

再生可能資源の動学ゲーム理論的分析

中 川 義 行
山 下 章 夫

キーワード

動学ゲーム, 再生可能資源, Cournot-Nash 競争, Stackelberg 競争

1 はじめに

本稿¹⁾は、動学ゲーム理論の枠組の中で、再生可能資源の経済学的分析を行ったものである。本稿では再生可能資源の一種として、特に漁業資源に焦点を当て、その獲得競争を分析する。計画期間が無限の場合における、漁業資源の動学ゲーム理論的分析は、Levhari, D. and Mirman [3] で 2 人ゲーム Cournot-Nash 競争モデルとして展開されている。奥口 [4] は、そのモデルを n 人ゲーム Cournot-Nash 競争に拡張して、プレイヤー（国家）の数が増加した場合の効果を分析している。E. Denisova, A. Garnaev [1] は、プレイヤー間（国家間）に意思決定の順序が存在する有限期間モデルで、1 人の先導者と $n-1$ 人の追従者グループから構成される n 人ゲームの Stackelberg 競争モデルを分析している。D. Sherali [5] は、漁業資源の動学ゲームではないが Stackelberg 競争の一般化として、先導者が M 人と追従者が N 人の静学的市場モデルを定義し、その均衡解の存在を示している。本稿ではこれらの先行研究に基づいて、有限期間における漁業資源の動学的獲得競争に関する多人数間 Stackelberg 競争モデルの一部を考察した。この多人数間 Stackelberg 競争モデルは、優先的に意思決定を行うことができる先導者グループと、残された資源で競争を行う追従者グループに分かれ、各グループ内では Cournot-Nash 競争を行うモデルである。これは次の 4 種のタイプに分類される。

1. 先導者または追従者のグループに属するプレイヤー数が 0 であれば、 n 人で Cournot-Nash 競争のみを行う奥口のモデルになる。
2. 1 人の先導者と $n-1$ 人の追従者グループであれば、E. Denisova, A. Garnaev のモデルになる。
3. $n-1$ 人の先導者グループと 1 人の追従者であれば、本稿のモデルになる。これは先導者と追従者の非対称性から E. Denisova, A. Garnaev のものとは異なるモデルになる。
4. いずれのグループもプレイヤー数が 2 以上であれば、グループ内では Cournot-Nash 競争を、グループ間では Stackelberg 競争を行う混成モデルとなるが、これは本稿では扱っていない。

第 2 節では、資源の遷移式として、Levhari, D. and Mirman [3] と同様の生物学的成長方程式

1) 本研究は、龍谷大学経営学会の研究部会「社会科学の研究や教育での Maxima の活用」の 2015 年度の研究成果である。

と対数形の効用関数を仮定して n 人ゲームのモデルを構成する。第3節では、 n 人の対等なプレイヤーによる Cournot-Nash 競争における均衡解を導く。第4節では、 $n-1$ 人の先導者グループと1人の追随者による $(n, n-1)$ -Stackelberg 競争における均衡解を導く。第5節では、Cournot-Nash 競争が行われる場合の資源量の時間変化と $(n, n-1)$ -Stackelberg 競争が行われる場合のそれとを比較する。最後に本稿のモデルを適用できるであろう具体例と残された問題点を述べる。

2 動学ゲームモデル

本節で考察する経済は、 n 人のプレイヤー $\mathcal{P}_n := \{1, 2, \dots, n\} \subset \mathbf{Z}$ で構成されているものとする。計画期間 $\mathcal{T} = \{0, 1, \dots, T\} \subset \mathbf{R}_{\geq 0}$ において、各プレイヤーは每期資源を消費し、最終期 T の資源は所与の比率で各プレイヤーにすべて帰属するものと仮定する。

時間 $t \in \mathbf{R}_{\geq 0}$ における資源の存在量を $x_t \in \mathbf{R}_+$ とし、これを状態変数とする。この資源量 x_t が自然状態、すなわち経済活動で消費されことなく変化するとき、その動学方程式の一つとして、増殖度を表す定数 $0 < r < 1$ を用いて

$$x_{t+1} = x_t^r$$

と記述されるモデルが知られている。この自然状態の動学方程式を、初期値 x_0 の下で解くと

$$x_t = x_0^{r^t}$$

となる。これは任意の $0 < r < 1$ に対して $\lim_{t \rightarrow \infty} x_t = 1$ となる。すなわち、このモデルでは定常状態の資源量は1である。以後、資源量を計量するときは、この自然状態の動学方程式における定常状態の資源量で規格化して測るものとする。

プレイヤー $i \in \mathcal{P}_n$ の、時間 t における資源の消費量を $a_{it} \in \mathbf{R}_+$ とし、これを制御変数とする。各期の消費量は $0 \leq t \leq T-1$ について、

$$0 < \sum_{i=1}^n a_{it} < x_t$$

という制約条件に従うものと仮定する。プレイヤー i が資源の消費 a_{it} から得る効用は、次の効用関数で表されると仮定する。

$$u_i(a_{it}) = \log(a_{it}), \quad (i \in \mathcal{P}_n)$$

また効用の割引因子は、時間に依存しないプレイヤー毎に異なる定数と仮定して、それぞれ β_i とする。

ここで t 期に消費されない資源 s_t として

$$s_t := x_t - \sum_{i=1}^n a_{it}$$

と置くと、次期の成長・増殖のために使われる貯蓄とみることができ、次期の資源量を変化させる投資とみすることもできる。本稿では“資源が計画期間内において再生可能である”ということをも、投資の水準 s_t に対して、 $x_{t+1} > s_t$ を満たすような $t \in \mathcal{T}$ が存在すると定義する。すなわち、この不等式は t 期における資源の投資量よりも多い資源量が $t+1$ 期において再生されることを意味する²⁾。以下では、再生可能資源として漁業資源を考える。

2) 本稿では再生可能という用語を、経済主体が自然の資源を消費した場合に、その資源が自己増殖する意味に解釈する。本文中の不等式とは逆の不等式 $x_{t+1} \leq s_t$ は、 t 期に資源を消費することで、 $t+1$ 期の資源

本稿では、以下のモデル (D) を考察する。投資と次期の資源量の関係が、次の動学方程式³⁾で表されるものと仮定する。

$$x_{t+1} = s_t^r = \left(x_t - \sum_{i=1}^n a_{i,t} \right)^r \quad (0 \leq t \leq T-1)$$

$$x_0 \in (0, 1) : \text{given}$$

ただし、 r は自然状態の動学方程式における増殖度である。

また、最終期 $t=T$ において、 $x_T > 0$ とする。その資源量 x_T のすべてを所与の一定比率

$$a_{1,T} : a_{2,T} : \cdots : a_{n,T} = \exp(\sigma_1) : \exp(\sigma_2) : \cdots : \exp(\sigma_n),$$

$$\sum_{i=1}^n \exp(\sigma_i) = 1$$

で獲得するものとし、すべての $\sigma_i < 0$ はすべてのプレイヤーに既知と仮定する⁴⁾。

3 Cournot-Nash 競争

本節では、次節で論じる Stackelberg 競争と比較するために、意思決定の優先順位が存在しない場合、すなわち Cournot-Nash 競争における各期の最適消費量と価値関数を考察する。この考察は E. Denisova, A. Garnaev [1] による導出方法とほぼ同じなので、詳細はそちらを参照していただきたい。本節では、差違の部分と全体の証明の概略を述べるに留める。

3.1 各期における Cournot-Nash 均衡

プレイヤー $i \in \mathcal{P}_n$ の効用の割引因子を β_i として、効用最大化問題を次のように定める。

効用最大化問題 (1)

$$\begin{aligned} & \underset{\{a_{i,t} | i \in \mathcal{P}_n\}}{\text{Maximize}} \quad \left(\sum_{t=0}^{T-1} \beta_i^t u_i(a_{i,t}) \right) + \beta_i^T u_i(x_T \exp(\sigma_i)) \\ & \text{Subject to} \quad x_{t+1} = \left(x_t - \sum_{i=1}^n a_{i,t} \right)^r, \quad (0 \leq t \leq T-1) \\ & \quad \quad \quad x_0 : \text{given} \end{aligned}$$

E. Denisova, A. Garnaev [1] の問題設定との差異は、最終期における資源獲得量の表現なので、目的関数の級数和の末項だけが異なる。また、数式の簡潔化のために、 $0 \leq t \leq T-1$ に対して以下の表記を用いる。

$$\alpha_{i,t} = \sum_{\tau=1}^{T-t} (\beta_i r)^\tau$$

$$S_{X,t} = \sum_{i \in \mathcal{X}} \frac{1}{\alpha_{i,t}}$$

定理 3.1. 再生可能資源の Cournot-Nash 競争

再生可能資源の獲得競争モデル (D) において、Cournot-Nash 競争を行うときの均衡解は、 $t \in \mathcal{T}$ 期におけるプレイヤー $i \in \mathcal{P}_n$ の最適消費量 $a_{i,t}^*$ と価値関数 $v_i(t, x_t)$ がそれぞれ

↘ 量が t 期のそれに比して減少することを意味する。すべての投資水準 s_t に対して、この減少の不等式が成り立つ場合、その資源は非再生可能資源とする。Dutta [2], p.277 を参照のこと。

3) この方程式は、Levhari-Mirman [3] の動学方程式を n 人の場合に拡張したものである。

4) E. Denisova, A. Garnaev [1] では、最終期でもプレイヤー間の競争を仮定している。

$$a_{it}^* = \frac{x_t}{a_{it}(1+S_{\mathcal{P}n,t})}$$

$$v_i(t, x_t) = \beta_i^t \left(\left(\beta_i^{T-t} \sigma_i - \sum_{\tau=t}^{T-1} \beta_i^{\tau-t} (\log(a_{i,\tau}) + (1+\alpha_{i,\tau}) \log(1+S_{\mathcal{P}n,\tau})) \right) \right. \\ \left. + (1+\alpha_{i,t}) \log(x_t) \right)$$

として与えられる。これによって各期の資源量 x_t ($t \geq 1$) が

$$x_t = x_0^{r^t} \prod_{\tau=1}^t (1+S_{\mathcal{P}n,\tau-1})^{-r^{t-\tau+1}}$$

として与えられる。

3.2 証明の概略

効用最大化問題の Cournot-Nash 均衡を計算するために、後向きの帰納法を使う。すなわち、 T 期から 0 期へと期間を遡って、最適解 $\{a_{it}^*\}$ と価値関数 $v_i(t, x_t)$ の組を期間 $0 \leq t \leq T-1$ において求める。

3.2.1 後向きの帰納法における初期条件

モデルの設定により、最終期 $t=T$ においてプレイヤーたちはゲームを行わず、所与の獲得比率に基づいて資源を自動的に獲得する。すなわち、プレイヤー $i \in \mathcal{P}_n$ が獲得する資源量 a_{iT}^* は

$$a_{iT}^* = x_T \exp(\sigma_i)$$

であり、そこから得られる価値関数は

$$v_i(T, x_T) = \beta_i^T \log(x_T \exp(\sigma_i)) = \beta_i^T (\sigma_i + \log(x_T))$$

となる。なお、 $v_i(T, x_T)$ を $\log(x_T)$ の 1 次関数と割引因子との積とみなすことで、定数項列 A_{iT} 、1 次の係数列 B_{iT} の末項を

$$A_{iT} = \sigma_i, \quad B_{iT} = 1 \tag{1}$$

と置くことができる。

3.2.2 $T-\tau$ 期の Cournot-Nash 均衡

プレイヤー $i \in \mathcal{P}_n$ は、 $T-\tau$ 期の状態変数 $x_{T-\tau}$ および $T-\tau+1$ 期のプレイヤー i の価値関数

$$v_i(T-\tau+1, x_{T-\tau+1}) = \beta_i^{T-\tau+1} (A_{iT-\tau+1} + B_{iT-\tau+1} \log(x_{T-\tau+1}))$$

を所与として効用最大化を行う。すなわち、次の効用最大化問題を解くことになる。

効用最大化問題 (2)

$$\begin{aligned} & \underset{\{a_{iT-\tau}\}}{\text{Maximize}} \quad v_i(T-\tau, x_{T-\tau}) = \beta_i^{T-\tau} (\log(a_{iT-\tau}) + v_i(T-\tau+1, x_{T-\tau+1})) \\ & \text{Subject to} \quad x_{T-\tau+1} = \left(x_{T-\tau} - \sum_{i \in \mathcal{P}_n} a_{iT-\tau} \right)^r, \\ & \quad \quad \quad x_{T-\tau}: \text{given} \end{aligned}$$

ここからプレイヤー i の最適獲得資源量が

$$a_{i,T-\tau}^* = \frac{x_{T-\tau}}{\beta_i r B_{i,T-\tau+1} \left(1 + \sum_{j \in \mathcal{P}_n} \frac{1}{\beta_j r B_{j,T-\tau+1}} \right)}$$

となり、価値関数が

$$\begin{aligned} & v_i(T-\tau, x_{T-\tau}) \\ &= \beta_i^{T-\tau} \left(\beta_i A_{i,T-\tau+1} - \log(\beta_i r B_{i,T-\tau+1}) - (1 + \beta_i r B_{i,T-\tau+1}) \log \left(1 + \sum_{j \in \mathcal{P}_n} \frac{1}{\beta_j r B_{j,T-\tau+1}} \right) \right. \\ & \quad \left. + (1 + \beta_i r B_{i,T-\tau+1}) \log(x_{T-\tau}) \right) \end{aligned}$$

となる。これを $\log(x_{T-\tau})$ の 1 次関数と割引因子との積とみなすことで、 $A_{i,T-\tau}$ 、 $B_{i,T-\tau}$ に関する連立漸化式

$$\begin{aligned} A_{i,T-\tau} &= \beta_i A_{i,T-\tau+1} - \log(\beta_i r B_{i,T-\tau+1}) - (1 + \beta_i r B_{i,T-\tau+1}) \log \left(1 + \sum_{j \in \mathcal{P}_n} \frac{1}{\beta_j r B_{j,T-\tau+1}} \right) \\ B_{i,T-\tau} &= 1 + \beta_i r B_{i,T-\tau+1} \end{aligned}$$

を得るので、これと末項の条件(1)を用いて漸化式を解く。その $A_{i,t}$ 、 $B_{i,t}$ を $a_{i,t}^*$ と $v_i(t, x_t)$ に代入して最適消費量と価値関数が求まり、さらに最適消費量を x_t の動学方程式の $a_{i,t}^*$ に代入して定理を得る。

[証明終]

4 Stackelberg 競争

本節では、再生可能資源モデル (D) について n 人ゲームにおいて、 m 人のプレイヤーから成る先導者グループ $\mathcal{L}$ と $n-m$ 人のプレイヤーから成る追随者グループ $\mathcal{F}$ が存在する状況を考察する。そして各期において、 $\mathcal{L}$ が最初に Cournot-Nash 競争によって消費量を決定し、残った資源に対して $\mathcal{F}$ が Cournot-Nash 競争で消費量を決定するものとする。ただし、 $\mathcal{L}$ または $\mathcal{F}$ が 1 人のとき、すなわち、 $m=1$ または $n-m=1$ のとき、そのグループは Cournot-Nash 競争を行わないものとする。本稿ではこのような n 人ゲームで先導者が m 人存在する競争の形態を、 (n, m) -Stackelberg 競争と呼ぶことにする。

この表記に従うと、E. Denisova, A. Garnaev [1] では、先導者グループが Cournot-Nash 競争を行わない $(n, 1)$ -Stackelberg 競争を求めている。そこで、我々は追随者グループが Cournot-Nash 競争を行わない $(n, n-1)$ -Stackelberg 競争をモデル D について以下の結論を得た。

4.1 $(n, n-1)$ -Stackelberg 競争

本稿のモデルでは、期間 $\mathcal{T}$ において先導者と追随者の入れ替わりはないと仮定する。そのため $\mathcal{L} \cap \mathcal{F} = \emptyset$ 、 $\mathcal{L} \cup \mathcal{F} = \mathcal{P}_n$ であり、かつ $\mathcal{L}$ のプレイヤー数が $n-1$ であることから、 $\mathcal{L} := \{1, 2, \dots, n-1\}$ 、 $\mathcal{F} := \{n\}$ として一般性を失わない。

定理 4.1. 再生可能資源の $(n, n-1)$ -Stackelberg 競争

再生可能資源の獲得競争モデル (D) において、 $(n, n-1)$ -Stackelberg 競争を行うときの均衡解は、 $t \in \mathcal{T}$ 期における先導プレイヤー $i \in \mathcal{L}$ の最適消費量 $a_{i,t}^*$ と価値関数 $v_i(t, x_t)$ がそれぞれ

$$a_{i,t}^* = \frac{x_t}{\alpha_{i,t}(1 + S_{\mathcal{L},t})},$$

$$v_i(t, x_t) = \beta_i^t \left(\left(\beta_i^{T-t} \sigma_i + \sum_{\tau=t}^{T-1} \beta_i^{\tau-t} ((\alpha_{i,\tau} - 1) \log(\alpha_{i,\tau}) - \alpha_{i,\tau} \log(1 + \alpha_{i,\tau}) \right. \right. \\ \left. \left. - (1 + \alpha_{i,t}) \log(1 + S_{\mathcal{L},\tau}) \right) + (1 + \alpha_{i,t}) \log(x_t) \right)$$

として与えられ、追従プレイヤー n の最適消費量 $a_{i,t}^*$ と価値関数 $v_i(t, x_t)$ がそれぞれ

$$a_{n,t}^* = \frac{x_t}{(1 + a_{n,t})(1 + S_{\mathcal{L},t})}, \\ v_n(t, x_t) = \beta_n^t \left(\left(\beta_n^{T-t} \sigma_n + \sum_{\tau=t}^{T-1} \beta_n^{\tau-t} (\alpha_{n,\tau} \log(\alpha_{n,\tau}) - (1 + \alpha_{n,\tau}) (\log(1 + \alpha_{n,\tau}) + \log(1 + S_{\mathcal{L},\tau}))) \right) \right. \\ \left. + (1 + a_{n,t}) \log(x_t) \right)$$

として与えられる。これによって各期の資源量 $x_t (t \geq 1)$ が

$$x_t = x_0^r \prod_{\tau=1}^t \left(\left(1 + \frac{1}{a_{n,\tau}} \right) (1 + S_{\mathcal{L},\tau-1}) \right)^{-r^{\tau-t+1}}$$

として与えられる。

4.2 定理の証明

$(n, n-1)$ -Stackelberg 競争における各期の消費量と価値関数を、前節と同様に後向きの帰納法で求める。

4.2.1 後向きの帰納法における初期条件

最終期 $t=T$ は、前節と同じなので、プレイヤー $i \in \mathcal{P}_n$ が獲得する資源量 $a_{i,T}^*$ と価値関数 $v_i(T, x_T)$ は

$$a_{i,T}^* = x_T \exp(\sigma_i) \\ v_i(T, x_T) = \beta_i^T (\sigma_i + \log(x_T))$$

として一括で与えられる。この価値関数を $\log(x_T)$ の 1 次関数と割引因子の積とみなすことで $v_i(t, x_t)$ の定数項列 $\Gamma_{i,t}$ 、1 次の係数列 $\Delta_{i,t}$ 、 $v_{n,t}$ の定数項列 E_t 、1 次の係数列 Z_t の末項を

$$\Gamma_{i,T} = \sigma_i, \quad E_T = \sigma_n, \quad \Delta_{i,T} = Z_T = 1 \quad (2)$$

と置くことができる。

4.2.2 $T-\tau$ 期の Stackelberg 均衡

プレイヤー n は、他のすべてのプレイヤー $i \in \mathcal{L}$ の最適消費量 $a_{i,T-\tau}^*$ を知った上で自己の最適消費量を決める。すなわち、次の効用最大化問題を解くことになる。

効用最大化問題 (3)

$$\begin{aligned} & \underset{\{a_{n,T-\tau}\}}{\text{Maximize}} \quad v_n(T-\tau, x_{T-\tau}) = \beta_n^{T-\tau} u(a_{n,T-\tau}) + \beta_n^{T-\tau+1} v_n(T-\tau+1, x_{T-\tau+1}) \\ & \text{Subject to} \quad x_{T-\tau+1} = \left(x_{T-\tau} - a_{n,T-\tau} - \sum_{i \in \mathcal{L}} a_{i,T-\tau}^* \right)^r, \\ & \quad x_{T-\tau}: \text{given} \end{aligned}$$

$T-\tau$ 期におけるプレイヤー n の目的関数 $v_n(T-\tau, x_{T-\tau})$ は次式で表される。

$$\begin{aligned}
v_n(T-\tau, x_{T-\tau}) &= \beta_n^{T-\tau} u(a_{n,T-\tau}) + \beta_n^{T-\tau+1} v_n(T-\tau+1, x_{T-\tau+1}) \\
&= \beta_n^{T-\tau} \log(a_{n,T-\tau}) + \beta_n^{T-\tau+1} \left(E_{T-\tau+1} + Z_{T-\tau+1} \log \left(\left(x_{T-\tau} - a_{n,T-\tau} - \sum_{i \in \mathcal{L}} a_{i,T-\tau}^* \right)^r \right) \right)
\end{aligned}$$

この $v_n(T-\tau, x_{T-\tau})$ の $a_{n,T-\tau}$ に関する停留条件から、次のプレイヤー n の反応関数が得られる。

$$a_{n,T-\tau} = \frac{x_{T-\tau} - \sum_{i \in \mathcal{L}} a_{i,T-\tau}^*}{\beta_n r Z_{T-\tau+1} + 1}$$

次に先導者グループのプレイヤー $i \in \mathcal{L}$ は、プレイヤー n の反応関数を織り込み済みとして、自己の最適消費量を決める。すなわち、次の効用最大化問題を解くことになる。

効用最大化問題 (4)

$$\begin{aligned}
&\underset{\{a_{i,T-\tau} \mid i \in \mathcal{L}\}}{\text{Maximize}} \quad v_i(T-\tau, x_{T-\tau}) = \beta_i^{T-\tau} u(a_{i,T-\tau}) + \beta_i^{T-\tau+1} v_i(T-\tau+1, x_{T-\tau+1}) \\
&\text{Subject to} \quad x_{T-\tau+1} = \left(x_{T-\tau} - \frac{x_{T-\tau} - \sum_{i \in \mathcal{L}} a_{i,T-\tau}}{\beta_n r Z_{T-\tau+1} + 1} - \sum_{i \in \mathcal{L}} a_{i,T-\tau} \right)^r, \\
&\quad x_{T-\tau} : \text{given}
\end{aligned}$$

$T-\tau$ 期におけるプレイヤー i の目的関数 $v_i(T-\tau, x_{T-\tau})$ は次式で表される。

$$\begin{aligned}
&v_i(T-\tau, x_{T-\tau}) \\
&= \beta_i^{T-\tau} u(a_{i,T-\tau}) + \beta_i^{T-\tau+1} v_i(T-\tau+1, x_{T-\tau+1}) \\
&= \beta_i^{T-\tau} \log(a_{i,T-\tau}) \\
&\quad + \beta_i^{T-\tau+1} \left(\Gamma_{i,T-\tau+1} + \Delta_{i,T-\tau+1} \log \left(\left(x_{T-\tau} - \frac{x_{T-\tau} - \sum_{i \in \mathcal{L}} a_{i,T-\tau}}{\beta_n r Z_{T-\tau+1} + 1} - \sum_{i \in \mathcal{L}} a_{i,T-\tau} \right)^r \right) \right)
\end{aligned}$$

この各 $v_{i,T-\tau}$ の $a_{i,T-\tau}$ に関する停留条件から、次の反応関数族 $\{a_{i,T-\tau} \mid i \in \mathcal{L}\}$ が得られる。

$$a_{i,T-\tau} = \frac{x_{T-\tau} - \sum_{j \in \mathcal{L} \setminus \{i\}} a_{j,T-\tau}}{\beta_i r \Delta_{i,T-\tau+1} + 1}$$

$T-\tau$ 期の Cournot-Nash 均衡は、反応関数族を連立方程式とみなして解くことで得られる。

$$a_{i,T-\tau}^* = \frac{x_{T-\tau}}{\beta_i r \Delta_{i,T-\tau+1} \left(1 + \sum_{j \in \mathcal{L}} \frac{1}{\beta_j r \Delta_{j,T-\tau+1}} \right)}$$

よって、プレイヤー n の消費量はこれらを反応関数に代入して得られる。

$$a_{n,T-\tau}^* = \frac{x_{T-\tau}}{(\beta_n r Z_{T-\tau+1} + 1) \left(1 + \sum_{j \in \mathcal{L}} \frac{1}{\beta_j r \Delta_{j,T-\tau+1}} \right)}$$

以上で各プレイヤーの $T-\tau$ 期の消費量が決まる。

次に $T-\tau$ 期の価値関数 $v_i(T-\tau, x_{T-\tau})$ を求めるには、これらの最適消費量を目的関数に代入して得られる。先行者グループの価値関数は

$$\begin{aligned}
& v_i(T-\tau, x_{T-\tau}) \\
&= \beta_i^{T-\tau} \left(\beta_i \Gamma_{i,T-\tau+1} + \beta_i r \Delta_{i,T-\tau+1} \log \left(\frac{\beta_n r Z_{T-\tau+1}}{1 + \beta_n r Z_{T-\tau+1}} \right) - \log(\beta_i r \Delta_{i,T-\tau+1}) \right. \\
&\quad \left. - (1 + \beta_i r \Delta_{i,T-\tau+1}) \log \left(1 + \sum_{j \in \mathcal{L}} \frac{1}{\beta_j r \Delta_{j,T-\tau+1}} \right) + (1 + \beta_i r \Delta_{i,T-\tau+1}) \log(x_{T-\tau}) \right)
\end{aligned}$$

となり、追従プレイヤーの価値関数は

$$\begin{aligned}
& v_n(T-\tau, x_{T-\tau}) \\
&= \beta_n^{T-\tau} \left(\beta_n E_{T-\tau+1} + \beta_n r Z_{T-\tau+1} \log(\beta_n r Z_{T-\tau+1}) - (1 + \beta_n r Z_{T-\tau+1}) \log(1 + \beta_n r Z_{T-\tau+1}) \right. \\
&\quad \left. - (1 + \beta_n r Z_{T-\tau+1}) \log \left(1 + \sum_{j \in \mathcal{L}} \frac{1}{\beta_j r \Delta_{j,T-\tau+1}} \right) + (1 + \beta_n r Z_{T-\tau+1}) \log(x_{T-\tau}) \right)
\end{aligned}$$

となる。これらを $\log(x_{T-\tau})$ の 1 次関数と割引因子の積とみなすことで次の 4 元連立漸化式を得る。

$$\begin{aligned}
\Gamma_{i,T-\tau} &= \beta_i \Gamma_{i,T-\tau+1} + \beta_i r \Delta_{i,T-\tau+1} \log \left(\frac{\beta_n r Z_{T-\tau+1}}{1 + \beta_n r Z_{T-\tau+1}} \right) - \log(\beta_i r \Delta_{i,T-\tau+1}) \\
&\quad - (1 + \beta_i r \Delta_{i,T-\tau+1}) \log \left(1 + \sum_{j \in \mathcal{L}} \frac{1}{\beta_j r \Delta_{j,T-\tau+1}} \right) \\
\Delta_{i,T-\tau} &= 1 + \beta_i r \Delta_{i,T-\tau+1} \\
E_{T-\tau} &= \beta_n E_{T-\tau+1} + \beta_n r Z_{T-\tau+1} \log \left(\frac{\beta_n r Z_{T-\tau+1}}{1 + \beta_n r Z_{T-\tau+1}} \right) - \log(1 + \beta_n r Z_{T-\tau+1}) \\
&\quad - (1 + \beta_i r \Delta_{i,T-\tau+1}) \log \left(1 + \sum_{j \in \mathcal{L}} \frac{1}{\beta_j r \Delta_{j,T-\tau+1}} \right) \\
Z_{T-\tau} &= 1 + \beta_i r Z_{T-\tau+1}
\end{aligned}$$

これらと末項の条件(2)から、漸化式を解くと

$$\begin{aligned}
\Gamma_{i,t} &= \beta_i^t \sigma_i + \sum_{\tau=1}^t \beta_i^\tau ((\alpha_{i,\tau} - 1) \log(\alpha_{i,\tau}) - \alpha_{i,\tau} \log(1 + \alpha_{i,\tau}) - (1 + \alpha_{i,\tau}) \log(1 + S_{\mathcal{L},\tau})) \\
\Delta_{i,t} &= 1 + \alpha_{i,t} \\
E_t &= \beta_n^t \sigma_n + \sum_{\tau=1}^t \beta_n^\tau (\alpha_{i,\tau} \log(\alpha_{i,\tau}) - (1 + \alpha_{i,\tau}) (\log(1 + \alpha_{i,\tau}) + \log(1 + S_{\mathcal{L},\tau}))) \\
Z_t &= 1 + \alpha_{n,t}
\end{aligned}$$

を得る。

最後に、 $t = T - \tau \geq 1$ 期の資源量 x_t は、動学方程式に最適資源量をすべて代入すると

$$x_t = x_0^{r^t} \prod_{\tau=1}^t \left(\left(1 + \frac{1}{\alpha_{n,\tau}} \right) (1 + S_{\mathcal{L},\tau-1}) \right)^{-r^{T-t+1}}$$

となり、定理を得る。

[証明終]

5 競争の形態と資源量の変化

前節までは、再生可能資源をめぐる競争の形態として、 n 人プレイヤーの Cournot-Nash 競争と $(n, n-1)$ -Stackelberg 競争について、それらの競争下のプレイヤーの行動を考察した。本節では

それらの競争の結果として、再生可能資源が時間の経過につれてどのように変化するかを比較する。

系 5.1. 競争の形態と資源量の変化

再生可能資源の獲得競争モデル (D) において、 $(n, n-1)$ -Stackelberg 競争が行われる場合、Cournot-Nash 競争の場合と比較して、資源量はより低い水準で推移する。

定理 3.1 と定理 4.1 より n 人プレイヤーの Cournot-Nash 競争が行われる場合の資源量 $x_t^{(C)}$ と $(n, n-1)$ -Stackelberg 競争が行われる場合の資源量 $x_t^{(S)}$ は期間 $t \geq 1$ において、

$$x_t^{(C)} = x_1^{r^t} \prod_{\tau=1}^t (1 + S_{p_{n,\tau-1}})^{-r^{\tau-t+1}},$$

$$x_t^{(S)} = x_1^{r^t} \prod_{\tau=1}^t \left(\left(1 + \frac{1}{a_{n,\tau}} \right) (1 + S_{\lambda_{\tau-1}}) \right)^{-r^{\tau-t+1}}$$

であることから、比 $x_t^{(C)}/x_t^{(S)}$ は次の不等式を満たす。

$$\begin{aligned} \frac{x_t^{(C)}}{x_t^{(S)}} &= \prod_{\tau=1}^t \left(\left(1 + \frac{1}{a_{n,\tau}} \right) \left(\frac{1 + S_{\lambda_{\tau-1}}}{1 + S_{p_{\tau-1}}} \right) \right)^{r^{\tau-t+1}} = \prod_{\tau=1}^t \left(\left(1 + \frac{1}{a_{n,\tau}} \right) \left(\frac{1 + S_{\lambda_{\tau-1}}}{1 + S_{\lambda_{\tau-1}} + 1/a_{n,\tau}} \right) \right)^{r^{\tau-t+1}} \\ &> \prod_{\tau=1}^t \left(\left(1 + \frac{1}{a_{n,\tau}} \right) \left(\frac{1}{1 + 1/a_{n,\tau}} \right) \right)^{r^{\tau-t+1}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

これより系を得る。

[証明終]

5.1 数値例

本小節では、各変数の定義域にある任意の値として、以下の数値例を仮定して $x_t^{(C)}$ と $x_t^{(S)}$ の時間変化を観察する。

$$\begin{array}{lll} x_0 = 0.2, & r = 0.5, & T = 10, \\ n = 3, & \beta_i = 0.9, & \sigma_i = -\log(3). \end{array}$$

図 1 資源量の時間経路

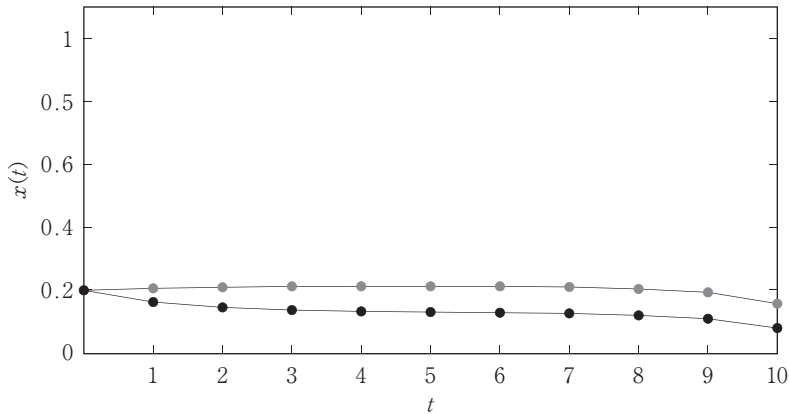


図1は、横軸に時間 t を、縦軸に資源量 x_t をとって、資源量の時間変化を描いたものである。Cournot-Nash 競争の場合を灰色で、(3, 2)-Stackelberg 競争の場合を黒色でグラフを描いた。前小節の考察から既に明らかなように、すべての期において (3, 2)-Stackelberg 競争の方が Cournot-Nash 競争よりも低い水準で資源が推移することが確認される。

6 現実社会のモデル例と残された問題点

本稿では、動学ゲーム理論の枠組みの中で、漁業資源が競争的に捕獲される戦略的状况を考察した。漁業資源の獲得に関する (n, m) -Stackelberg 競争のモデルは、先導者と追従者が存在する戦略的状况を説明するモデルとしての意味がある。分析の結果、 $(n, n-1)$ -Stackelberg 競争は、Cournot-Nash 競争に比較して、資源の枯渇にさらに拍車を掛ける可能性があることが導かれた。

最近、中国と台湾が公海上で秋刀魚を先導的に捕獲していることが報じられている⁵⁾。秋刀魚は公海から日本の近海に黒潮に乗って回遊する性質があることが知られている。日本の漁船は、秋刀魚が日本近海へ回遊するのを待って、主として日本の近海で操業すると報じられており、秋刀魚漁に関しては、日本はいわば追従者とみることができる。 $(n, n-1)$ -Stackelberg 競争モデルは、各漁期（各期間）において、先導者が $n-1$ 人、追従者が 1 人であり、先導者と追従者が入れ替わることはない。中国、台湾、日本の 3 プレイヤー間の秋刀魚資源の最適獲得量、およびそのときの秋刀魚資源量の推移は、現在の漁獲方法が維持される限り、(3, 2)-Stackelberg 競争モデルを用いて説明することができるであろうと思われる。

このゲームを先導者グループも追従者グループも Cournot-Nash 競争を行う (n, m) -Stackelberg 競争モデルに拡張することは一般化としての意義がある。この点は今後の研究課題としたい。

参 考 文 献

- [1] E. Denisova, A. Garnaev, "Fish wars: Cooperative and Non-Cooperative Approaches", *AUCO Czech Economic Review*, Vol. 2, no. 1, (2008).
- [2] Dutta, P. K., *Strategies and Games: Theory and Practice*, MIT Press, (1999).
- [3] Levhari, D., and Mirman, L. J., "The great fish war: an example using a dynamic Cournot-Nash Solution", *Bell Journal of Economics*, Vol. 11, No. 1, (1980).
- [4] Okuguchi, K., "A dynamic cournot-nash equilibrium in fishery: The effects of entry", *Decisions in Economics and Finance*, Vol. 4, Issue 2, (1981).
- [5] Sherali, H. D., "A Multiple Leader Stackelberg Model and Analysis", *Operations Research Society of America*, Vol. 32, No. 2, (1984).

(受理 2016年4月18日)

5) 『おはよう日本』(2015年8月5日, NHK) や『クローズアップ現代』(2015年9月7日, NHK) のニュース番組で報道された。