\frac{d\bar{v}_1}{dx} + G(\bar{u}_1, \bar{v}_1) &< 0 \end{aligned}$$

より $u_1(0) < \lambda, v_1(0) < v_e$ なら

$$u_1(x) < \lambda, v_1(x) < v_e$$

となる事がわかる. まとめると

$$0 < u_1(x) < \lambda, 0 < v_1(x) < v_e$$

がいえる.

次に $0 < u_1(x) < \lambda$ のとき (5.1) の第3式で $u = u_1(x)$ と与えた問題を考える. まず

$$d_w w_{xx} + \alpha(\lambda - w) + d_2(u_1 - w) = 0$$

の解 $w_1(x)$ で

$$0 < w_1(x) < \lambda$$

を満たすものが存在することを示す. 変形すると

$$u_1(x) + \frac{\alpha\lambda}{d_2} = \left(-\frac{d_w}{d_2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\alpha + d_2}{d_2} \right) w_1(x) \quad (5.4)$$

と書ける. ここでグリーン関数を導入する. 任意に $[0, L]$ 上の連続関数 $h(x)$ を与えた時

$$\begin{cases} \left(-\frac{d_w}{d_2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\alpha + d_2}{d_2} \right) w(x) = h(x) \\ w_x(0) = w_x(L) = 0 \end{cases} \quad (5.5)$$

を満たす解 $w(x)$ はある関数 $H(x, y)$ を用いて

$$w(x) = \int_0^L H(x, y) h(y) dy$$

と表される. この $H(x, y)$ は (5.5) の問題に対するグリーン関数と呼ばれる. こうして与えられた $u_1(x)$ に対して (5.4) を満たす $w_1(x)$ は一意に存在して

$$w_1(x) = \int_0^L H(x, t) \left(u_1(y) + \frac{\alpha\lambda}{d_2} \right) dy$$

と表される. $u_1(x) > 0$ なら $w_1(x) > 0$ である. 次に $w_1(x) < \lambda$ を示す. $\max_{0 \leq x \leq L} w_1(x) = w_1(x_m)$ とすると $(w_1)_{xx}(x_m) \leq 0$ より (5.4) は

$$\frac{\alpha + d_2}{d_2} w_1(x_m) = u_1(x_m) + \frac{d_w}{d_2} (w_1)_{xx}(x_m) + \frac{\alpha\lambda}{d_2} \leq u_1(x_m) + \frac{\alpha\lambda}{d_2}$$

よって

$$\begin{aligned} w_1(x_m) &\leq \frac{d_2}{\alpha + d_2} u_1(x_m) + \frac{\alpha\lambda}{\alpha + d_2} \\ &< \frac{d_2\lambda}{\alpha + d_2} + \frac{\alpha\lambda}{\alpha + d_2} = \lambda \end{aligned}$$

となるので $w_1(x) < \lambda$ が得られる. 次に与えられた $0 < w_1 < \lambda$ に対して

$$\begin{cases} \frac{du_2}{dx} = F(u_2, v_2, w_1), \\ \frac{dv_2}{dx} = G(u_2, v_2), \\ (u_2(0), v_2(0)) = (u_{in}, v_{in}) \end{cases}$$

の解 $(u_2(x), v_2(x))$ を考える. ここで $(\underline{u}_2, \underline{v}_2) = (u_1, v_1)$ と置くと

$$\begin{aligned} -\frac{d\underline{u}_2}{dx} + F(\underline{u}_2, \underline{v}_2, w_1) &= -F(u_1, v_1, 0) + F(u_1, v_1, w_1), \\ &= dw_1 > 0, \\ -\frac{d\underline{v}_2}{dx} + G(\underline{u}_2, \underline{v}_2) &= 0, \end{aligned}$$

より $u_1(x) \leq u_2(x)$, $v_1(x) \leq v_2(x)$ となる. さらに $(\bar{u}_2, \bar{v}_2) = (\lambda, v_e)$ と置くと

$$\begin{aligned} -\frac{d\bar{u}_2}{dx} + F(\bar{u}_2, \bar{v}_2, w_1) &< 0, \\ -\frac{d\bar{v}_2}{dx} + G(\bar{u}_2, \bar{v}_2) &< 0 \end{aligned}$$

より $u_2(x) < \lambda$, $v_2(x) < v_e$ となる. 以上より

$$u_1(x) \leq u_2(x) < \lambda, \quad v_1(x) \leq v_2(x) < v_e \quad (0 \leq x \leq L)$$

となる事がわかる. 次に $w_2(x)$ は (5.4) において $w_1(x)$ を $w_2(x)$, $u_1(x)$ を $u_2(x)$ に置き換えて得られる問題なので同様の議論で $w_2(x) < \lambda$ を得る. また

$$w_2(x) = \int_0^L H(x, y) \left(u_2(y) + \frac{\alpha \lambda}{d_2} \right) dy$$

より

$$w_2(x) - w_1(x) = \int_0^L H(x, y) (u_2(y) - u_1(y)) dy \geq 0$$

となる. 従って

$$w_1(x) \leq w_2(x) < \lambda \quad (0 \leq x \leq L)$$

が得られる. この作業を繰り返し得られた関数列 $\{u_i(x)\}, \{v_i(x)\}, \{w_i(x)\}$ はそれぞれ単調増加な列になるので各点で関数列は収束し, その極限

$$\lim_{i \rightarrow \infty} u_i(x) = u^*(x), \quad \lim_{i \rightarrow \infty} v_i(x) = v^*(x), \quad \lim_{i \rightarrow \infty} w_i(x) = w^*(x)$$

が存在する. さらに以下のことが成り立つ.

補題 5.1. 関数列 $\{u_i(x)\}, \{v_i(x)\}, \{w_i(x)\}$ はそれぞれ, $u^*(x), v^*(x), w^*(x)$ に一様に収束する. すなわち

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|u_i - u^*\|_{max} = 0, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \|v_i - v^*\|_{max} = 0, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \|w_i - w^*\|_{max} = 0$$

で $u^*(x), v^*(x), w^*(x)$ は連続である. ただし $\|u\|_{max} = \max_{0 \leq x \leq L} |u(x)|$ である.

証明 関数列は一様有界であるので同等連続性を示す.

$$\begin{cases} \frac{du_j}{dx} = F(u_j, v_j, w_{j-1}), \\ \frac{dv_j}{dx} = G(u_j, v_j) \end{cases} \quad (5.6)$$

とすると

$$\begin{cases} \left| \frac{du_i}{dx}(x) \right| = |F(u_i, v_i, w_{i-1})| \leq C_1, \\ \left| \frac{dv_i}{dx}(x) \right| = |G(u_i, v_i)| \leq C_2 \end{cases}$$

を満たす C_1, C_2 が存在する. ここで C_1, C_2 は列に依存しない定数である. なぜなら (5.6) の右辺で u_i, v_i, w_{i-1} は一様に有界な範囲にあるからである. これにより u, v についての同等連続性が言える. 次に w_i については (5.5) の問題で

$$\frac{dw_i}{dx}(x) = \int_0^L H_D(x, y) \frac{du_i}{dx}(y) dy$$

より $|dw_i(x)/dx|$ は列に関して一様に有界である. ただし, $H_D(x, y)$ は (5.5) で境界条件を 0 とおいたディリクレ問題のグリーン関数である. こうして $\{w_i(x)\}$ の同等連続性が示される. Ascoli-rzela の定理は文献 [6] より $\{u_i(x)\}, \{v_i(x)\}, \{w_i(x)\}$ の部分列が存在して, それぞれ連続関数に $\tilde{u}^*(x), \tilde{v}^*(x), \tilde{w}^*(x)$ に一様収束する. さらに $\{u_i(x)\}, \{v_i(x)\}, \{w_i(x)\}$ は単調列であることから, この列について $\tilde{u}^*(x), \tilde{v}^*(x), \tilde{w}^*(x)$ に一様に収束することがいえ, $\tilde{u}^*(x), \tilde{v}^*(x), \tilde{w}^*(x)$ は $u^*(x), v^*(x), w^*(x)$ に一致する. こうして補題が成立する. $\square$

命題 5.1 の証明を完成させる. 関数列 $\{u_i\}, \{v_i\}, \{w_i\}$ は積分方程式

$$\begin{cases} u_{i+1}(x) = u_{in} + \int_0^x F(u_i(y), v_i(y), w_{i-1}(y)) dy, \\ v_{i+1}(x) = v_{in} + \int_0^x G(u_i(y), v_i(y)) dx, \\ w_i(x) = \int_0^L G(x, y) \left(u_i(y) + \frac{\alpha\lambda}{d_2} \right) dy \end{cases}$$

を満たす. よって補題 5.1 より $i \rightarrow \infty$ にすると u^*, v^*, w^* は積分方程式

$$\begin{cases} u^*(x) = u_{in} + \int_0^x F(u^*(y), v^*(y), w^*(y)) dx, \\ v^*(x) = v_{in} + \int_0^x G(u^*(y), v^*(y)) dx, \\ w^*(x) = \int_0^L G(x, y) \left(u^*(y) + \frac{\alpha\lambda}{d_2} \right) dy \end{cases}$$

を満たす. よって, このことから u^*, v^*, w^* は求める方程式の解である. こうして命題 5.1 が証明された. 上記で証明した関数列の単調性は文献 [5] では明確に述べられていないのでここでは詳しい証明を与えている.

6 解の漸近安定性

定常解の漸近安定性について以下のような定理が成り立つ.

定理 6.1. 命題 4.1 と同様の条件を仮定して, $(\mathbf{u}(\cdot, t), w(\cdot, t)) = (u(x, t), v(x, t), w(x, t))$ を (2.7), (2.8), (2.9) の解とする. 定常解を $(\bar{\mathbf{u}}(x), \bar{w}(x)) := (\bar{u}(x), \bar{v}(x), \bar{w}(x))$ について以下の漸近安定性が成り立つ. $d_1^* > 0$ が存在し, 各 $d_1 > d_1^*$ に対して正の定数 μ, C が存在して

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t) - \bar{\mathbf{u}}\|_{L^2} + \|w(\cdot, t) - \bar{w}\|_{L^2} \leq C \exp(-\mu t) \{\|\mathbf{u}(\cdot, t) - \bar{\mathbf{u}}\|_{L^2} + \|w(\cdot, t) - \bar{w}\|_{L^2}\} \quad (t \geq 0)$$

を満たす. ここで μ, C は (4.1) を満たす初期条件には依存しない.

以下ではこの定理を証明する.

(2.7) に変数変換

$$u = \bar{u} + p, \quad v = \bar{v} + q, \quad w = \bar{w} + \xi$$

を施すと p, q, ξ を満たす方程式は

$$\begin{cases} p_t + p_x = 4(f(\bar{u} + p, \bar{v} + q) - f(\bar{u}, \bar{v})) + d_1(\xi - p), \\ q_t + q_x = -(f(\bar{u} + p, \bar{v} + q) - f(\bar{u}, \bar{v})), \\ \xi_t = d_w \xi_{xx} - \alpha \xi + d_2(p - \xi) \end{cases} \quad (6.1)$$

となる. 境界条件は

$$p(0, t) = 0, \quad q(0, t) = 0, \quad \xi_x(0, t) = \xi_x(L, t) = 0 \quad (t > 0)$$

となり, 初期条件は

$$\begin{aligned} p(x, 0) &= p_0(x) := u_0(x) - \bar{u}, \\ q(x, 0) &= q_0(x) := v_0(x) - \bar{v}, \\ \xi(x, 0) &= \xi_0(x) := w_0(x) - \bar{w} \end{aligned}$$

と置く. 次に

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{d}{ds} f(\bar{u} + sp, \bar{v} + sq) ds &= p \int_0^1 \frac{\partial}{\partial p} f(\bar{u} + sp, \bar{v} + sq) ds \\ &\quad + q \int_0^1 \frac{\partial}{\partial q} f(\bar{u} + sp, \bar{v} + sq) ds \end{aligned}$$

により (6.1) は

$$\begin{cases} p_t + p_x = -4a(x, p, q)p + 4b(x, p, q)q + d_1(\xi - p) \\ q_t + q_x = a(x, p, q)p - b(x, p, q)q \\ \xi_t = d_w \xi_{xx} - \alpha \xi + d_2(p - \xi) \end{cases} \quad (6.2)$$

と表される. ただし

$$\begin{aligned} a(x, p, q) &:= - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial p} f(\bar{u} + sp, \bar{v} + sq) ds, \\ b(x, p, q) &:= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial q} f(\bar{u} + sp, \bar{v} + sq) ds. \end{aligned}$$

さらに簡略化のため以下では $a(x, p, q)$, $b(x, p, q)$ は $a(\cdot)$, $b(\cdot)$ と表す. 変数変換

$$\phi = p + 4q, \quad \psi = p - \frac{4}{r}q \quad (6.3)$$

により (6.2) を

$$\begin{cases} \phi_t + \phi_x = -\frac{d_1}{1+r}(\phi + r\psi) + d_1\xi, \\ \psi_t + \psi_x = -(4a(\cdot) + b(\cdot))\psi + \left(b(\cdot) - \frac{4}{r}a(\cdot)\right)\phi - \frac{d_1}{1+r}(\phi + r\psi) + d_1\xi, \\ \xi_t - d_w\xi_{xx} = -(\alpha + d_2)\xi + \frac{d_2}{1+r}(\phi + r\psi), \end{cases} \quad (6.4)$$

と書き直す. 境界条件は

$$\phi(0, t) = 0, \quad \psi(0, t) = 0 \quad (t > 0)$$

で, 初期条件は

$$\begin{aligned} \phi(x, 0) &= \phi_0(x) := p_0(x) + 4q_0(x) \\ \psi(x, 0) &= \psi_0(x) := q_0(x) - \frac{4}{r}q_0(x) \end{aligned}$$

である. ただし, r は正の定数とし, 最後に決める. (6.4) の第二式に $r\psi$ をかけると

$$\begin{aligned} r(\psi_t + \psi_x)\psi &= -r(4a(\cdot) + b(\cdot))\psi^2 + r\left(b(\cdot) - \frac{4}{r}a(\cdot)\right)\phi\psi - \frac{d_1r}{1+r}(\phi + r\psi)\psi + d_1r\psi\xi \\ &= -r(1+r)b(\cdot)\psi^2 + r\left(b(\cdot) - \frac{4}{r}a(\cdot)\right)(\phi + r\psi)\psi - \frac{d_1r}{1+r}(\phi + r\psi)\psi + d_1r\psi\xi \end{aligned}$$

となる. ここでヤングの不等式を用いると

$$\begin{aligned} r(\psi_t + \psi_x)\psi &= -r(4a(\cdot) + b(\cdot))\psi^2 + r\left(b(\cdot) - \frac{4}{r}a(\cdot)\right)\phi\psi - \frac{d_1r}{1+r}(\phi + r\psi)\psi + d_1r\psi\xi \\ &\leq -r(1+r)b(\cdot)\psi^2 + r\left|b(\cdot) - \frac{4}{r}a(\cdot)\right|\left(\frac{(\phi + r\psi)^2}{2\eta} + \frac{\eta}{2}\psi^2\right) \\ &\quad - \frac{d_1r}{1+r}(\phi + r\psi)\psi + d_1r\psi\xi \end{aligned} \quad (6.5)$$

を得る. ただし η は後で適当に調節してとる. 同様に第 1 式, 第 3 式も同様に

$$\phi(\phi_t + \phi_x) = -\frac{d_1}{1+r}(\phi + r\psi)\phi + d_1\phi\xi, \quad (6.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{d_1}{d_2}(1+r)(\xi_t - d_w\xi_{xx})\xi &= -\frac{d_1}{d_2}(\alpha + d_2)(1+r)\xi^2 + d_1(\phi + r\psi)\xi \\ &= -d_1\left(\frac{\alpha}{2d_2} + 1\right)(1+r)\xi^2 \\ &\quad - d_1\left(\frac{\alpha}{2d_2}\right)(1+r)\xi^2 + d_1(\phi + r\psi)\xi. \end{aligned} \quad (6.7)$$

(6.5), (6.6), (6.7) を足しあわせると

$$\begin{aligned} &\phi(\phi_t + \phi_x) + r(\psi_t + \psi_x)\psi + \frac{d_1}{d_2}(1+r)\xi(\xi_t - d_w\xi_{xx}) \\ &\leq -\frac{d_1}{1+r}(\phi + r\psi)^2 + 2d_1\xi(\phi + r\psi) + \frac{r}{2\eta}\left|b(\cdot) - \frac{4}{r}a(\cdot)\right|(\phi + \psi)^2 \\ &\quad - r\left\{(1+r)b(\cdot) - \frac{\eta}{2}\left|b(\cdot) - \frac{4}{r}a(\cdot)\right|\right\}\psi^2 - d_1\left(\frac{\alpha}{2d_2} + 1\right)(1+r)\xi^2 \\ &\quad - d_1\frac{\alpha(1+r)}{2d_2}\xi^2 + d_1(\phi + r\psi)\xi \\ &= -d_1\left\{\frac{N}{1+r}(\phi + r\psi)^2 - 2\xi(\phi + r\psi) + (1+r)\left(\frac{\alpha}{2d_2} + 1\right)\xi^2\right\} \\ &\quad - d_1\left\{\frac{1-N}{1+r}(\phi + r\psi)^2 + (1+r)\left(\frac{\alpha}{2d_2}\right)\xi^2\right\} + \frac{r}{2\eta}\left|b(\cdot) - \frac{4}{r}a(\cdot)\right|(\phi + r\psi)^2 \\ &\quad - r\left\{(1+r)b(\cdot) - \frac{\eta}{2}\left|b(\cdot) - \frac{4}{r}a(\cdot)\right|\right\}\psi^2 \end{aligned} \quad (6.8)$$

となる. ここで

$$N = \frac{2d_2}{2d_2 + \alpha}, \quad \eta = \frac{1+r}{2}$$

と置くと (6.8) は

$$\begin{aligned} &\phi(\phi_t + \phi_x) + r(\psi_t + \psi_x)\psi + \frac{d_1}{d_2}(1+r)\xi(\xi_t - d_w\xi_{xx}) \\ &\leq -\frac{d_1(1+r)}{N}\left\{\frac{N}{1+r}(\phi + r\psi) - \xi\right\}^2 - d_1(1+r)\left(\frac{\alpha}{2d_2}\right)\xi^2 \\ &\quad - \left\{d_1\left(\frac{1-N}{1+r}\right) - \frac{r}{2\eta}\left|b(\cdot) - \frac{4}{r}a(\cdot)\right|\right\}(\phi + r\psi)^2 - r\left\{(1+r)b(\cdot) - \frac{\eta}{2}\left|b(\cdot) - \frac{4}{r}a(\cdot)\right|\right\}\psi^2 \\ &= -\frac{d_1(1+r)}{N}\left\{\frac{N}{1+r}(\phi + r\psi) - \xi\right\}^2 - d_1(1+r)\left(\frac{\alpha}{2d_2}\right)\xi^2 \\ &\quad - \frac{1}{1+r}\left\{d_1(1-N) - r\left|b(\cdot) - \frac{4}{r}a(\cdot)\right|\right\}(\phi + r\psi)^2 - (1+r)\left\{b(\cdot) - \frac{1}{4}\left|b(\cdot) - \frac{4}{r}a(\cdot)\right|\right\}\psi^2 \end{aligned}$$

となる.

$$k_{-1} \geq \frac{16}{r} k_1 m \lambda^{n-1}$$

を満たす r を取ると

$$0 < a(x, t) < n k_1 m \lambda^{n-1}, \quad k_{-1} < b(x, t) < k_{-1} + k_1 \lambda^n$$

より $b(\cdot) - 4a(\cdot)/r \geq 0$ となり,

$$b(\cdot) - \frac{1}{4} \left| b(\cdot) - \frac{4}{r} a(\cdot) \right| = \frac{1}{4} \left(3b(\cdot) + \frac{4}{r} a(\cdot) \right) \geq \frac{3}{4} k_{-1}$$

を得る. これを用いると

$$\begin{aligned} & \phi(\phi_t + \phi_x) + r(\psi_t + \psi_x)\psi + \frac{d_1}{d_2}(1+r)\xi(\xi_t - d_w \xi_{xx}) \\ & \leq -\frac{d_1(1+r)}{N} \left\{ \frac{N}{1+r}(\phi + r\psi) - \xi \right\}^2 - d_1(1+r) \left(\frac{\alpha}{2d_2} \right) \xi^2 \\ & \quad - \frac{1}{1+r} \{d_1(1-N) - rb(\cdot) + 4a(\cdot)\}(\phi + r\psi)^2 - \frac{3r(1+r)}{4} k_{-1} \psi^2 \\ & \leq -d_1(1+r) \left(\frac{\alpha}{2d_2} \right) \xi^2 - \frac{1}{1+r} \{d_1(1-N) - rb(\cdot) + 4a(\cdot)\}(\phi + r\psi)^2 - \frac{3r(1+r)}{4} k_{-1} \psi^2 \end{aligned}$$

が得られる. 次の恒等式

$$\begin{aligned} (\phi + r\psi)^2 &= \varepsilon \phi^2 + (1-\varepsilon)\phi^2 + 2r\phi\psi + \frac{r^2}{1-\varepsilon}\psi^2 - \frac{r^2\varepsilon}{1-\varepsilon}\psi^2 \\ &= \varepsilon \phi + (1-\varepsilon) \left(\phi + \frac{r}{1-\varepsilon}\psi \right)^2 - \frac{r^2\varepsilon}{1-\varepsilon}\phi^2 \end{aligned}$$

を利用する. ただし $\varepsilon \in (0, 1)$ である. これを使うと

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[\phi^2 + r\psi^2 + \frac{d_1}{d_2}(1+r)\xi^2 \right]_t + \frac{1}{2} [\phi^2 + r\psi^2]_x - \frac{d_1}{d_2} d_w (1+r) \xi \xi_{xx} \\ & \leq -d_1(1+r) \left(\frac{\alpha}{2d_2} \right) \xi^2 - \frac{3r(1+r)}{4} k_{-1} \psi^2 \\ & \quad - \frac{1}{1+r} \{d_1(1-N) - rb(\cdot) + 4a(\cdot)\} \left\{ \varepsilon \phi^2 + (1-\varepsilon) \left(\phi + \frac{r}{1-\varepsilon}\psi \right)^2 - \frac{r^2\varepsilon}{1-\varepsilon}\psi^2 \right\} \\ & \leq -d_1(1+r) \left(\frac{\alpha}{2d_2} \right) \xi^2 - \frac{\varepsilon}{1+r} \{d_1(1-N) - rb(\cdot) + 4a(\cdot)\} \phi^2 \\ & \quad - \left[\frac{3r(1+r)}{4} k_1 - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \frac{r^2}{1+r} \{d_1(1-N) - rb(\cdot) + 4a(\cdot)\} \right] \psi^2 \end{aligned}$$

となる. ここで $d_1^* > r(k_{-1} + k_1\lambda^n)/(1 - N)$ と取ると $d_1 > d_1^*$ に対して

$$d_1(1 - N) - rb(\cdot) + 4a(\cdot) \geq d_1(1 - N) - r(k_{-1} + k_1\lambda^n)$$

を満たす. よって

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[\phi^2 + r\psi^2 + \frac{d_1}{d_2} (1 + r) \xi^2 \right]_t + \frac{1}{2} [\phi^2 + r\psi^2]_x - \frac{d_1}{d_2} d_w (1 + r) \xi \xi_{xx} \\ \leq -\mu \left(\phi^2 + r\psi^2 + \frac{d_1}{d_2} \leq 1 + r\xi^2 \right). \end{aligned} \quad (6.9)$$

そこで

$$\begin{aligned} \mu := \min \left\{ \frac{\varepsilon}{1 + r} \{d_1(1 - N) - rb(\cdot) + 4a(\cdot)\}, \right. \\ \left. \frac{3(1 + r)}{4} k_{-1} - \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \frac{r}{1 + r} \{d_1(1 - N) - rb(\cdot) + 4a(\cdot)\}, \frac{\alpha}{2} \right\} \end{aligned}$$

において, 不等式 (6.9) の両辺を区間 $[0, L]$ で積分すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\|\phi\|^2 + r\|\psi\|^2 + \frac{d_1}{d_2} (1 + r) \|\xi\|^2 \right] \\ \leq \mu \left[\|\phi\|^2 + r\|\psi\|^2 + \frac{d_1}{d_2} (1 + r) \|\xi\|^2 \right] \\ + \int_0^1 \frac{d_1}{d_2} d_w (1 + r) \xi \xi_{xx} dx - \frac{1}{2} (\phi(0, L))^2 - \frac{r}{2} (\psi(0, L))^2 \\ \leq -\mu \left[\|\phi\|^2 + r\|\psi\|^2 + \frac{d_1}{d_2} (1 + r) \|\xi\|^2 \right] - \frac{d_1}{d_2} d_w (1 + r) \|\xi_x\|^2 \\ \leq -\mu \left[\|\phi\|^2 + r\|\psi\|^2 + \frac{d_1}{d_2} (1 + r) \|\xi\|^2 \right]. \end{aligned} \quad (6.10)$$

を得る. よって

$$\|\phi\|^2 + r\|\psi\|^2 + D\|\xi\|^2 \leq e^{-2\mu t} (\|\phi_0\|^2 + r\|\psi_0\|^2 + D\|\xi_0\|^2) \quad (6.11)$$

となる. ただし

$$D = \frac{d_1}{d_2} (1 + r)$$

とおいた. (6.3) を用いて (6.11) を変換すると

$$\begin{aligned} (1 + r) \|p(\cdot, t)\|^2 + 16 \left(1 + \frac{1}{r} \right) \|q(\cdot, t)\|^2 + D \|\xi(\cdot, t)\|^2 \\ \leq e^{-2\mu t} \left\{ (1 + r) \|p_0\|^2 + 16 \left(1 + \frac{1}{r} \right) \|q_0\|^2 + D \|\xi_0\|^2 \right\}. \end{aligned}$$

が得られる. この不等式より **定理 6.1** の結論が導かれる.

7 解の存在の証明

この章では命題 4.1 について証明を行う．まず

$$f(u, v) = -k_1(m - v)u^n + k_{-1}v$$

と置き,

$$0 < u_0(x) < \lambda, \quad 0 < v_0(x) < v_e := \frac{k_1 m \lambda^n}{k_{-1} + k_1 \lambda^n}, \quad 0 < w_0(x) < \lambda$$

を仮定する．初期条件 (2.9), 境界条件 (2.8) で方程式

$$\begin{cases} u_t + u_x = -4f(u, v) + d_1(w - u), \\ v_t + v_x = f(u, v), \\ w_t = d_w w_{xx} + \alpha(\lambda - w) + d_2(u - w) \end{cases}$$

について考える．まず領域を

$$\Omega_T := \{(x, t); 0 < x < L, 0 < t < T\}, \quad \overline{\Omega_T} := \{(x, t); 0 \leq x \leq L, 0 \leq t \leq T\}$$

とし

$$\begin{aligned} \tilde{w} &\in C^0(\overline{\Omega_T}), \quad 0 < \tilde{w}(x, t) < \lambda \quad ((x, t) \in \overline{\Omega_T}), \\ \tilde{w}_t &\in C^0(\overline{\Omega_T}), \quad \tilde{w}_x \in C^0([0, L] \times (0, T]), \\ \lim_{t \rightarrow +0} \int_0^t \sup_{0 \leq x \leq L} |\tilde{w}_x(x, s)| ds &= 0 \end{aligned} \tag{7.1}$$

とする．(7.1) を満たす w について

$$\int_0^t \sup_{0 \leq x \leq L} |\tilde{w}_x(x, s)| ds \leq M_T \tag{7.2}$$

を満たすような M_T が存在する． $\bar{w}$ を (u, v) の方程式の右辺に代入した問題

$$\begin{cases} u_t + u_x = 4f(u, v) + d_1(\bar{w}(x, t) - u), \\ v_t + v_x = -f(x, t) \end{cases} \quad 0 < x < L, 0 < t \leq T \tag{7.3}$$

について考える．ただし, 境界条件は (2.8) で, 初期条件は (2.9) である．次に (7.3) を

$$\Omega_1 := \{(x, t) : 0 < x < L, 0 < t \leq x\}, \tag{7.4}$$

$$\Omega_2 := \{(x, t) : 0 < x < L, x \leq t < T\} \tag{7.5}$$

で考える． $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \{(x, t) : x = t, 0 < x < L\}$ に注意しておく．ここで変数変換

$$(x, t) = (t + \xi, t)$$

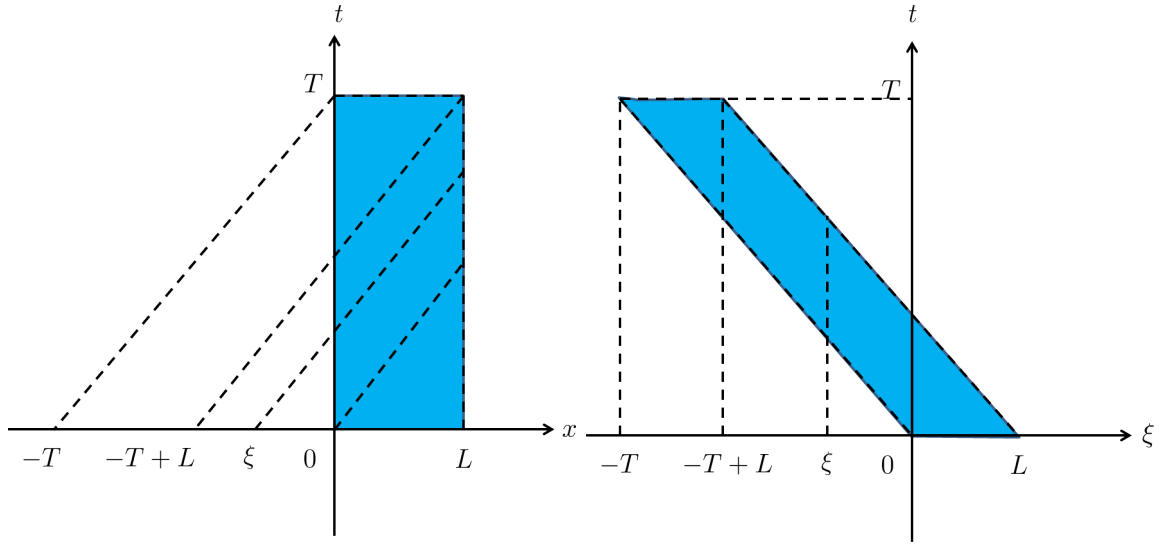


Fig 7.1: 元の領域 (左) と変数変換により変更された領域 (右)

により (7.4), (7.5) をそれぞれ

$$\Omega_{1\xi} := \{(\xi, t) : 0 \leq \xi < L, 0 < t < L - \xi\} \quad (7.6)$$

$$\Omega_{2\xi} := \{(\xi, t) : -T < \xi \leq 0, -\xi < t < \min(T, L - \xi)\} \quad (7.7)$$

と変形する (Fig 7.1). ただし $\Omega_{1\xi} \cap \Omega_{2\xi} = \{(\xi, t) : \xi = 0, 0 < t < T\}$ である.

この領域のもとで (7.3) の積分方程式

$$\begin{cases} U(t) = u_0(\xi) + \int_0^t \{4f(U(s), V(s)) - d_1 U(s)\} ds + d_1 \int_0^t \tilde{w}(s + \xi, s) ds, \\ V(t) = v_0(\xi) - \int_0^t f(U(s), V(s)) ds, \end{cases} \quad (\xi, t) \in \overline{\Omega}_{1\xi}, \quad (7.8)$$

$$\begin{cases} U(t) = u_{in} + \int_{-\xi}^t \{4f(U(s), V(s)) - d_1 U(s)\} ds + d_1 \int_{-\xi}^t \tilde{w}(s + \xi, s) ds, \\ V(t) = v_{in} - \int_{-\xi}^t f(U(s), V(s)) ds, \end{cases} \quad (\xi, t) \in \overline{\Omega}_{2\xi}, \quad (7.9)$$

について考える. (7.8), (7.9) を満たす解をそれぞれ (U_1, V_1) , (U_2, V_2) とすると, これらは

微分方程式

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}U = F(U, V, \tilde{w}(t + \xi, t)) := 4f(U, V) - d_1 U + d_1 \tilde{w}(t + \xi, t), \\ \frac{d}{dt}V = -f(U, V) \end{cases} \quad (7.10)$$

を満たす. 以下では $F(U, V, t; \xi)$ と表す. $t \in (0, L - \xi)$ の場合の初期条件は

$$(U_1(0; \xi), V_1(0; \xi)) = (u_0(\xi), v_0(\xi))$$

で, $t \in (-\xi, \min(T, L - \xi))$ の場合の初期条件は

$$(U_2(-\xi; \xi), V_2(-\xi; \xi)) = (u_{in}, v_{in})$$

である. この初期条件のもとで (7.8), (7.9) について以下の補題が成り立つ.

補題 7.1. 条件 (7.1), $u_0, v_0 \in C^0([0, L])$, $u_0(0) = u_{in}$, $v_0(0) = v_{in}$ を仮定する.

1. $\xi \in [0, L]$ に対して

$$0 < U_1(t; \xi) < \lambda, \quad 0 < V_1(t; \xi) < v_e, \quad t \in [0, L - \xi]$$

を満たす (7.8) の解 $(U, V) = (U_1(t; \xi), V_1(t; \xi))$ が存在する. ただし

$$(U_1(0; L), V_1(0; L)) = (u_0(L), v_0(L)) \quad (\xi = L)$$

である.

2. $\xi \in [-T, 0]$ に対して

$$0 < U_2(t; \xi) < \lambda, \quad 0 < V_2(t; \xi) < v_e, \quad t \in [-\xi, \min(T, L - \xi)]$$

を満たす (7.9) の解 $(U, V) = (U_2(t; \xi), V_2(t; \xi))$ が存在する. ただし

$$(U_1(T; -T), V_1(T; -T)) = (u_{in}, v_{in}) \quad (\xi = -T)$$

である.

証明

$$\frac{\partial F(U, V, t; \xi)}{\partial V} = 4(k_{-1} + k_1 U^n), \quad -\frac{\partial f(U, V)}{\partial U} = nk_1(m - V)U^{n-1}$$

および, $0 \leq V \leq m$, $0 \leq U \leq \lambda$ の範囲では (7.10) は協調形であることがわかる. よって

$$F(0, 0, t; \xi) = d_1 \tilde{w}(t + \xi, t) > 0, \quad -f(0, 0) = 0,$$

および

$$F(\lambda, v_e, t; \xi) = d_1(\tilde{w}(t + \xi, t) - \lambda) < 0, \quad f(\lambda, v_e) = 0$$

より

$$0 < u_0(\xi) < \lambda, \quad 0 < v_0(\xi) < v_e$$

と取ると

$$0 < U_1(t; \xi) < \lambda, \quad 0 < V_1(t; \xi) < v_e$$

となる. 同様に

$$0 < u_{in} < \lambda, \quad 0 < v_{in} < v_e$$

と取れば

$$0 < U_2(t; \xi) < \lambda, \quad 0 < V_2(t; \xi) < v_e$$

となることがわかる. □

補題 7.2. $u_0, v_0 \in C^1(0, L)$, (7.1) を仮定する. 7.1 の解 $(U_1(t; \xi), V_1(t; \xi))$ で

$$\sup_{(\xi, t) \in \Omega_{1\xi}} \left(|(U_1(t; \xi))_t| + |(V_1(t; \xi))_t| + |(U_1(t; \xi))_\xi| + |(V_1(t; \xi))_\xi| \right) \leq M_1$$

を満たす M_1 が存在する. さらに 7.1 の解 $(U_2(t; \xi), V_2(t; \xi))$ で

$$\sup_{(\xi, t) \in \Omega_{2\xi}} \left(|(U_2(t; \xi))_t| + |(V_2(t; \xi))_t| + |(U_2(t; \xi))_\xi| + |(V_2(t; \xi))_\xi| \right) \leq M_1$$

を満たすものが存在する. ただし M_1 は $d_1, \lambda, T, u_0, v_0$ に依存する.

証明 (7.10) より

$$\begin{aligned} \frac{dU_1}{dt}(0; L) &= F(u_0(L), v_0(L), 0; L), \quad \frac{dV_1}{dt}(0; L) = -f(u_0(L), v_0(L)), \\ \frac{dU_2}{dt}(T; -T) &= F(u_{in}, v_{in}, T; -T), \quad \frac{dV_2}{dt}(T; -T) = -f(u_{in}, v_{in}) \end{aligned}$$

と定義する. まず (7.8) の積分方程式について考える. (7.8) の解 $(U_1(t; \xi), V_1(t; \xi))$ は $\xi \in \Omega_{1\xi}$ 上で連続であり, その導関数 $\partial U_1 / \partial \xi, \partial V_1 / \partial \xi$ も連続である. さらに

$$\frac{d}{d\xi} \tilde{w}(t + \xi, t) = \tilde{w}_x(t + \xi, t)$$

は $(\xi, t) \in \overline{\Omega_{1\xi} \cup \Omega_{2\xi}} \setminus \{(\xi, t) : 0 \leq \xi \leq L, t = 0\}$ 上で連続である. さらに (7.1) より導関数も $\overline{\Omega_{1\xi}}$ で連続である. 同様に (7.9) の積分方程式の解 $(U_2(t; \xi), V_2(t; \xi))$ について考えるとこの解は $\Omega_{2\xi}$ 上で微分可能であり

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_2}{\partial \xi}(t; \xi) &= 4f(u_{in}, v_{in}) - d_1 u_{in} + d_1 \tilde{w}(0, T) \\ &\quad + \int_{-\xi}^t \left\{ (4f_u(U_2, V_2) - d_1) \frac{\partial U_2}{\partial \xi} + 4f_v(U_2, V_2) \frac{\partial V_2}{\partial \xi} \right\} ds \\ &\quad + d_1 \int_{-\xi}^t \tilde{w}_x(s + \xi, s) ds, \\ \frac{\partial V_2}{\partial \xi} &= -f(u_{in}, v_{in}) \\ &\quad - \int_{-\xi}^t \left(f_u(U_2, V_2) \frac{\partial U_2}{\partial \xi} + f_v(U_2, V_2) \frac{\partial V_2}{\partial \xi} \right) ds \end{aligned}$$

を満たす. ここで

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial \xi}(T; -T) &= 4f(u_{in}, v_{in}) - d_1 u_{in} + d_1 \tilde{w}(0, T), \\ \frac{\partial V_2}{\partial \xi}(0; \xi) &= -f(u_{in}, v_{in}) \end{aligned}$$

より $\partial U_2 / \partial \xi, \partial V_2 / \partial \xi$ は $\overline{\Omega_{2\xi}}$ 上で連続である.

次に導関数の一様有界性について証明する. 初めに $\partial U_1 / \partial \xi, \partial V_1 / \partial \xi$ の一様有界性を証明する.

$(\Phi, \Psi) = (\partial U_1 / \partial \xi, \partial V_1 / \partial \xi)$ は

$$\begin{cases} \Phi(t) = u'_0(\xi) + \int_0^t \{ (4f_u(U_1(s; \xi), V_1(s; \xi)) - d_1) \Phi(s) \\ \quad + 4f_v(U_1(s; \xi), V_1(s; \xi)) \Psi(s) \} ds + d_1 \int_0^t \tilde{w}_x(s + \xi, s) ds, \\ \Psi(t) = v'_0(\xi) - \int_0^t \{ f_u(U_1(s; \xi), V_1(s; \xi)) \Phi(s) + f_v(U_1(s; \xi), V_1(s; \xi)) \Psi(s) \} ds \end{cases}$$

を満たす. ここで

$$\begin{aligned} N_1 &:= \sup_{0 < U < \lambda, 0 < V < v_e} (|4f_u(U, V) - d_1| + |f_u(U, V)|), \\ N_2 &:= \sup_{0 < U < \lambda, 0 < V < v_e} (5|f_v(U, V)|) \\ \max_{\xi \in [0, L]} (|u'_0(\xi)| + |v'_0(\xi)|) &= M_0 \end{aligned}$$

と置くと

$$\begin{aligned} |\Phi(t)| + |\Psi(t)| &\leq M_0 + d_1 \int_0^t \sup_{0 \leq x \leq L} |\tilde{w}_x(x, s)| ds \\ &\quad + \max(N_1, N_2) \int_0^t (|\Phi(s)| + |\Psi(s)|) ds \end{aligned}$$

となる. (7.2) より Gronwall の不等式を用いると

$$|\Phi(t)| + |\Psi(t)| \leq (M_0 + d_1 M_T) e^{N_3 t}, \quad N_3 := \max(N_1, N_2)$$

を得る. これにより $\Omega_{1\xi}$ 上での一様有界性が言える. 同様に $\Omega_{2\xi}$ 上での一様有界性も言える. 従って補題 7.2 が成り立つ. $\square$

補題 7.2 の解 $(U_j(t; \xi), V_j(t; \xi))$ ($j = 1, 2$) に加えて

$$(\tilde{U}(t; \xi), \tilde{V}(t; \xi)) := \begin{cases} (U_1(t; \xi), V_1(t; \xi)), & (\xi, t) \in \overline{\Omega_{1\xi}}, \\ (U_2(t; \xi), V_2(t; \xi)), & (\xi, t) \in \overline{\Omega_{2\xi}} \end{cases}$$

と定義する.

$$u'_0(0) = 4f(u_{in}, v_{in}) - d_1 u_{in} + d_1 \tilde{w}(0, 0), \quad v'_0(0) = -f(u_{in}, v_{in})$$

を満たさなければ, $\partial U / \partial \xi, \partial V / \partial \xi$ は $\{\xi = 0, 0 \leq t \leq L\}$ で連続ではない. ここで $(\tilde{u}(x, t), \tilde{v}(x, t)) := (\tilde{U}(t; x - t), \tilde{V}(t; x - t))$ と置くと次の命題を得る.

命題 7.1. (7.1) を満たす $\tilde{w}$ について $\overline{\Omega_T}$ 上で連続であり

$$\{(x, t) : 0 < x < L, 0 < t < x\} \cup \{(x, t) : 0 < x < L, x < t \leq T\}$$

で連続的に微分可能で

$$0 < \tilde{u}(x, t) < \lambda, \quad 0 < \tilde{v}(x, t) < v_e \quad ((x, t) \in \overline{\Omega_T})$$

を満たす (2.8), (2.9), (2.10) の解 $(\tilde{u}(x, t), \tilde{v}(x, t))$ が存在する. また (7.1) を満たす $\tilde{w}_1(x) \leq \tilde{w}_2(x)$ ($0 \leq x \leq L$) についてそれぞれの解を $(\tilde{u}_1(x), \tilde{v}_1(x)), (\tilde{u}_2(x), \tilde{v}_2(x))$ とすると

$$\tilde{u}_1(x) \leq \tilde{u}_2(x), \quad \tilde{v}_1(x) \leq \tilde{v}_2(x) \quad (0 \leq x \leq L)$$

が満たされる.

証明 $\tilde{w}_1(x) \leq \tilde{w}_2(x)$ を仮定すると (7.10) の $F(U, V, \tilde{w}(t + \xi, t))$ について

$$F(U, V, \tilde{w}_1(t + \xi, t)) \leq F(U, V, \tilde{w}_2(t + \xi, t)) \quad (0 \leq x \leq L)$$

と V の式の右辺は w に依存しないことより

$$\tilde{u}_1(x) \leq \tilde{u}_2(x), \quad \tilde{v}_1(x) \leq \tilde{v}_2(x)$$

がわかる. □

次に $(\tilde{u}(x, t), \tilde{v}(x, t))$ を用いて

$$\begin{cases} w_t = d_w w_{xx} (\lambda - w) + d_2 (\tilde{u}(x, t) - w), & (x, t) \in \Omega_T \\ w_x = 0, & x = 0, L, \quad t > 0 \\ w(x, 0) = w_0(x), & 0 \leq x \leq L \end{cases} \quad (7.11)$$

について考える. ただし

$$w_0 \in C^0([0, L]), \quad 0 < w_0(x) < \lambda \quad (x \in [0, L]) \quad (7.12)$$

で

$$\tilde{u} \in C^0(\overline{\Omega_T}) \cup C^1(\Omega_T \setminus \{(x, t) : x = t\}), \quad 0 < \tilde{u}(x, t) < \lambda \quad ((x, t) \in \overline{\Omega_T}), \quad (7.13)$$

$$M := \sup_{\{(x, t) \in \Omega_T : x \neq t\}} (|\tilde{u}_x(x, t)| + |\tilde{u}_t(x, t)|) < \infty \quad (7.14)$$

を満たす.

命題 7.2. (7.12), (7.14) を仮定すると (7.1) を満たすような (7.11) の解 $w = \tilde{w}(x, t)$ で (7.1) を満たすものが存在する. また (7.13), (7.14) を満たす $(\tilde{u}_1(x), \tilde{v}_1(x)), (\tilde{u}_2(x), \tilde{v}_2(x))$ が

$$\tilde{u}_1(x) \leq \tilde{u}_2(x), \quad \tilde{v}_1(x) \leq \tilde{v}_2(x) \quad (0 \leq x \leq L)$$

を満たすときそれぞれに対応する解を $\tilde{w}_1, \tilde{w}_2$ とすると

$$\tilde{w}_1(x) \leq \tilde{w}_2(x) \quad (0 \leq x \leq L)$$

が成り立つ.

証明 拡散方程式の解の存在定理より (7.11) が解 $\tilde{w} \in C^0(\overline{\Omega_T}) \cup C^1([0, L] \times (0, T])$ を持つことがわかる. さらに解の最大値原理から

$$0 < \tilde{w}(x, t) < \lambda \quad ((x, t) \in \overline{\Omega_T})$$

を満たすことが分かる.

命題 7.2 の証明を完成するためには次の準備がある. $Z(x, t)$ を (7.11) の線形微分方程式の解とすると $Z(x, t)$ の満たす方程式は

$$\begin{cases} Z_t = d_w Z_{xx} - (\alpha + d_2) Z, & (x, t) \in (0, L) \times (0, T] \\ Z_x = 0, & x = 0, L, t > 0 \\ Z(x, 0) = \lambda - w_0(x), & x \in [0, L] \end{cases} \quad (7.15)$$

である. 次に解を

$$\tilde{w}(x, t) = \lambda - Z(x, t) - W(x, t)$$

のように分解する. ただし Z は (7.15) の解で W は

$$\begin{cases} W_t = d_w W_{xx} - (\alpha + d_2) W + d_2 (\lambda - \tilde{w}(x, t)), & (x, t) \in (0, L) \times (0, T] \\ W_x = 0 & x = 0, L, t > 0 \\ W(x, 0) = 0, & x \in [0, L] \end{cases} \quad (7.16)$$

の解である. 最大値原理より

$$0 \leq Z(x, t), W(x, t) < \lambda, 0 < Z(x, t) + W(x, t) < \lambda \quad ((x, t) \in \overline{\Omega_T})$$

が満たされている. 次の補題を用意すると

補題 7.3. ノイマン境界条件を満たす拡散方程式 $w_t = d_w w_{xx} - (\alpha + d_2) w$ の基本解を $K(x, y, t)$ とすると,

$$|K_x(x, y, t)| \leq \frac{c_1}{t} \exp(-\eta_1 t - |x - y|^2 / \eta_2 t), \quad (x, t \in \overline{\Omega_T})$$

を満たすような正の定数 c_1, η_1, η_2 が存在する.

証明については文献 [7] を参考にしている.
以下の評価が得られる.

補題 7.4.

$$|Z_x(x, t)| \leq \frac{C\lambda}{\sqrt{t}} \quad (0 \leq x \leq L, t > 0), \quad (7.17)$$

$$|W_x(x, t)| \leq C\lambda\sqrt{t} \quad (0 \leq x \leq L, t > 0), \quad (7.18)$$

$$|W_t(x, t)| \leq C\lambda(M\sqrt{t} + 1) \quad (0 < x < L, t > 0) \quad (7.19)$$

を満たす $C > 0$ が存在する. これより

$$|\tilde{w}_x(x, t)| \leq C\lambda \left(\frac{1}{\sqrt{t}} + \sqrt{t} \right) \quad (0 \leq x \leq L, t > 0)$$

である.

この補題を使うと命題の前半部分がいえる. 後半部分の $\tilde{w}_1(x)$, $\tilde{w}_2(x)$ の大小の証明は w が線形の拡散方程式であることよりすぐに導かれる.

補題 7.4 の証明 (7.15), (7.16) の解は

$$Z(x, t) = \int_0^L K(x, y, t) (\lambda - w_0(y)) dy$$

および

$$W(x, t) = d_2 \int_0^t \int_0^L K(x, y, t - \tau) (\lambda - \tilde{u}(y, \tau)) dy d\tau$$

で表される. 従って

$$\begin{aligned} |Z_x(x, t)| &\leq \frac{c_1}{\sqrt{t}} \int_0^L \frac{1}{\sqrt{t}} \exp(-\eta_1 t - |x - y|^2 / \eta_2 t) |\lambda - w_0(y)| dy \\ &\leq \frac{C_1 \sqrt{\pi} \lambda}{\sqrt{t}} \quad (0 \leq x \leq L, t > 0) \end{aligned}$$

を満たすような $C_1 > 0$ が存在するので (7.17) が成り立つ. 同様に

$$\begin{aligned} |W_x(x, t)| &\leq d_2 \lambda \int_0^t \frac{c_1}{\sqrt{t - \tau}} \int_0^L \frac{1}{\sqrt{t - \tau}} \exp\{-\eta_1 t - |x - y|^2 / \eta_2 (t - \tau)\} dy d\tau \\ &\leq d_2 \lambda C_1 \sqrt{\pi} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t - \tau}} d\tau \\ &= 2d_2 \lambda C_1 \sqrt{\pi} \sqrt{t} \quad (0 \leq x \leq L, t > 0) \end{aligned}$$

より (7.18) を得る. $K_{xx}(x, y, t) = K_{yy}(x, y, t)$ と部分積分より

$$\begin{aligned} |W_{xx}(x, t)| &= d_2 \left| \int_0^t \int_0^L K_{yy}(x, y, t - \tau) (\lambda - \tilde{u}(y, \tau)) dy d\tau \right| \\ &\leq d_2 \int_0^t \int_0^L |K_{yy}(x, y, t - \tau)| |\tilde{u}_y(y, \tau)| dy d\tau \\ &\leq 2d_2 M C_1 \sqrt{\pi} \sqrt{t} \end{aligned}$$

を得る. (7.16) より

$$\begin{aligned} \sup_{x \in (0, L)} |W_t(x, t)| &\leq d_w |W_{xx}(x, t)| + (\alpha + d_2) |W(x, t)| + d_2 \lambda \\ &\leq 2d_2 d_w M C_1 \sqrt{\pi} \sqrt{t} + \lambda (\alpha + 2d_2), \quad (0 < t \leq T) \end{aligned}$$

となる. よって (7.19) は成り立つ. □

上記の命題 7.1 と 7.2 を使うと帰納的に単調な関数列 $\{u_j\}$, $\{v_j\}$, $\{w_j\}$ を構成することができる. さらに補題 7.2 と補題 7.4 を適用するとその収束が一様収束であることがいえ, 収束した関数が解になっていることがわかる. その議論は定常解の存在で用いた議論と同様である. こうして命題 4.1 が証明される. □

8 二酸化炭素輸送・交換モデル

この章では二酸化炭素の輸送・交換のモデルの数値計算, 定常解の存在, 解の漸近安定性について議論する.

8.1 二酸化炭素輸送・交換のモデル化

酸素輸送モデルと同様に移流方程式に血液内の CO_2 の化学反応項を導入すると以下の方程式を得る.

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} + c_{\text{CO}_2} \frac{\partial S}{\partial x} = D(\sigma P - S) + k_{-2} [\text{H}^+] Q - k_2 U, \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + c_{\text{CO}_2} \frac{\partial Q}{\partial x} = k_2 S - k_{-2} [\text{H}^+] Q \end{cases}$$

ただし, S, Q はそれぞれ $\text{CO}_2, \text{HCO}_3^-$ 濃度を表し, c_{CO_2} は毛細血管の血流速度, k_2, k_{-2} はそれぞれ順方向の反応係数, 逆反応の反応係数, $[\text{H}^+]$ は水素濃度である. 血液中の水素濃度は CO_2 濃度より高いので以下では一定とする. ここで (2.4) と同様に肺胞での CO_2 濃度を表す方程式を組み込むと以下の方程式を得る.

$$\begin{cases} S_t + c_{\text{CO}_2} S_x = D_{\text{CO}_2} (\sigma_{\text{CO}_2} P - S) + k_{-2} [\text{H}^+] Q - k_2 S, \\ Q_t + c_{\text{CO}_2} Q_x = k_2 S - k_{-2} [\text{H}^+] Q \\ (P_{\text{CO}_2})_t - D_0 (P_{\text{CO}_2})_{xx} = -D_{\text{CO}_2} (\sigma_{\text{CO}_2} P_{\text{CO}_2} - S) + A_i - R_0 P_{\text{CO}_2} \end{cases} \quad (8.1)$$

ただし, P_{CO_2} は肺胞での CO_2 濃度を表す.

次に境界条件を定める. 肺胞と接した毛細血管の入り口では高い濃度の CO_2 を含んだ血液が流れ込む. ここでは毛細血管での入り口での $\text{CO}_2, \text{HCO}_3^-$ 濃度を一定と仮定して, 入り口での境界条件は次のように与える.

$$S(0, t) = S_{in}, \quad Q(0, t) = Q_{in}$$

また毛細血管と接した肺胞の境界での酸素の出入りはないと仮定してノイマン境界条件を与える.

$$(P_{\text{CO}_2})_x(0, t) = (P_{\text{CO}_2})_x(L, t) = 0$$

方程式 (8.1) を無次元化する.

$$\begin{aligned} u &:= S, \quad v := Q, \quad w := \sigma_{\text{CO}_2}, \quad d_1 := D_{\text{CO}_2}, \quad d_2 := \sigma_{\text{CO}_2} D_{\text{CO}_2}, \\ \lambda &:= \sigma A_i / R_0, \quad \alpha := R_0, \quad d_w := D_0, \quad x' := x / c_{\text{CO}_2}, \quad L' := L / c_{\text{CO}_2} \end{aligned}$$

と置いて u, v の方程式に書き直し x' を x , L' を L に書き直すと

$$\begin{cases} u_t + u_x = d_3 (w - u) + k_{-2} [\text{H}^+] v - k_2 u, \\ v_t + v_x = k_2 u - k_{-2} [\text{H}^+] v, \\ w_t - d_w w_{xx} = d_2 (u - w) + \alpha (\lambda - w) \end{cases} \quad (8.2)$$

を得る. 境界条件は

$$u(0, t) = u_{in}, \quad v(0, t) = v_{in}, \quad w_x(0, t) = w_x(L, t) = 0 \quad (8.3)$$

とし, 初期条件は

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad w(x, 0) = w_0(x) \quad (8.4)$$

と置く. ただし境界 $x = 0$ での両立条件は

$$u(0, 0) = u_{in}, \quad v(0, 0) = v_{in}$$

である. 方程式 (8.2) は $[\text{H}^+]$ を一定としているので線形の方程式である. よって酸素モデルに比べて証明は容易である. さらに (u_{in}, v_{in}, w_{in}) について適当な条件を与えると境界での値が最大となることがわかる.

8.2 二酸化炭素輸送・交換モデルの数値計算

この章では二酸化炭素除去モデルの数値計算結果を示す.
(8.2) の数値計算を行う. まず各パラメータを以下のように設定する.

$$\begin{cases} d_2 = 0.3, \quad k_2 = 0.01, \quad k_{-2} = 0.01, \quad d_w = 100, \\ \alpha = 10.0, \quad \lambda = 3.0, \quad h = 1.0 \end{cases}$$

u, v に関する境界条件を

$$u(0, t) = u_{in} = 10.0, \quad v(0, t) = \frac{k_2 u_{in}}{h k_{-2}}$$

また初期条件を

$$u(x, 0) = 10.0, \quad v(x, 0) = \frac{k_2 u(x, 0)}{h k_{-2}}, \quad w(x, 0) = 1.9$$

と設定する.

$d_1 = 3.0$, $L = 3.0$ の数値計算の定常状態 ($t = 2.7$) では高い濃度で流入してきた血液中の CO_2 が肺胞に接した毛細血管の出口では除去され, 低い濃度に維持されている事がわかる (Fig 8.1). さらに肺胞における CO_2 濃度も一定に保たれている. これは肺胞毛細血管の出

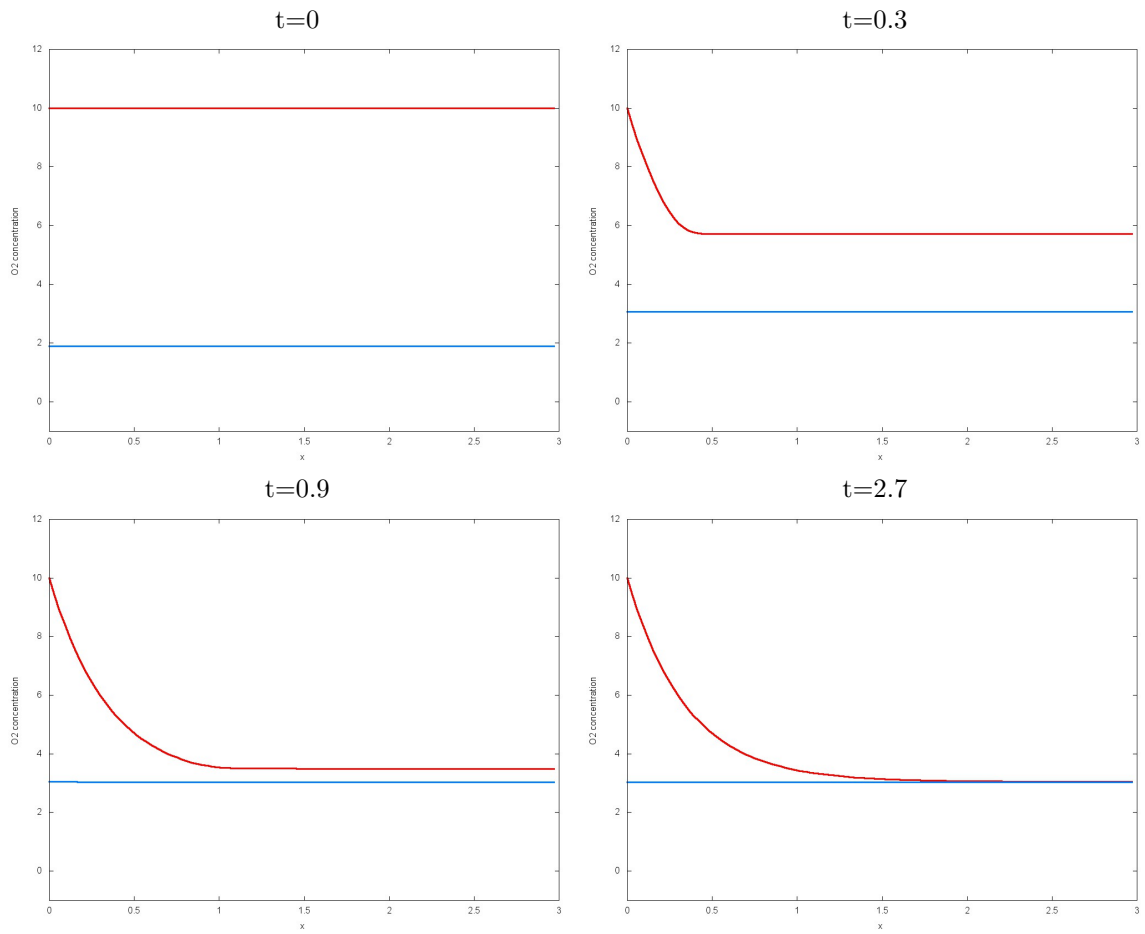


Fig 8.1: 横軸: x , 縦軸: u , w の濃度, $d_1 = 3.0$ $L = 3.0$ の数値計算結果. 赤: u , 青: w

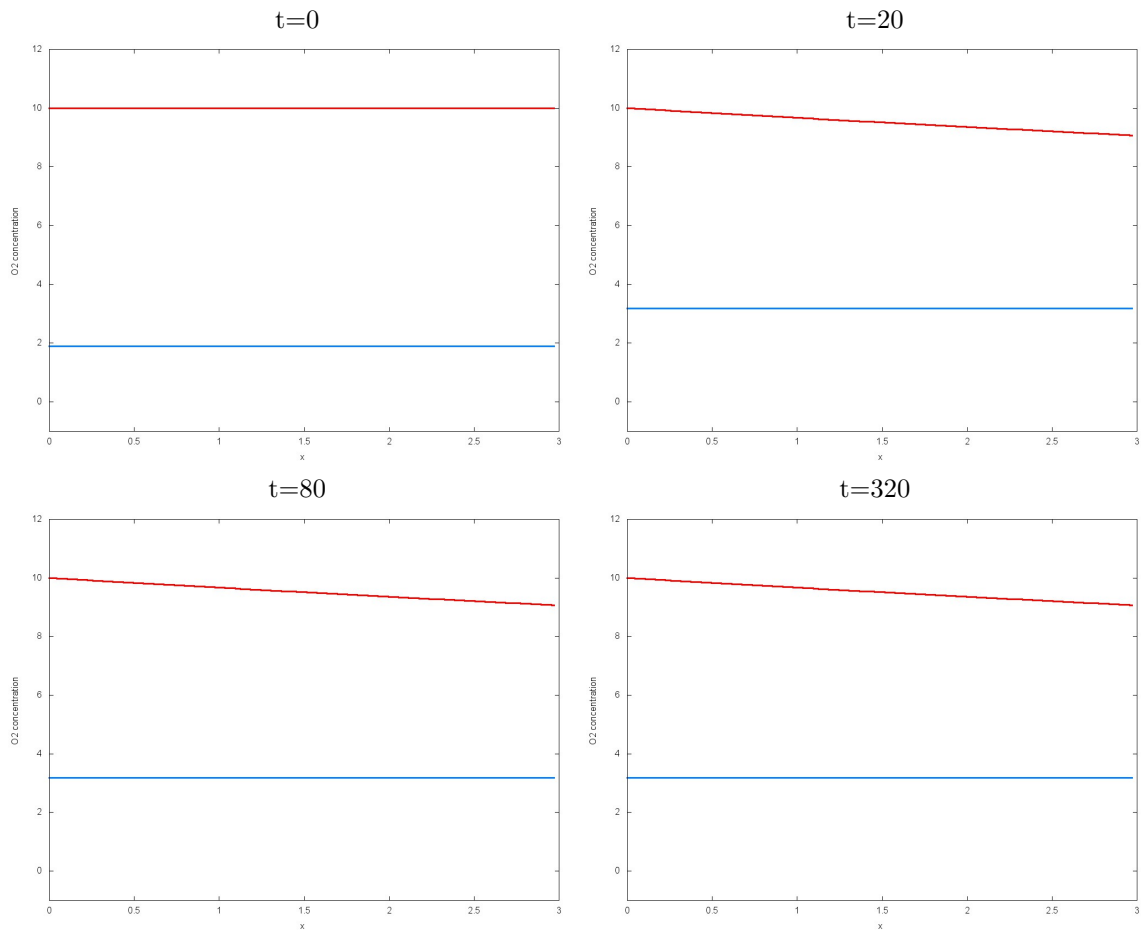


Fig 8.2: 横軸: x , 縦軸: u , w の濃度, $d_1 = 0.05$ $L = 3.0$ の数値計算結果. 赤: u , 青: w

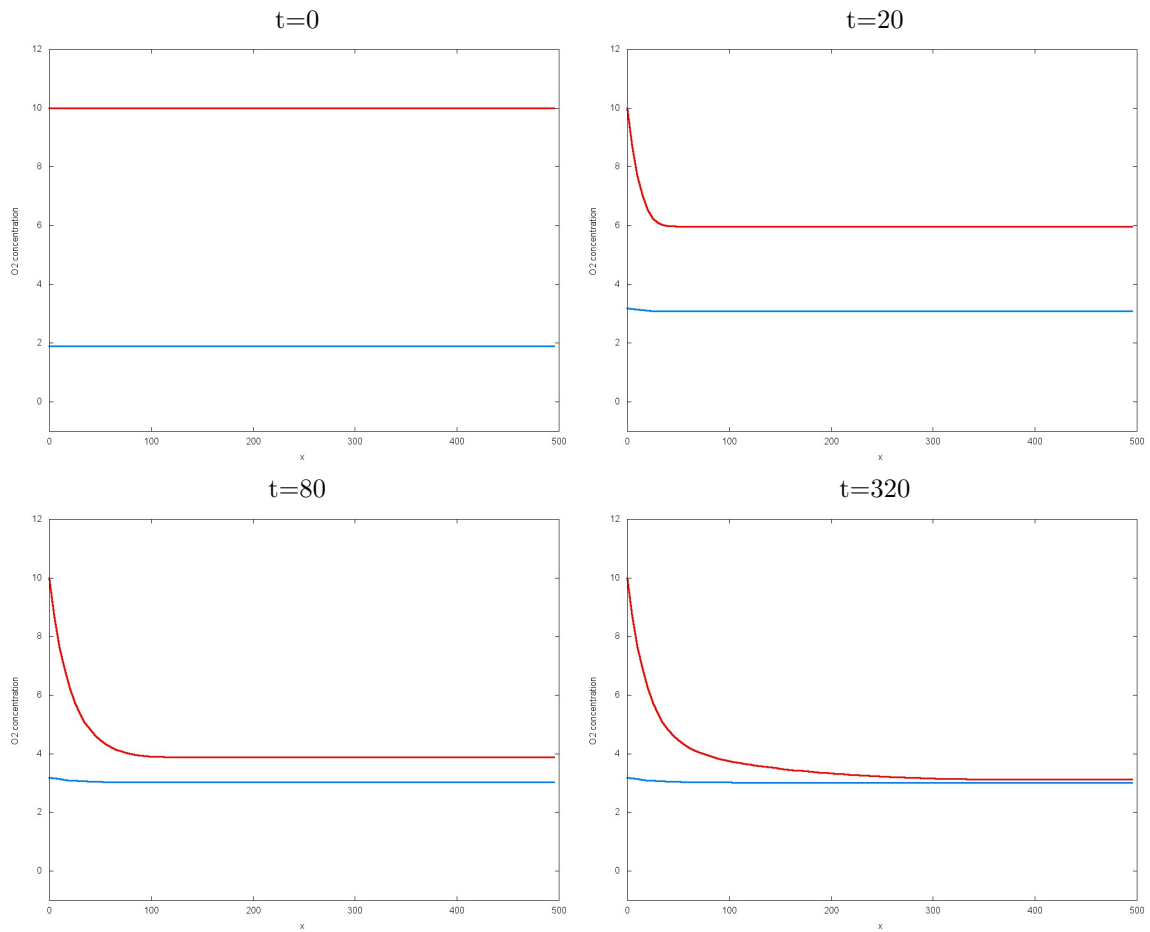


Fig 8.3: 横軸: x , 縦軸: u , w の濃度, $d_1 = 0.05$ $L = 500.0$ の数値計算結果. 赤: u , 青: w

口では CO_2 が除去され、低い濃度に維持されているという実際の現象の特徴をうまく表している。

次に拡散係数 d_1 を小さく取った数値計算を行う。

$d_1 = 0.05$ $L = 3.0$ の数値計算では高い濃度で流入してきた血液中の CO_2 が肺胞に接した毛細血管の出口では十分除去されず、高い濃度に維持されている事がわかる (Fig 8.2)。

そこで次に毛細血管の長さ L を十分長く取り数値計算を行う。 $d_1 = 0.05$ $L = 500.0$ の数値計算では $d_1 = 0.05$ $L = 3.0$ とは異なり $t = 320$ では高い濃度で流入してきた血液中の CO_2 が肺胞に接した毛細血管の出口では除去され、低い濃度に維持されている (Fig 8.3)。この事より毛細血管の長さを十分長く取れば、拡散係数 d_1 が十分小さくても二酸化炭素が除去される事がわかる。しかし、 $d_1 = 3.0$ $L = 3.0$ の場合とは定常状態に落ち着くまでの時間がかかなり異なることがわかる。

8.3 二酸化炭素輸送・交換モデルの定常解の存在

この方程式について初期値問題の解の存在は線形なので酸素の場合に比べ易しい。また定常解の漸近安定性も証明できる。

まず

$$\begin{aligned} h &:= k_{-2} [\text{H}^+], \quad d'_1 := d_1/h, \quad d'_2 := d_2/h, \quad d'_w := d_w/h, \quad \alpha' := \alpha/h \\ r &:= k_2/h, \quad t' = ht, \quad x' := x/h, \quad L' := L/h \end{aligned}$$

と置いて方程式を書き直し、 d'_1 を d_1 、 d'_2 を d_2 、 d'_w を d_w 、 t' を t 、 x' を x 、 L' を L に書き直すと (8.2) は

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t + \mathbf{u}_x &= A_0 \mathbf{u} - d_1 B_1 \mathbf{u} + d_1 \mathbf{e}_1 w, \\ w_t &= D_w w_{xx} + d_2 (u - w) + \alpha (\Lambda - w) \end{cases} \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (8.5)$$

と表される。ここで、

$$A_0 = \begin{pmatrix} -r & 1 \\ r & -1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とおいた。ただし、 $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y) = (u(x, t), v(x, t))^T$ である。境界条件として

$$\mathbf{u}(0, t) = \mathbf{u}_\ell = (u_{in}, v_{in}), \quad w_x(0, t) = w_x(L, t) = 0 \quad (8.6)$$

を与え、初期条件として

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x), \quad w(x, 0) = w_0(x) \quad (8.7)$$

を与える. 定常問題は境界条件 (8.6) のもとで

$$\begin{cases} \mathbf{u}_x &= A_0 \mathbf{u} - d_1 B_1 \mathbf{u} + d_1 \mathbf{e}_1 w, \\ 0 &= D_w w_{xx} + d_2 (u - w) + \alpha (\Lambda - w) \end{cases} \quad (8.8)$$

となる. (8.8) の定数解は

$$\begin{cases} -ru + v + d_1 (w - u) = 0, \\ ru - v = 0, \\ \alpha (\Lambda - w) + d_2 (u - w) = 0, \end{cases}$$

を解いて $(u_c, v_c, w_c) = (\Lambda, r\Lambda, \Lambda)$ と与えられる. (8.8) に対して変換

$$(P(x), Q(x), R(x)) = (u(x), v(x), w(x)) - (u_c, v_c, w_c)$$

を行うと

$$\begin{cases} \mathbf{P}_x = A_0 \mathbf{P} - d_1 B_1 \mathbf{P} + d_1 \mathbf{e}_1 R, \\ D_w R_{xx} - \alpha R + d_2 (P - R) = 0, \end{cases} \quad 0 < x < L \quad (8.9)$$

が得られる. (8.6) に対応する境界条件は

$$\mathbf{P}(0) = \mathbf{u}_\ell - \mathbf{u}_c, \quad R_x(0) = R_x(L) = 0 \quad (8.10)$$

となる. ただし, $\mathbf{P}(x) = (P(x), Q(x))^T$, $\mathbf{u}_c = (u_c, v_c)^T$ である. ここで (8.9) の定数解 (u_c, v_c, w_c) に対して

$$v_c < v_{in} < ru_{in} \quad (8.11)$$

を仮定する. 定常解の存在に関して次の命題が成り立つ. ここで毛細血管の CO_2 濃度に対応する $P(x)$ の値がその入り口 ($x=0$) で最大値を取ることがいえることに注意する.

命題 8.1. (8.11) を仮定すると (8.9), (8.10) の正值な解 $(P(x), Q(x), R(x))$ で

$$\begin{aligned} 0 < P(x) < P(0) \quad (0 < x \leq L), \quad 0 < \max_{0 \leq x \leq L} Q(x) \leq r \max_{0 \leq x \leq L} P(x), \\ 0 < \max_{0 \leq x \leq L} R(x) \leq \frac{d_2}{\alpha + d_2} \max_{0 \leq x \leq L} P(x) \end{aligned}$$

を満たすものが存在する. ただし, $P(x) = u_{in} - u_c$ となるのは $x=0$ のときのみである.

証明 (8.9) の第 1 式を定数変化の公式を使って書き直すと

$$\mathbf{P}(x) = e^{(A_0 - d_1 B_1)x} (\mathbf{u}_\ell - \mathbf{u}_c) + d_1 \int_0^x e^{(A_0 - d_1 B_1)(x-\xi)} \mathbf{e}_1 R(\xi) d\xi \quad (8.12)$$

となる. さらに (8.9) の第2式を

$$P(x) = \left(-\frac{D_w}{d_2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\alpha + d_2}{d_2} \right) R(x), \quad R_x(0) = R_x(L) = 0 \quad (8.13)$$

と書き直す. ここでノイマン境界条件を満たすグリーン関数を導入すると (8.13) は

$$R(x) = \int_0^L G(x, y) P(y) dy$$

と表される.

Claim: 連続関数 $P(x) > 0$, $R(x) > 0$ に対して

$$\|R\|_{\max} = \max_{0 \leq x \leq L} R(x) \leq \frac{d_2}{\alpha + d_2} \|P\|_{\max} \quad (8.14)$$

が成り立つ. これを証明する.

$$R(x_m) = \|R\|_{\max}$$

とすると $R_{xx}(x_m) \leq 0$ より (8.13) は

$$\frac{\alpha + d_2}{d_2} R(x_m) = P(x_m) + \frac{D_w}{d_2} R_{xx}(x_m) \leq P(x_m)$$

なので

$$R(x_m) \leq \frac{d_2}{\alpha + d_2}$$

が得られ, (8.14) が証明できた.

次に関数列

$$\mathbf{P}_{n-1}(x) = e^{(A_0 - d_1 B_1)x} (\mathbf{u}_\ell - \mathbf{u}_c) + d_1 \int_0^x e^{(A_0 - d_1 B_1)(x-\xi)} \mathbf{e} R_{n-1}(\xi) d\xi \quad (8.15)$$

$$R_n(x) = \int_0^x G(x, y) P_{n-1}(y) dy \quad (8.16)$$

$$n = 1, 2, \dots$$

を定義する. ただし, $R_0(x) \equiv 0$ とする.

$$0 < v_{in} - v_c \leq r(u_{in} - u_c)$$

の仮定のもとで次の補題が成り立つ.

補題 8.1. 関数列 P_n, Q_n, R_n に対して

$$\begin{aligned} 0 < P_n(x) < P_n(0) \quad (0 < x \leq L), \\ \|Q_n\|_{\max} &\leq r\|P_n\|_{\max}, \\ \|R_{n+1}\|_{\max} &\leq \frac{d_2}{\alpha + d_2}\|P_n\|_{\max} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

が成り立つ.

証明 $n = 0, R_0 = 0$ に対して方程式は

$$\begin{cases} P'_0 &= -(r + d_1)P_0 + Q_0, \\ Q'_0 &= rP_0 - Q_0 \end{cases}$$

となる. ただし, $' = d/dx$ とする. $P_0(0) = \mathbf{u}_\ell - \mathbf{u}_c$, $0 < v_{in} - v_c \leq r(u_{in} - u_c)$ より

$$0 < Q_0(0) = v_{in} - v_c \leq rP_0(0) = r(u_{in} - u_c)$$

を得る. Fig 8.4 の相平面での解軌道の向きから

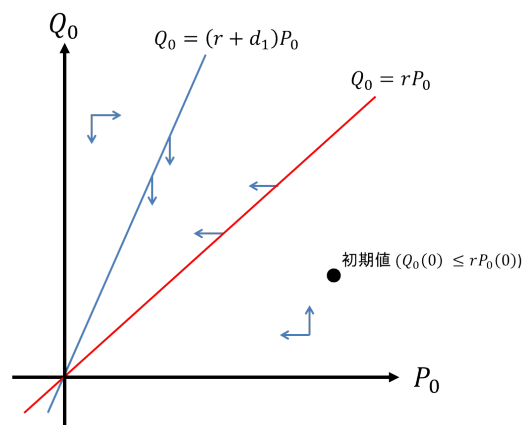


Fig 8.4: 相平面解析結果

$$0 < P_0(x) \leq P_0(0)$$

となる事がわかる. $Q'_0(x) = 0$ なら $Q_0(x) = rP_0(x)$ で, また $Q_0(x)$ が $x = L$ で最大値をとり $Q'_0(L) > 0$ なら $Q_0(L) < rP_0(L)$ を満たす. よって

$$\|Q_0\|_{\max} \leq r\|P_0\|_{\max} = rP_0(0)$$

が得られる. 一方, (8.14) より

$$\|R_1\|_{\max} \leq \frac{d_2}{\alpha + d_2} \|P_0\|_{\max}$$

となる. 従って, $n = 0$ について証明する事ができた. $\square$

次に一般の n で成り立つと仮定すると補題の不等式が $n + 1$ で成り立つ事を示す. $n + 1$ に対して

$$\begin{cases} P'_{n+1} &= -(r + d_1) P_{n+1} + Q_{n+1} + d_1 R_{n+1}, \\ Q'_{n+1} &= r P_{n+1} - Q_{n+1} \end{cases} \quad (8.17)$$

である. $P_{n+1}(0) = \mathbf{u}_\ell - \mathbf{u}_c$, $0 < v_{in} - v_c \leq r(u_{in} - u_c)$ より

$$0 < Q_{n+1}(0) \leq r P_{n+1}(0)$$

が得られる. (8.17) の第 1 式で $x = 0$ とおくと

$$\begin{aligned} P'_{n+1}(0) &= -(r + d_1) P_{n+1}(0) + Q_{n+1}(0) + d_1 R_{n+1}(0) \\ &= -(r P_{n+1}(0) - Q_{n+1}(0)) + d_1 (R_{n+1}(0) - P_{n+1}(0)) \end{aligned}$$

となる. 一方

$$\|R_{n+1}\|_{\max} \leq \frac{d_2}{\alpha + d_2} \|P_n\|_{\max} = \frac{d_2}{\alpha + d_2} (u_{in} - u_c) < u_{in} - u_c$$

より

$$P'_{n+1}(0) < 0$$

である. さらに

$$P_{n+1}(x) < P_{n+1}(0) \quad (0 < x < \varepsilon)$$

を満たす $\varepsilon > 0$ が存在する.

$n = 0$ のときの相平面解析と同様に考えると, 初期値が $P_{n+1}(0), Q_{n+1}(0) > 0$ なので

$$P_{n+1}(x), Q_{n+1}(x) > 0 \quad (0 \leq x \leq L)$$

となる. $Q_{n+1}(x_q) = \|Q_{n+1}\|_{\max}$ とおくと, $Q_{n+1}(0) \leq r P_{n+1}(0)$ より

$$Q'_{n+1}(0) = r P_{n+1}(0) - Q_{n+1}(0) \geq 0$$

を得る. $Q_{n+1}(x)$ は $x = x_q$ で最大値をとるとすると, $x_q > 0$ で Fig 8.5 のように 2 つの場

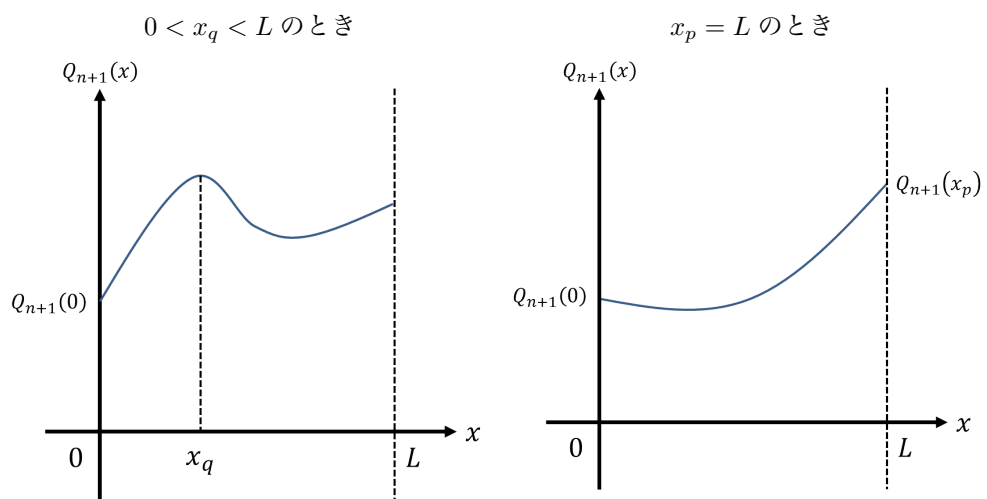
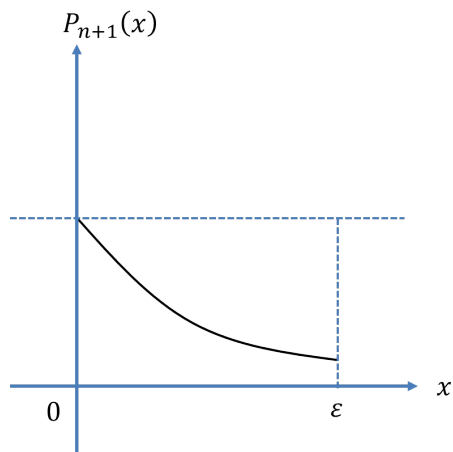


Fig 8.5: $Q_{n+1}(x)$ のグラフの形状

合があるが

$$Q'_{n+1}(x_q) \geq 0$$

となることがわかる. $Q'_{n+1}(x_q) = rP_{n+1}(x_q) - Q_{n+1}(x_q)$ より

$$Q_{n+1}(x_q) \leq rP_{n+1}(x_q)$$

となる. この式と $rP_{n+1}(x_q) \leq r\|P_{n+1}\|_{\max}$ より

$$\|Q_{n+1}\|_{\max} \leq rP_{n+1}(x_q) \leq r\|P_{n+1}\|_{\max}$$

が得られるので $n+1$ に対して **補題 8.1** の 2 つ目の不等式が示せた. 次に $\|P_{n+1}\|_{\max} = P_{n+1}(0)$ であることを背理法で示す. $P_{n+1}(x_p) = \|P_{n+1}\|_{\max}$ とし, x_p を $0 < x_p \leq L$ と固定すると

$$P_{n+1}(0) \leq P_{n+1}(x_p)$$

となる. $P_{n+1}(x)$ の最大値の取り方は Fig 8.5 のグラフのように 2 通りあり, $P'_{n+1}(x_p)$ が得られる. よって

$$0 \leq P'_{n+1}(x_p) = -(r + d_1)P_{n+1}(x_p) + Q_{n+1}(x_p) + d_1R_{n+1}(x_p)$$

より

$$(r + d_1)P_{n+1}(x_p) \leq Q_{n+1}(x_p) + d_1R_{n+1}(x_p)$$

となる. これに (8.14) を適用すると

$$(r + d_1)P_{n+1}(x_p) \leq \|Q_{n+1}\|_{\max} + \frac{d_1^2}{\alpha + d_1}\|P_n\|_{\max}$$

となり, $\|Q_{n+1}\|_{\max} \leq r\|P_{n+1}\|_{\max}$ より

$$(r + d_1)P_{n+1}(x_p) \leq r\|P_{n+1}\|_{\max} + \frac{d_1^2}{\alpha + d_1}\|P_n\|_{\max}$$

となり,

$$\|P_{n+1}\|_{\max} \leq \frac{d_1}{\alpha + d_1}\|P_n\|_{\max}$$

を得る. 帰納法の仮定より $\|P_n\|_{\max} = u_{in} - u_c$ なので

$$\|P_{n+1}\|_{\max} \leq \frac{d_1}{\alpha + d_1}(u_{in} - u_c) < u_{in} - u_c$$

となり, $\|P_{n+1}\|_{\max}$ が $P_{n+1}(x)$ の最大値であることに反する. 従って, 最大値を取るのは $x = 0$ のみで

$$\|P_{n+1}\|_{\max} = P_{n+1}(0) = u_{in} - u_c$$

が得られる. 以上より $n+1$ に対して補題 8.1 の主張が成り立つので補題 8.1 はすべての n について成り立つことがわかる. $\square$

補題 8.2. $\{P_n\}, \{Q_n\}, \{R_n\}$ は単調増加列でそれぞれ, P^*, Q^*, R^* に一様に収束する. すなわち

$$\lim_{n_j \rightarrow \infty} [\|P_{n_j} - P^*\|_{\max} + \|Q_{n_j} - Q^*\|_{\max} + \|R_{n_j} - R^*\|_{\max}] = 0 \quad (8.18)$$

で $P^*(x), Q^*(x), R^*(x)$ は連続である. ただし, $\|P\|_{\max} = \max_{0 \leq x \leq L} |P(x)|$.

証明 $\{P_n\}, \{Q_n\}, \{R_n\}$ が単調増加列になることは命題 5.1 の証明と同様に示すことができる. よってそれぞれの列は各 x について極限值が存在し, それを $P^*(x), Q^*(x), R^*(x)$ とする. また補題 5.1 と同様に (8.18) が示される. $\square$

命題の証明の続き **補題 8.1** で作られた極限関数は (8.12), (8.13) を満たす. よって

$$P^*(x) \leq P^*(0) \quad (0 < x \leq L), \quad \|Q^*\|_{\max} \leq r\|P^*\|_{\max}, \quad \|R^*\|_{\max} \leq \frac{d_2}{\alpha + d_2} \|P^*\|_{\max}$$

となる. 一方, 方程式から, これらは正值であり, $P_{n+1}(x)$ のときと同じ議論で

$$P^*(x) < P^*(0) \quad (0 < x \leq L)$$

が示せる. 従って**命題 8.1** は成立する. $\square$

8.4 解の漸近安定性

次に (8.5) の定常解の漸近安定性について考える. 命題で得られた定常解を $(\bar{\mathbf{u}}(x), w(x))$ とする. L^2 ノルムを $\|\cdot\|$, H^1 ノルムを $\|\cdot\|_1$ で表すと次の定理が成り立つ.

定理 8.1. 初期条件 (8.4), 境界条件 (8.3) とし, 初期条件は

$$\begin{aligned} u_0(0), v_0(0) &\in C^2[0, L] \\ u_0(0) &= u_{in}, \quad v_0(0) = v_{in} \\ w_0(0) &\in C^0[0, L] \end{aligned}$$

を満たすと仮定すると (8.5) の解 $(u(x, t), v(x, t), w(x, t))$ に対してある正数 μ, C が存在して

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t) - \bar{\mathbf{u}}\|_1 + \|w(\cdot, t) - \bar{w}\|_1 \leq Ce^{-\mu t} (\|\mathbf{u}(\cdot, 0) - \bar{\mathbf{u}}\|_1 + \|w(\cdot, 0) - \bar{w}\|_1) \quad (8.19)$$

が成り立つ.

証明 新しい変数

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}, \quad z = w - \bar{w}$$

を導入すると, (8.5) は

$$\begin{cases} \mathbf{p}_t + \mathbf{p}_x &= A_0 \mathbf{p} - d_1 B_1 \mathbf{p} + d_1 \mathbf{e}_1 z, \\ z_t &= D_w z_{xx} - (\alpha + d_2) z + d_2 p_1 \end{cases} \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (8.20)$$

となる. このとき境界条件は

$$\mathbf{p}(0, t) = 0$$

となり, 初期条件は

$$\begin{cases} \mathbf{p}(0, t) &= \mathbf{p}_0(x) = \mathbf{u}_0(x) - \bar{\mathbf{u}}(x), \\ z(x, 0) &= z_0(x) = w_0(x) - \bar{w}(x) \end{cases}$$

である. (8.20) の $\mathbf{p}$ についての方程式を対角化するために変換を行う.

$$\det(A_0 - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -r - \lambda & 1 \\ r & -1 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

より, 固有値は $\lambda = 0, -1 - r$ である. $\lambda = 0, -1 - r$ に対応する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 1 \\ r \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} r \\ -r \end{pmatrix}$$

なので,

$$\mathbf{p} = \frac{1}{1+r} \begin{pmatrix} 1 & r \\ r & -r \end{pmatrix} \mathbf{U}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$$

を用いて (8.20) を変換すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+r} \begin{pmatrix} 1 & r \\ r & -r \end{pmatrix} \mathbf{P}_t + \frac{1}{1+r} \begin{pmatrix} 1 & r \\ r & -r \end{pmatrix} \mathbf{P}_x &= \begin{pmatrix} -r & 1 \\ r & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{1+r} \begin{pmatrix} 1 & r \\ r & -r \end{pmatrix} \mathbf{P} \\ &\quad - d_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{1+r} \begin{pmatrix} 1 & r \\ r & -r \end{pmatrix} \mathbf{P} + d_1 \mathbf{e} z \end{aligned}$$

となり,

$$\mathbf{P}_t + \mathbf{P}_x = R^{-1} A_0 R \mathbf{P} - \frac{d_1}{1+r} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{P} + d_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} z$$

を得る. 従って方程式は

$$\begin{cases} P_t + P_x &= -\frac{d_1}{1+r} (P + rQ) + d_1 z, \\ Q_t + Q_x &= -(1+r) Q - \frac{d_1}{1+r} (P + rQ) + d_1 z, \\ z_t &= D_w z_{xx} - (\alpha + d_2) z + \frac{d_2}{1+r} (P + rQ) \end{cases} \quad (8.21)$$

と変換される. 境界条件は

$$P(0, t) = Q(0, t) = 0, \quad z_x(0, t) = z_x(L, t) = 0$$

である. (8.21) の第 1 式に P , 第 2 式に Q , 第 3 式に z を乗じると

$$\frac{1}{2} [(P^2)_t + (P^2)_x] = -\frac{d_1}{1+r} (P + rQ) P + d_1 z P,$$

$$\frac{1}{2} [(Q^2)_t + (Q^2)_x] = -\frac{d_1}{1+r} (P + rQ) Q - (1+r) Q^2 + d_1 z Q,$$

$$\frac{1}{2} (z^2)_t = D_w z_{xx} z - (\alpha + d_2) z^2 + \frac{d_2}{1+r} (P + rQ) z$$

となるので, これらの 3 つの式から

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[\frac{d_2}{d_1} P^2 + \frac{d_2}{d_1} r Q^2 + (1+r) z^2 \right]_t + \frac{1}{2} \left[\frac{d_2}{d_1} P^2 + \frac{d_2}{d_1} r Q^2 \right]_x \\ = -\frac{d_2}{1+r} (P + rQ)^2 - \frac{d_2}{d_1} r (1+r) Q^2 + 2d_2 (P + rQ) z \\ - (1+r) (\alpha + d_2) z^2 + (1+r) D_w z_{xx} z \end{aligned}$$

を得る. ヤングの不等式を用いると

$$2d_2 (P + rQ) z \leq \frac{d_2}{1+r} \cdot \frac{2d_2}{\alpha + 2d_2} (P + rQ)^2 + d_2 (1+r) \frac{\alpha + 2d_2}{2d_2} z^2$$

だから

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left[\frac{d_2}{d_1} P^2 + \frac{d_2}{d_1} r Q^2 + (1+r) z^2 \right]_t + \frac{1}{2} \left[\frac{d_2}{d_1} P^2 + \frac{d_2}{d_1} r Q^2 \right]_x \\
& \leq -\frac{\alpha d_2}{(1+r)(\alpha+2d_2)} (P+rQ)^2 - \frac{d_2}{d_1} r (1+r) Q^2 - \frac{\alpha}{2} (1+r) z^2 + (1+r) D_w z_{xx} z \\
& = -\frac{\alpha d_2}{(1+r)(\alpha+2d_2)} \left\{ \frac{1}{1+d_1} P^2 + \frac{d_1}{1+d_1} \left(P + \frac{(1+d_1)rQ}{d_1} \right)^2 - \frac{r^2}{d_1} Q^2 \right\} \\
& \quad - \frac{d_2}{d_1} r (1+r) Q^2 - \frac{\alpha}{2} (1+r) z^2 + (1+r) D_w z_{xx} z \\
& \leq -\frac{\alpha d_2}{(1+r)(\alpha+2d_2)(1+d_1)} P^2 - \frac{rd_2}{d_1} \left(1+r - \frac{\alpha r}{(1+r)(\alpha+2d_2)} \right) Q^2 \\
& \quad - \frac{\alpha}{2} (1+r) z^2 + (1+r) D_w z_{xx} z
\end{aligned}$$

が得られる. こうして

$$\mu_1 = \min \left\{ \frac{\alpha d_1}{(1+r)(\alpha+2d_2)(1+d_1)}, 1+r - \frac{\alpha r}{(1+r)(\alpha+2d_2)}, \frac{\alpha}{2} \right\}$$

とおくと

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \left[\frac{d_2}{d_1} P^2 + \frac{d_2}{d_1} r Q^2 + (1+r) z^2 \right]_t & \leq -\frac{1}{2} \left[\frac{d_2}{d_1} P^2 + \frac{d_2}{d_1} r Q^2 \right] \\
& \quad - \mu_1 \left(\frac{d_2}{d_1} P^2 + \frac{d_2}{d_1} r Q^2 + (1+r) z^2 \right) + (1+r) D_w z_{xx} z
\end{aligned}$$

となる. 両辺を x で積分すると

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \left(\frac{d_2}{d_1} \|P(\cdot, t)\|^2 + \frac{d_2}{d_1} r \|Q(\cdot, t)\|^2 + (1+r) \|z(\cdot, t)\|^2 \right) & \leq -\frac{1}{2} \left(\frac{d_2}{d_1} P^2(L, t) + \frac{d_2}{d_1} r Q^2(L, t) \right) \\
& \quad - \mu_1 \left(\frac{d_2}{d_1} \|P(\cdot, t)\|^2 + \frac{d_2}{d_1} r \|Q(\cdot, t)\|^2 + (1+r) \|z(\cdot, t)\|^2 \right) + (1+r) D_w \int_0^L z_{xx} z \, dx
\end{aligned}$$

となる.

$$\int_0^L z_{xx} z \, dx = [z_x z]_0^L - \int_0^L (z_x)^2 \, dx = - \int_0^L (z_x)^2 \, dx$$

より

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left(\frac{d_2}{d_1} \|P(\cdot, t)\|^2 + \frac{d_2}{d_1} r \|Q(\cdot, t)\|^2 + (1+r) \|z(\cdot, t)\|^2 \right) \\
& \leq -\mu_1 \left(\frac{d_2}{d_1} \|P(\cdot, t)\|^2 + \frac{d_2}{d_1} r \|Q(\cdot, t)\|^2 + (1+r) \|z(\cdot, t)\|^2 \right) - (1+r) D_w \|z_x(\cdot, t)\|^2 \\
& \leq -\mu_1 \left(\frac{d_2}{d_1} \|P(\cdot, t)\|^2 + \frac{d_2}{d_1} r \|Q(\cdot, t)\|^2 + (1+r) \|z(\cdot, t)\|^2 \right)
\end{aligned}$$

となる. 従って

$$\begin{aligned} \frac{d_2}{d_1} \|P(\cdot, t)\|^2 + \frac{d_2}{d_1} r \|Q(\cdot, t)\|^2 + (1+r) \|z(\cdot, t)\|^2 \\ \leq e^{-2\mu_1 t} \left(\frac{d_2}{d_1} \|P_0\|^2 + \frac{d_2}{d_1} r \|Q_0\|^2 + (1+r) \|z_0\|^2 \right) \end{aligned} \quad (8.22)$$

が得られる. ただし,

$$P_0(x) = P(x, 0), \quad Q_0(x) = Q(x, 0), \quad z_0(x) = z(x, 0)$$

である. (8.22) から L^2 ノルムでの定常解の漸近安定性がいえる.

次に H^1 での評価をするため 1 階偏導関数を評価する. まず

$$\|z_x(\cdot, t)\|^2 \leq e^{-2\mu_2 t} \left\{ \|z_x(\cdot, 0)\| + c_1 \left(\frac{d_2}{d_1} \|P_0\|^2 + \frac{d_2}{d_1} r \|Q_0\|^2 + (1+r) \|z_0\|^2 \right) \right\} \quad (8.23)$$

を満たす μ_2, c_1 が存在することを示す.

$$z_t = D_w z_{xx} - (\alpha + d_2) z + \frac{d_2}{1+r} (P + rQ)$$

の両辺を x で微分すると

$$z_{xt} = D_w z_{xxx} - (\alpha + d_2) z_x + \frac{d_2}{1+r} (P + rQ)_x$$

となり, 両辺に z_x をかけて積分すると

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|z_x\|^2 = D_w \int_0^L z_x z_{xxx} dx - (\alpha + d_2) \int_0^L z_x^2 dx + \frac{d_2}{1+r} \int_0^L (P + rQ)_x z_x dx$$

を得る.

$$\begin{aligned} \int_0^L z_x z_{xxx} dx &= [z_x z_{xx}]_0^L - \int_0^L (z_{xx})^2 dx \\ &= -\|z_{xx}\|^2, \\ \int_0^L (P + rQ)_x z_x dx &= [(P + rQ) z_x]_0^L - \int_0^L (P + rQ) z_{xx} dx \\ &= - \int_0^L (P + rQ) z_{xx} dx \end{aligned}$$

より

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|z_x\|^2 = -D_w \|z_{xx}\|^2 - (\alpha + d_2) \|z_x\|^2 - \frac{d_2}{1+r} \int_0^L (P + rQ) z_{xx} dx$$

となる.

$$\begin{aligned}
\int_0^L P z_{xx} \, dx &\leq \left(\int_0^L P^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^L (z_{xx})^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{2} \left(\frac{d_2}{2D_w} \int_0^L P^2 \, dx + \frac{2D_w}{d_2} \int_0^L (z_{xx})^2 \, dx \right) \\
&= \frac{d_2}{4D_w} \int_0^L P^2 \, dx + \frac{D_w}{d_2} \int_0^L (z_{xx})^2 \, dx,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^L Q z_{xx} \, dx &\leq \left(\int_0^L P^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^L (z_{xx})^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{d_2}{4D_w} \int_0^L Q^2 \, dx + \frac{D_w}{d_2} \int_0^L (z_{xx})^2 \, dx
\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|z_x\|^2 &\leq -D_w \|z_{xx}\|^2 - (\alpha + d_2) \|z_x\|^2 + \frac{d_2^2}{4D_w(1+r)} (\|P\| + r\|Q\|) + D_w \|z_{xx}\|^2 \\
&= -(\alpha + d_2) \|z_x\|^2 + \frac{d_2^2}{4D_w(1+r)} (\|P\| + r\|Q\|)
\end{aligned}$$

を得る. 微分不等式

$$\frac{d}{dt} \|z_x\|^2 \leq -2(\alpha + d_2) \|z_x\|^2 + \frac{d_2^2}{2D_w(1+r)} \frac{d_1}{d_2} \left(\frac{d_2}{d_1} \|P\|^2 + \frac{d_2}{d_1} r \|Q\|^2 \right)$$

より

$$\|z_x(\cdot, t)\|^2 \leq e^{-2(\alpha+d_2)t} \left\{ \|z_x(\cdot, 0)\|^2 + \int_0^t e^{2(\alpha+d_2)s} M_1 \left(\frac{d_2}{d_1} \|P(\cdot, s)\|^2 + \frac{d_2}{d_1} r \|Q(\cdot, s)\|^2 \right) ds \right\}$$

が得られる. また

$$\begin{aligned}
\frac{d_2}{d_1} \|P(\cdot, t)\|^2 + \frac{d_2}{d_1} r \|Q(\cdot, t)\|^2 + (1+r) \|z(\cdot, t)\|^2 \\
\leq e^{-2\mu_1 t} \left(\frac{d_2}{d_1} \|P_0\|^2 + \frac{d_2}{d_1} r \|Q_0\|^2 + (1+r) \|z_0\|^2 \right)
\end{aligned}$$

より, 不等式

$$\begin{aligned}
&\|z_x(\cdot, t)\|^2 \\
&\leq e^{-2(\alpha+d_2)t} \left\{ \|z_x(\cdot, 0)\|^2 + \int_0^t e^{2(\alpha+d_2)s} M_1 e^{-2\mu_1 s} \left(\frac{d_2}{d_1} \|P_0\|^2 + \frac{d_2}{d_1} r \|Q_0\|^2 + (1+r) \|z_0\|^2 \right) ds \right\} \\
&\leq e^{-2(\alpha+d_2)t} \left\{ \|z_x(\cdot, 0)\|^2 + \frac{M_1}{2(\alpha + d_2 - \mu_1)} e^{2(\alpha+d_2-\mu_1)t} \right. \\
&\quad \left. \times \left(\frac{d_2}{d_1} \|P_0\|^2 + \frac{d_2}{d_1} r \|Q_0\|^2 + (1+r) \|z_0\|^2 \right) \right\}
\end{aligned}$$

が得られる. さらに $\mu_2 = \min \{ \mu_1, (\alpha + d_2)/2 \}$ とおくと, $\mu_2 \leq \mu_1$ より

$$\begin{aligned} \|z_x(\cdot, t)\|^2 &\leq e^{-2(\alpha+d_2)t} \left\{ \|z_x(\cdot, 0)\|^2 + \frac{M_1}{2(\alpha+d_2-\mu_2)} e^{2(\alpha+d_2-\mu_2)t} \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{d_2}{d_1} \|P_0\|^2 + \frac{d_2}{d_1} r \|Q_0\|^2 + (1+r) \|z_0\|^2 \right) \right\} \\ &\leq e^{-2\mu_2 t} \|z_x(\cdot, 0)\|^2 + \frac{M_1}{2(\alpha+d_2-\mu_2)} e^{-2\mu_2 t} \left(\frac{d_2}{d_1} \|P_0\|^2 + \frac{d_2}{d_1} r \|Q_0\|^2 + (1+r) \|z_0\|^2 \right) \end{aligned}$$

が得られる. こうして (8.23) が成り立つ.

一方, 平均値の定理より, ある $x_1 \in [0, L]$ に対して

$$\frac{1}{L} \int_0^L z(x, t) dx = z(x_1)$$

が成り立つ. さらに

$$\begin{aligned} z(0, t) &= z(x_1, t) + z(0, t) - z(x_1, t) \\ &= z(x_1, t) + \int_{x_1}^0 z_x(x, t) dx \\ &\leq \frac{1}{L} \int_0^L z(x, t) dx + \int_0^L |z_x(x, t)| dx \end{aligned}$$

の両辺の絶対値をとると

$$|z(0, t)| \leq \frac{1}{L} \int_0^L |z(x, t)| dx + \int_0^L |z_x(x, t)| dx$$

となる.

$$\int_0^L |z(x, t)| dx \leq \left(\int_0^L 1^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^L z^2(x, t) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

を用いて不等式を変形すると

$$|z(0, t)| \leq \frac{1}{\sqrt{L}} \|z\| + \sqrt{L} \|z_x\|$$

を得る. 一方 (8.21) で $x = 0$ では

$$\begin{aligned} P_x(0, t) &= d_1 z(0, t) \\ Q_x(0, t) &= d_1 z(0, t) \end{aligned}$$

なので

$$|P_x(0, t)|, |Q_x(0, t)| \leq C_1 (\|z\| + \|z_x\|) \quad (8.24)$$

が成り立つ. ただし, C_1 は適当な正数である.

次に (8.21) の 1 式と 2 式を x で微分すると

$$\begin{cases} P_{xt} + P_{xx} &= -\frac{d_1}{1+r} (P_x + rQ_x) + d_1 z_x, \\ Q_{xt} + Q_{xx} &= -(1+r) Q_x - \frac{d_1}{1+r} (P_x + rQ_x) + d_1 z_x \end{cases}$$

となり, この 1 式に $\frac{d_2}{d_1} P_x$, 2 式に $\frac{d_2}{d_1} rQ_x$ をかけて加えると

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[\frac{d_2}{d_1} P_x^2 + \frac{d_2}{d_1} rQ_x^2 \right]_t + \frac{1}{2} \left[\frac{d_2}{d_1} P_x^2 + \frac{d_2}{d_1} rQ_x^2 \right]_x \\ = -\frac{d_2}{1+r} (P_x + rQ_x)^2 - \frac{d_2}{d_1} r(1+r) Q_x^2 + d_2 z_x (P_x + rQ_x) \end{aligned}$$

となる. 右辺を変形して, ヤングの不等式を用いると

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[\frac{d_2}{d_1} P_x^2 + \frac{d_2}{d_1} rQ_x^2 \right]_t + \frac{1}{2} \left[\frac{d_2}{d_1} P_x^2 + \frac{d_2}{d_1} rQ_x^2 \right]_x \\ \leq -\frac{d_2}{1+r} (P_x + rQ_x)^2 - \frac{d_2}{d_1} r(1+r) Q_x^2 + \frac{d_2}{2(1+r)} (P_x + rQ_x)^2 + \frac{d_2(1+r)}{2} z_x^2 \\ = -\frac{d_2}{2(1+r)} (P_x + rQ_x)^2 - \frac{d_2}{d_1} r(1+r) Q_x^2 + \frac{d_2(1+r)}{2} z_x^2 \\ = -\frac{d_2}{2(1+r)} \left(\frac{P_x^2}{1+d_2} + \frac{d_1}{1+d_1} \left(P_x + \frac{(1+d_1)r}{d_1} Q_x \right)^2 - \frac{r^2}{d_1} Q_x^2 \right) \\ \quad - \frac{d_2}{d_1} r(1+r) Q_x^2 + \frac{d_2(1+r)}{2} z_x^2 \\ \leq -\frac{d_2}{2(1+r)(1+d_2)} P_x^2 - \frac{d_2 r(2r^2 + 3r + 2)}{d_1 2(1+r)} Q_x^2 + \frac{d_2(1+r)}{2} z_x^2 \end{aligned}$$

となる.

$$\mu_3 = \min \left\{ \frac{d_1}{2(1+r)(1+d_2)}, \frac{2r^2 + 3r + 2}{2(1+r)} \right\}$$

と置き, 両辺を x で積分すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{d_2}{d_1} \|P_x\|^2 + \frac{d_2}{d_1} r \|Q_x\|^2 \right) &\leq -\frac{1}{2} \int_0^L \left[\frac{d_2}{d_1} P_x^2 + \frac{d_2}{d_1} rQ_x^2 \right]_x dx \\ &\quad - \mu_3 \left(\frac{d_2}{d_1} \|P_x\|^2 + \frac{d_2}{d_1} r \|Q_x\|^2 \right) + \frac{d_2(1+r)}{2} \|z_x\|^2 \end{aligned}$$

となる. (8.24) より

$$(P_x(0, t))^2 + r(Q_x(0, t))^2 \leq 2C_1^2(1+r) (\|z\|^2 + \|z_x\|^2)$$

を使うと、微分不等式

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{d_2}{d_1} \|P_x\|^2 + \frac{d_2}{d_1} r \|Q_x\|^2 \right) &\leq C_1^2 (1+r) (\|z\|^2 + \|z_x\|^2) \\ &\quad - \mu_3 \left(\frac{d_2}{d_1} \|P_x\|^2 + \frac{d_2}{d_1} r \|Q_x\|^2 \right) + \frac{d_2(1+r)}{2} \|z_x\|^2 \end{aligned}$$

が得られる.

$$C_2 = C_1^2 (1+r) + \frac{d_2(1+r)}{2}$$

と置くと

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{d_2}{d_1} \|P_x\|^2 + \frac{d_2}{d_1} r \|Q_x\|^2 \right) &\leq -\mu_3 \left(\frac{d_2}{d_1} \|P_x\|^2 + \frac{d_2}{d_1} r \|Q_x\|^2 \right) + C_2 (\|z\|^2 + \|z_x\|^2) \\ &\leq -\mu_4 \left(\frac{d_2}{d_1} \|P_x\|^2 + \frac{d_2}{d_1} r \|Q_x\|^2 \right) + C_2 (\|z\|^2 + \|z_x\|^2) \end{aligned}$$

を得る. ただし, $0 < \mu_4 < \min(\mu_2, \mu_3)$ である. ここで両辺に $e^{2\mu_4 t}$ をかけて, 区間 $[0, t]$ で積分すると

$$e^{2\mu_4 t} \left(\frac{d_2}{d_1} \|P_x\|^2 + \frac{d_2}{d_1} r \|Q_x\|^2 \right) - \left(\frac{d_2}{d_1} \|(P_0)_x\|^2 + \frac{d_2}{d_1} r \|(Q_0)_x\|^2 \right) \leq 2C_2 \int_0^t e^{2\mu_4 s} (\|z\|^2 + \|z_x\|^2) ds$$

となる. 右辺の積分を評価する. (8.22), (8.23) より

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{2\mu_4 s} (\|z\|^2 + \|z_x\|^2) ds &\leq \int_0^t e^{2(\mu_4 - \mu_1)s} (1+r) \|z_0\|^2 ds \\ &\quad + \int_0^t e^{2(\mu_4 - \mu_2)s} \left\{ \|z_x(\cdot, 0)\| + C_1 \left(\frac{d_2}{d_1} \|P_0\|^2 + \frac{d_2}{d_1} r \|Q_0\|^2 + (1+r) \|z_0\|^2 \right) \right\} \\ &\leq \frac{1}{2(\mu_1 - \mu_4)} (1+r) \|z_0\|^2 \\ &\quad + \frac{1}{\mu_2 - \mu_4} \left\{ \|z_x(\cdot, 0)\| + C_1 \left(\frac{d_2}{d_1} \|P_0\|^2 + \frac{d_2}{d_1} r \|Q_0\|^2 + (1+r) \|z_0\|^2 \right) \right\} \end{aligned}$$

となる. 以上より C_3 を適当にとれば

$$\begin{aligned} \frac{d_2}{d_1} \|P_x\|^2 + \frac{d_2}{d_1} r \|Q_x\|^2 &\leq C_3 e^{-\mu_4 t} \left(\frac{d_2}{d_1} \|(P_0)_x\|^2 + \frac{d_2}{d_1} r \|(Q_0)_x\|^2 + (1+r) \|(z_0)_x\|^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{d_2}{d_1} \|P_0\|^2 + \frac{d_2}{d_1} r \|Q_0\|^2 + (1+r) \|z_0\|^2 \right) \quad (8.25) \end{aligned}$$

が成り立つ. (8.22), (8.23), (8.25) より **定理 8.1** の主張が成り立つことがわかる.

9 まとめ

以下では本研究で得られた結果をまとめる.

酸素輸送・交換のモデル方程式 (2.7) の数値計算結果から $d_1 = 3.5$, $L = 3.0$ の場合には $t = 2.8$ で定常状態に達し, 低い濃度で流入してきた血液中の O_2 が肺胞に接した毛細血管の出口では供給され, 高い濃度に維持されている事が確認できた. さらに肺胞における O_2 濃度も高い濃度に維持されている事がわかった. これは実際の肺胞毛細血管での O_2 濃度変化の特徴をうまく再現できている. $d_1 = 0.05$, $L = 190$ の数値計算では, $t = 160$ で定常状態に達し, 低い濃度で流入してきた血液中の O_2 が毛細血管の出口では高い濃度に維持されている. しかし, $d_1 = 3.5$, $L = 3.0$ の場合と比べると定常状態に落ち着くまでの時間がかかりかかると確認できた. このモデル方程式の場合には適当な境界条件, 初期条件を課すと解の存在, 定常解の存在や, その漸近安定性が証明できた. しかし, 解の漸近安定性の証明では d_1 を大きく取る必要があった.

二酸化炭素輸送・交換のモデル方程式 (8.2) の数値計算結果から $d_1 = 3.0$ $L = 3.0$ の場合には ($t = 2.7$) で定常状態に達し, 高い濃度で流入してきた血液中の CO_2 が肺胞に接した毛細血管の出口では除去され, 低い濃度に維持されている事が確認できた. $d_1 = 0.05$ $L = 500.0$ の数値計算では, $t = 320$ で定常状態に達し, 高い濃度で流入してきた血液中の CO_2 が毛細血管の出口では除去され, 低い濃度に維持されていることが確認できたが, $d_1 = 3.0$ $L = 3.0$ の場合と比べると定常状態に落ち着くまでの時間がかかりかかると確認できた. このモデルは線形の方程式なので酸素の場合に比べて扱い易い. さらに酸素のモデルに比べて次のような性質がいえる. 定常解の存在については解が境界値 $x = 0$ で最大値になってる. また, 漸近安定性では H^1 の位相で収束することまで示すことができる.

酸素の数値計算では d_1 を十分小さくとっても定常解は安定であることが確認できたので, 今後の課題として d_1 が小さいときの定常解の漸近安定性を数学的に検証したい. ところで L を十分大きく取るということは毛細血管の長さを長くとることに対応するので肺胞毛細血管間の拡散係数 d_1 を小さく取っても酸素は十分供給され, 二酸化炭素は十分除去されると解釈できる. しかし一方で除去するための時間が多くかかってしまう. したがって酸素を供給または二酸化炭素を除去するために効率の良い長さに毛細血管が作られているかどうかということを検証することも興味ある問題である.

謝辞

この度、森田善久教授には貴重な時間を頂き、論文作成にあたって丁寧にご指導いただきました。深く感謝致します。

また、同研究室の方々にも多くの助言を頂きました。ありがとうございました。

参考文献

- [1] J. Keener and J. Sneyd, *Mathematical Physiology*, Springer, 1998.
- [2] J. T. Ottesen, M. S. Olufsen and J. K. Larsen, *Applied Mathematical Models in Human Physiology*, Monographs on Mathematical Modeling and Computation, SIAM, 2004.
- [3] 安倍紀一郎, 森田敏子, 「呼吸機能学と呼吸疾患のしくみ」, 日総研出版, 2009.
- [4] 林正健二, 「解剖生理学」, メディカ出版, 2004.
- [5] Y. Morita and N. Shinjo, A weakly coupled system of advection-reaction and diffusion equations in physiological gas transport, *Japan J. Indust. Appl. Math.* Vol.27, 437-463, 2015.
- [6] 藤田宏, 「関数解析」, 岩波書店, 2007
- [7] S. Jimbo and Y. Morita, Lyapunov function and spectrum comparison for a reaction-diffusion system with mass conservation, *J. Differential Equations*, Vol.255, 1657-1683, 2013.
- [8] ハル・スミス, ポール・ウォルトマン, 「微生物の力学系」, 竹内康博 (監訳), 日本評論社, 2004.