複占モデルにおける企業間競争のゲーム理論的分析

中　川　義　行
山　下　章　夫

キーワード
ゲーム理論　マーケットシェア吸引形　複占　Nash 均衡　結合確率　混合戦略

1 はじめに

本稿は 2 人のプレイヤーから成る二つの企業組織間の競争をゲーム理論的に考察したものである[1)]。複数のプレイヤーから成る企業組織は，菊澤 [1] で定義されているピア・グループと呼ばれる企業組織（以下では，企業と略記する）に対応する[2)]。我々は中川・山下 [2] において，2 人のプレイヤーから成る 2 企業間の競争を分析した。以下の分析はこの延長にあるが，特にプレイヤーの選択する広告費支出額の合計，即ち企業としての広告費支出額と市場において当該企業の獲得するマーケットシェアの対応関係を Monahan[6] などで仮定されているマーケットシェア吸引式によって定式化して，個々のプレイヤーの戦略から構成される企業としての戦略と企業の獲得するマーケットシェアの関係を明確にしている点が特徴的である。

第 2 節では広告費支出額と企業の獲得するマーケットシェアの関係を定式化する。第 3 節ではプレイヤーの利得関数を定式化する。第 4 節では企業内のプレイヤー間で利得の分配を巡る競争が行われ，かつ企業間においてマーケットシェアを巡る競争が行なわれる場合の均衡の存在条件を考察する。第 5 節では企業内で結合利得の最大化が行われ，かつ企業間でマーケットシェアを巡る競争が行われる場合の均衡の存在条件を考察する。最後に第 6 節では分析の意味と今後の課題を述べる。

2 戦略とマーケットシェア

本節では，マーケットシェアを巡る競争下にある 2 企業間の行動をゲーム理論的に定式化する。これらの 2 企業をそれぞれ企業 I，企業 II とする。そして各企業に属するプレイヤーの数を 2 と仮定する。プレイヤーは，企業を構成する最小の単位である。各プレイヤーは合理的に行動するものと仮定する。即ち，自己の利得を最大化する。企業内の個々のプレイヤーのとりうる戦略の集合を $S=\left\{\frac{rqz}{2}, \frac{qz}{2}\right\}$ とする。S は高い広告費支出額（以下，適宜，支出と略記する）と低い広告費支出額の 2 種類の戦略から成るものと仮定する。但し，$\frac{rqz}{2}$ は高い支出，$\frac{qz}{2}$ は低い支出を意味する。こ

1) 本研究は，龍谷大学経営学会の研究部会「社会科学の研究や教育における Maxima の応用」の共同研究の一部である。

2) またこのような組織形態は組織を「アメーバ」と呼ばれる数人のグループに分割して，各グループに意思決定における裁量権を付与した，所謂「アメーバ組織」に対応するものと考えることもできる。但し，本稿では「アメーバ」はプレイヤーと呼ばれる単体の意思決定主体に対応する。

の支出はプレイヤーの「努力」を意味するものと解釈することもできる。支出を2で除しているのは，計算の便宜上，企業の高い広告費支出額を rqz とするためである。定義より $r > 1$ である。財の価格は一定であり，市場規模を意味する市場の総販売額（これを z で表わす）は一定であるものと仮定する。q は市場の総販売額に占める支出の割合を示す正数である。広告費支出額は z を超えないものと仮定する。この仮定は $rq < 1$ を意味する。プレイヤーは S の要素を任意の確率で独立して選択することができるものとする。即ち，プレイヤーは混合戦略をとるものとする。

企業 $X \in \{I, II\}$ としての支出の選択は，プレイヤーの支出の選択と同時に決まる。今，企業 X に属するプレイヤー X_1，X_2 の支出によって企業 X の支出を分類すると次のようになる。

1. プレイヤー X_1 が確率 x_1^X で $\frac{rqz}{2}$ を選択する場合

(a) プレイヤー X_2 が確率 x_2^X で $\frac{rqz}{2}$ を選択すれば，結合確率 $x_1^X x_2^X$ で rqz が選択される[3]。

(b) プレイヤー X_2 が確率 $1 - x_2^X$ で $\frac{qz}{2}$ を選択すれば，結合確率 $x_1^X(1 - x_2^X)$ で $\frac{(r+1)qz}{2}$ が選択される。

2. プレイヤー X_1 が確率 $1 - x_1^X$ で $\frac{qz}{2}$ を選択する場合

(a) プレイヤー X_2 が確率 x_2^X で $\frac{rqz}{2}$ を選択すれば，結合確率 $(1 - x_1^X)x_2^X$ で $\frac{(r+1)qz}{2}$ が選択される。

(b) プレイヤー X_2 が確率 $1 - x_2^X$ で $\frac{qz}{2}$ を選択すれば，結合確率 $(1 - x_1^X)(1 - x_2^X)$ で qz が選択される。

企業の戦略を，プレイヤーの結合確率のベクトルとして定義する。そしてこのベクトルの成分である結合確率と支出は1対1に対応する。企業 I，II の戦略を，それぞれ x_I，x_{II} とすると，

$$\vec{x}_I = (x_1^I x_2^I, x_1^I(1 - x_2^I), (1 - x_1^I)x_2^I, (1 - x_1^I)(1 - x_2^I))$$
$$\vec{x}_{II} = (x_1^{II} x_2^{II}, x_1^{II}(1 - x_2^{II}), (1 - x_1^{II})x_2^{II}, (1 - x_1^{II})(1 - x_2^{II}))$$

である[4]。

C_X を企業 X の支出とし，G_X を企業 X の獲得するマーケットシェアとする。この間に次の関係を仮定する。

---

3) これは次の例で喩えることができる。プレイヤー X_1 と X_2 は，それぞれ独立にJokerを除くトランプのカードセットを持っており，そこから1枚のカードを無作為抽出するものとする。絵札（ここでは，Jack, Queen, Kingの三種とする）を選ぶ確率は，それぞれ $x_1^X = x_2^X = \frac{3}{13}$ となる。従って，2人とも絵札を選ぶ確率は $x_1^X x_2^X = \frac{9}{169}$ という結合確率で，2人とも数札を選ぶ確率は，$(1 - x_1^X)(1 - x_2^X) = \frac{100}{169}$ という結合確率で，X_1 が絵札を X_2 が数札を選ぶ確率は $x_1^X(1 - x_2^X) = \frac{30}{169}$ という結合確率で，X_1 が数札を X_2 が絵札を選ぶ確率は $(1 - x_1^X)x_2^X = \frac{30}{169}$ という結合確率でそれぞれ求めることができる。

4) ここでは列ベクトルは行ベクトルの転置として考え，上付き添え字 T を付して表わす。

$\frac{\partial G_X}{\partial C_X} > 0$ マーケットシェアは，支出の単調増加関数である。 (1)

$\frac{\partial^2 G_X}{\partial C_X^2} < 0$ マーケットシェアは，支出が増加するにつれて逓減する。 (2)

$\frac{\partial G_X}{\partial C_Y} < 0$ $(X \neq Y)$ 企業 X のマーケットシェアは，企業 Y の支出の単調減少関数である。 (3)

これらの仮定を満たす関数の中で，条件 (1), (2) の性質から，コブ・ダグラス型を局所的に適用して，企業 X の獲得するマーケットシェア（これを G_X とする）は，次式で決まるものと仮定する[5]。

$$G_X = \frac{z(C_X)^u}{(C_I)^u + (C_{II})^u}, \ (X \in \{I, II\}) \tag{4}$$

(4) はマーケットシェア吸引形 (attraction form) と呼ばれる。但し，u は $0 < u < 1$ を満たす定数である。$u > 0$ は仮定 (1) の必要十分条件であり，$u < 1$ は仮定 (2) の十分条件である。

関数 $(C_X)^u$ は企業 X の支出 C_X が所与のとき，その支出に対して企業 X がどれだけ販売高を吸引するかを表わす。換言すれば，支出の販売高に対する効果を意味する。吸引する販売高の割合を ρ として $\rho = (C_X)^u$ と置くとき，

$$u = \frac{d\rho}{dC_X} \frac{C_X}{\rho}$$

を得る。u は支出の販売高吸引弾力性である。この弾力性は各企業で同一であるものと仮定する。

(4) より，企業 I の支出が企業 II の支出と同じ場合，企業 I は $\frac{z}{2}$ のシェアを得る。企業 I の支出が企業 II と異なる場合，企業 I の獲得できるマーケットシェアを (4) に従って計算すると，それらは，以下の行列 M^I で表わされる。

$$M^I = \begin{pmatrix} \frac{z}{2} & \frac{zr^u 2^u}{r^u 2^u + (r+1)^u} & \frac{zr^u 2^u}{r^u 2^u + (r+1)^u} & \frac{zr^u}{r^u + 1} \\ \frac{z(r+1)^u}{r^u 2^u + (r+1)^u} & \frac{z}{2} & \frac{z}{2} & \frac{z(r+1)^u}{2^u + (r+1)^u} \\ \frac{z(r+1)^u}{r^u 2^u + (r+1)^u} & \frac{z}{2} & \frac{z}{2} & \frac{z(r+1)^u}{2^u + (r+1)^u} \\ \frac{z}{r^u + 1} & \frac{z2^u}{2^u + (r+1)^u} & \frac{z2^u}{2^u + (r+1)^u} & \frac{z}{2} \end{pmatrix}$$

企業 II の獲得するマーケットシェア（これを M^{II} とする）は，Z をすべての成分が z の行列とするとき，

$$M^{II} = Z - M^I$$

で与えられる。図 1 では，$z = 1$, $r = 2$ の場合について，横軸に u，縦軸に企業 I の販売高をとり，u の変化に対応する行列 M^I の幾つかの成分の変化を描いたものである。u が大きいほど企業 II の

5) この関数形はマーケットシェア吸引モデルにおいて，しばしば用いられる関数形である。例えば，文献 [5], [6] を参照。

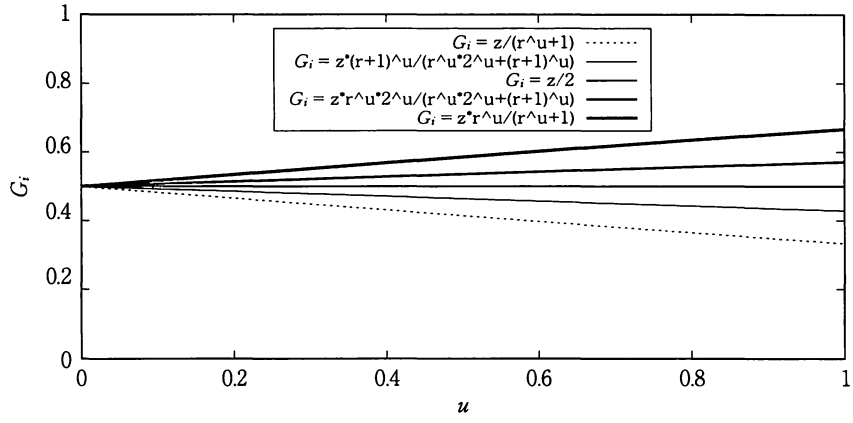


図1　u の変化とマーケットシェア，$z=1$，$r=2$ の場合

販売高との差が大きくなることが分かる。

3　プレイヤーの利得

本節では，企業 X のプレイヤーの利得を定式化する。企業 $X \in \{I, II\}$ のプレイヤー X_1(resp. X_2) への分配率 s_1^X(resp. s_2^X) は自己の戦略（支出 C_1^X(resp. C_2^X)）の選択に依存するだけでなく，相手のプレイヤー X_2(resp. X_1) の戦略（支出 C_2^X(resp. C_1^X)）の選択にも依存する。ここでは，この分配率は次式で決まるものと仮定する。

$$s_1^X = s(C_1^X, C_2^X) = \frac{(C_1^X)^{a_X}}{(C_1^X)^{a_X} + (C_2^X)^{a_X}} \tag{5}$$

$$s_2^X = s(C_2^X, C_1^X) = \frac{(C_2^X)^{a_X}}{(C_1^X)^{a_X} + (C_2^X)^{a_X}} \tag{6}$$

$\tau_1^X = \frac{s_1^X}{s_2^X}$，$\tau_2^X = \frac{s_2^X}{s_1^X}$，$\varepsilon_1^X = \frac{C_1^X}{C_2^X}$，$\varepsilon_2^X = \frac{C_2^X}{C_1^X}$ と置くとき，(5)，(6) は $\tau_k^X = (\varepsilon_k^X)^{a_X}$ $(k \in \{1, 2\})$ の関係を意味する。即ち，$a_X > 0$ の範囲では，τ_k^X は ε_k^X の増加関数であるが，$a_X < 0$ の範囲では，τ_k^X は ε_k^X の減少関数である。当面，企業ごとの分配率を規定するパラメタ a_X は異なるものとして，添え字を減らすために $a_I = v$，$a_{II} = w$ と置く。さらに，プレイヤーの直面する分配率を行列，m^I，m^{II} で表わす。v，w は任意の実数[6]であると仮定する。

$$m^I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{r^v}{r^v+1} \\ \frac{1}{r^v+1} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$m^{II} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{r^w}{r^w+1} \\ \frac{1}{r^w+1} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

6)　但し v，w が 0 のとき，$s_1^X = s_2^X$ となり，分配率行列のすべての成分は $\frac{1}{2}$ となる。このとき，企業内の各プレイヤーの戦略によらず分配率が一定なので，企業内のプレイヤー間で利得を巡る競争は起こらない。

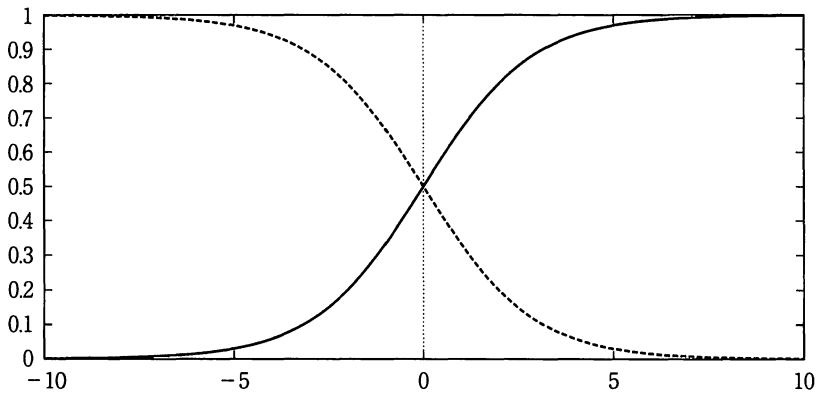


図2 vの変化と分配率，$r=2$の場合

図2は，横軸にvをとりm^Iの成分の変化を表わしたものである[7]。$\frac{1}{1+r^v}$は，rの定義より，vの狭義単調減少関数であり，$\frac{r^v}{1+r^v}$はvの狭義単調増加関数である。このグラフはvの絶対値が大きければ大きいほど，企業内のプレイヤーが異なる戦略をとるときの分配率の格差（各行列の第(1,2)成分と第(2,1)成分の差）が大きいことを示している。またvが負の範囲では，相手のプレイヤーが高い支出を選択するとき，低い支出を選択するプレイヤーへの分配率は$\frac{1}{2}$よりも大きいこと，そして相手のプレイヤーが低い支出を選択するとき，高い支出を選択するプレイヤーへの分配率は$\frac{1}{2}$よりも小さいことを確認しておく。

各プレイヤーの分配率の期待値を$s^I(x_1^I, x_2^I)$，$s^{II}(x_1^{II}, x_2^{II})$とすると

$$s^I(x_1^I, x_2^I) = (x_1^I \quad 1-x_1^I)m^I \begin{pmatrix} x_2^I \\ 1-x_2^I \end{pmatrix}$$

$$s^{II}(x_1^{II}, x_2^{II}) = (x_1^{II} \quad 1-x_1^{II})m^{II} \begin{pmatrix} x_2^{II} \\ 1-x_2^{II} \end{pmatrix}$$

である。

企業Iが獲得するマーケットシェアの期待値を$f^I(x_1^I, x_2^I, x_1^{II}, x_2^{II})$とすると

$$f^I(x_1^I, x_2^I, x_1^{II}, x_2^{II}) = \overrightarrow{x_I} M^I \overrightarrow{x_{II}^T}$$

である。同様にして，企業IIが獲得するマーケットシェアの期待値を$f^{II}(x_1^I, x_2^I, x_1^{II}, x_2^{II})$とすると，

$$f^{II}(x_1^I, x_2^I, x_1^{II}, x_2^{II}) = \overrightarrow{x_I} M^{II} \overrightarrow{x_{II}^T}$$

である。このとき，企業Iのプレイヤーの利得は，それぞれ，

$$r_1^I(x_1^I, x_2^I, x_1^{II}, x_2^{II}) = s^I(x_1^I, x_2^I) f^I(x_1^I, x_2^I, x_1^{II}, x_2^{II}) - \left(x_1^I \frac{rqz}{2} + (1-x_1^I)\frac{qz}{2}\right) \tag{7}$$

7) wの変化に伴う分配率行列m^{II}の成分の変化も同様のグラフになるので，ここでは省略している。

$$r_2^I(x_1^I, x_2^I, x_1^{II}, x_2^{II}) = (1 - s^I(x_1^I, x_2^I))f^I(x_1^I, x_2^I, x_1^{II}, x_2^{II}) - \left(x_2^I\frac{rqz}{2} + (1 - x_2^I)\frac{qz}{2}\right) \quad (8)$$

で与えられる。そして企業 II のプレイヤーの利得は，それぞれ，

$$r_1^{II}(x_1^I, x_2^I, x_1^{II}, x_2^{II}) = s^{II}(x_1^{II}, x_2^{II})f^{II}(x_1^I, x_2^I, x_1^{II}, x_2^{II}) - \left(x_1^{II}\frac{rqz}{2} + (1 - x_1^{II})\frac{qz}{2}\right) \quad (9)$$

$$r_2^{II}(x_1^I, x_2^I, x_1^{II}, x_2^{II}) = (1 - s^{II}(x_1^{II}, x_2^{II}))f^{II}(x_1^I, x_2^I, x_1^{II}, x_2^{II}) - \left(x_2^{II}\frac{rqz}{2} + (1 - x_2^{II})\frac{qz}{2}\right) \quad (10)$$

で与えられる。(7)〜(10) において，プレイヤーの利得は他の条件を一定として市場規模 z の大きさに比例するから，以下の分析では一般性を失うことなく $z = 1$ と置くことができる。

4　企業内でプレイヤー間の競争が行われる場合の均衡条件

本節では各企業内のプレイヤーが，他のプレイヤーの戦略を所与として自己の利得を最大にする場合を考察する。各プレイヤーが利得を最大にするための 1 階の偏導関数に関する条件は

$$\frac{\partial r_1^I(x_1^I, x_2^I, x_1^{II}, x_2^{II})}{\partial x_1^I} = \phi^1(x_1^I, x_2^I, x_1^{II}, x_2^{II}) = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial r_2^I(x_1^I, x_2^I, x_1^{II}, x_2^{II})}{\partial x_2^I} = \phi^2(x_1^I, x_2^I, x_1^{II}, x_2^{II}) = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial r_1^{II}(x_1^I, x_2^I, x_1^{II}, x_2^{II})}{\partial x_1^{II}} = \phi^3(x_1^I, x_2^I, x_1^{II}, x_2^{II}) = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial r_2^{II}(x_1^I, x_2^I, x_1^{II}, x_2^{II})}{\partial x_2^{II}} = \phi^4(x_1^I, x_2^I, x_1^{II}, x_2^{II}) = 0 \quad (14)$$

である。但し，(11)〜(14) の $\phi^i(x_1^I, x_2^I, x_1^{II}, x_2^{II})$, $(i = 1, 2, 3, 4)$ は x_1^I，x_2^I，x_1^{II}，x_2^{II} を含む多項式[8]である。(11) から (12) を引いた式を因数分解すると，

$$\phi^1(x_1^I, x_2^I, x_1^{II}, x_2^{II}) - \phi^2(x_1^I, x_2^I, x_1^{II}, x_2^{II}) = (x_1^I - x_2^I)\psi^1(x_1^I, x_2^I, x_1^{II}, x_2^{II}) \quad (15)$$

の形に整理することができる。また，(13) から (14) を引いた式を因数分解すると，

$$\phi^3(x_1^I, x_2^I, x_1^{II}, x_2^{II}) - \phi^4(x_1^I, x_2^I, x_1^{II}, x_2^{II}) = (x_1^{II} - x_2^{II})\psi^2(x_1^I, x_2^I, x_1^{II}, x_2^{II}) \quad (16)$$

の形に整理することができる。但し，$\psi^i(x_1^I, x_2^I, x_1^{II}, x_2^{II})$, $(i = 1, 2)$ は，x_1^I，x_2^I，x_1^{II}，x_2^{II} を含む多項式である。(15)，(16) から，連立方程式 (11)〜(14) は $x_1^I = x_2^I$，$x_1^{II} = x_2^{II}$ となる解をもつことが分かる。ここでは，そのような解を考察する。そこで，

$$x_1^I = x_2^I = x, x_1^{II} = x_2^{II} = y \quad (17)$$

と置いて，(17) を (11)〜(14) に代入すると，x，y に関する次の連立方程式を得る。

$$\phi^1(x, x, y, y) = 0 \quad (18)$$
$$\phi^2(x, x, y, y) = 0 \quad (19)$$
$$\phi^3(x, x, y, y) = 0 \quad (20)$$
$$\phi^4(x, x, y, y) = 0 \quad (21)$$

8)　この多項式は展開すると 200 の項数から成る。ここでは，紙面を節約するために，それらの多項式を具体的に記述する代わりに，x_i の関数として $\phi^i(\cdot)$, $(i = 1, 2, 3, 4)$ で表わしている。以下の関数 $\psi^i(.)$, $(i = 1, 2)$ も同様の意味で用いている。

ここで，(18)と(19)は同じ式であり，整理すると次式で表わされる。

$$h_1x^2y + h_2x^2 + h_3xy^2 + 2h_4xy + h_5x + h_6y^2 + h_7y + h_8 = 0 \tag{22}$$

そして(20)と(21)は同じ式であり，整理すると次式で表わされる。

$$k_1x^2y + k_2x^2 + k_3xy^2 + 2k_4xy + k_5x + k_6y^2 + k_7y + k_8 = 0 \tag{23}$$

但し，h_i，k_i $(i = 1, ..., 8)$ は r，u，v，w，q から定まる係数である。

プレイヤーの利得を最大にする解は，(22)と(23)から求めることができるが，この連立方程式の解を具体的に求めることは困難である。そのため以下では，プレイヤーへの分配率を規定するパラメタが両企業で等しい場合に限定して分析を行う。両企業に共通のパラメタを a として，$v = w = a$ を(22)と(23)に代入して，(22)から(23)を差し引いて整理すると次式を得る。

$$(x - y)(c_1xy + c_2y + c_2x + c_3) = 0 \tag{24}$$

第2因子の係数 c_i，$(i = 1, 2, 3)$ は r，u，a から定まる係数である。(24)より，1つの条件 $y = x$ を得る。この条件を(22)に代入して整理すると，次の2次方程式を得る[9]。

$$\psi(x) = b_1x^2 + b_2x + b_3 = 0 \tag{25}$$

(25)の係数は次の通りである。

$$b_1 = -(r^a + 1)\theta \tag{26}$$
$$b_2 = (r^a + 1)\omega\alpha \tag{27}$$
$$b_3 = -2(r^u + 1)\omega((r - 1)(r^a + 1)(2^u + (r + 1)^u)q + 2^u - r^a(r + 1)^u) \tag{28}$$

但し，(26)〜(28)において，

$$\theta = (r^u - 1)(2^u - (r + 1)^u)(r^u2^u - (r + 1)^u) \tag{29}$$
$$\omega = r^u2^u + (r + 1)^u \tag{30}$$
$$\alpha = 3r^u2^u + 2^u - r^u(r + 1)^u - 3(r + 1)^u \tag{31}$$

と置いている。$r > 1$ より，明らかに $\theta < 0$，$\omega > 0$ である。そして $\alpha < 0$ である[10]から，$b_2 < 0$ である。b_3 の正負の符号は(28)の最後の因子の符号に依存する。

(25)が実数解をもつ条件は $D = b_2^2 - 4b_1b_3 \geqslant 0$ であり，この条件は

$$q \geqslant \frac{1}{(r - 1)(r^a + 1)(2^u + (r + 1)^u)}\left(\frac{(r^a + 1)\omega\alpha^2}{8(r^u + 1)\theta} + r^a(r + 1)^u - 2^u\right) \overset{\text{def}}{=} q_0 \tag{32}$$

と同値である。ここで(32)の右辺を q_0 と定義する。q_0 の符号は a，u，r に依存する。

2次方程式(25)の根は確率を意味するのであるから，それは閉区間 $[0, 1]$ の範囲に存在しなければならない。2根 $\delta_1 > \delta_2$ は

$$\delta_1 = \frac{-b_2 + \sqrt{D}}{2b_1} \tag{33}$$

---

9) 本稿では(24)の第2因子が0となる条件下で得られる解の考察は行っていない。この点は今後の課題である。

10) これの証明は付録7.1を参照。

$$\delta_2 = \frac{-b_2 - \sqrt{D}}{2b_1} \tag{34}$$

であり，実数条件が満たされるとき，δ_1 は必ず正根である。(32) の条件下で δ_1，δ_2 が共に閉区間 $[0, 1]$ に存在する条件は

$$\psi(1) = b_1 + b_2 + b_3 \geqslant 0 \tag{35}$$

$$\psi(0) = b_3 \geqslant 0 \tag{36}$$

$$0 < -\frac{b_2}{2b_1} < 1 \tag{37}$$

が同時に成立することである。条件 (35)，(36) は，それぞれ

$$q \leqslant \frac{r^{u+a}2^u - (r+1)^u}{(r-1)(r^a+1)(r^u 2^u + (r+1)^u)} \stackrel{\text{def}}{=} q_1 \tag{38}$$

$$q \leqslant \frac{r^a(r+1)^u - 2^u}{(r-1)(r^a+1)(2^u + (r+1)^u)} \stackrel{\text{def}}{=} q_2 \tag{39}$$

と同値である。(38) と (39) の右辺をそれぞれ q_1，q_2 と定義する。このとき，$q_1 < q_2$ であることが計算によって確かめられる。$b_1 > 0$，$b_2 < 0$ であるから，この 2 次関数 $\psi(x)$ の軸 $x = -\frac{b_2}{2b_1}$ は正である。(37) はその軸が 1 よりも小である条件である。この条件は

$$(r^a+1)(2^u + (r+1)^u)\delta > 0 \tag{40}$$

が成り立つことと同値である。但し

$$\delta = r^{2u}2^u + 3r^u 2^u - 3r^u(r+1)^u - (r+1)^u \tag{41}$$

と置いている。$r > 1$ のとき δ は負である[11]から，(40) は成立しないことがわかる。したがって，軸は 1 よりも大きい。

以上の考察によって，(33)，(34) の根 δ_1，δ_2 が共に閉区間 $[0, 1]$ に存在することはない。そこで以下では，δ_2 が閉区間 $[0, 1]$ に存在するための条件を考察する。この条件は次式が成り立つことと同値である。

$$\psi(0)\psi(1) = b_3(b_1 + b_2 + b_3) \leqslant 0 \tag{42}$$

(42) は

$$q_1 \leqslant q \leqslant q_2 \tag{43}$$

と同値である。q は市場の総販売額に占める支出の割合であるから，正数でなければならない。(38) と (39) の分母は共に正である。(43) の関係を考慮に入れると，これらの分子が共に正である条件は

$$a > \frac{u \log\left(\frac{r+1}{2r}\right)}{\log(r)} \stackrel{\text{def}}{=} \check{a} \tag{44}$$

11)　これの証明は付録 7.2 を参照。

となる。ここで(44)の右辺を $\bar{a}$ と定義する。さらに支出が市場規模を超えない条件は $q < \frac{1}{r}$ であり，$a < 1$ のとき，$q_2 < \frac{1}{r}$ であることを確かめることができる[12]。したがって，以下では $a < 1$ を仮定する。

次に(25)の δ_2 が，$\delta_2 = 0$，$0 < \delta_2 < 1$，$\delta_2 = 1$ のそれぞれの場合において，Nash均衡となるための条件を考察する。これらの解は1階の条件から導かれたものであるが，解 $x_i^j = \delta_2$，$(i = 1, 2,\ j = I^*, II^*)$ がNash均衡であるためには，(11)〜(14)に加えて各プレイヤーの利得関数に関して，2階の偏導関数に関する以下の条件が成立しなければならない[13]。

$$\frac{\partial^2 r_1^I(x_1^{I*}, x_2^{I*}, x_1^{II*}, x_2^{II*})}{\partial (x_1^I)^2} < 0 \tag{45}$$

$$\frac{\partial^2 r_2^I(x_1^{I*}, x_2^{I*}, x_1^{II*}, x_2^{II*})}{\partial (x_2^I)^2} < 0 \tag{46}$$

$$\frac{\partial^2 r_1^{II}(x_1^{I*}, x_2^{I*}, x_1^{II*}, x_2^{II*})}{\partial (x_1^{II})^2} < 0 \tag{47}$$

$$\frac{\partial^2 r_2^{II}(x_1^{I*}, x_2^{I*}, x_1^{II*}, x_2^{II*})}{\partial (x_2^{II})^2} < 0 \tag{48}$$

但し，(45)〜(48)の偏導関数は $(x_1^I, x_2^I, x_1^{II}, x_2^{II}) = (x_1^{I*}, x_2^{I*}, x_1^{II*}, x_2^{II*})$ で評価されている。

1. $\delta_2 = 0$ の場合

この場合の条件として $b_3 = 0$ を得る。この条件は $q = q_2$ と同値である。(44)が成り立つとき，$q_2 > q_1 > 0$ であることから q_2 の正数条件は満たされている。他の根は正根 $\frac{\omega\alpha}{\theta}$ である。軸の条件よりこの根は1よりも大きい。

$v = a$，$w = a$，$x_i^j = 0$，$(i = 1, 2,\ j = I^*, II^*)$ のとき，(45)〜(48)は

$$\frac{\partial^2 r_i^j(x_1^{I*}, x_2^{I*}, x_1^{II*}, x_2^{II*})}{\partial (x_i^j)^2} = \frac{(r^a-1)((r+1)^u-2^u)}{2(r^a+1)(2^u+(r+1)^u)},\quad (i = 1, 2,\ j = I, II) \tag{49}$$

となる。(49)の分母は正である。分子の第2因子は $r > 1$ より正である。したがって，この式が負となるためには第1因子が負であればよい。このためには $a < 0$ でなければならない。このときのプレイヤーの利得を Π^0 とすると，

$$\Pi^0 = \frac{2^u(r^{a+1} - r^a + r + 1) + (r+1)^u(r^{a+1} - 3r^a + r - 1)}{4(r-1)(r^a+1)(2^u + (r+1)^u)} \tag{50}$$

である。(50)は(39)の q_2 を用いると，$\frac{1-2q_2}{4}$ に等しい。$\frac{1}{2} - q_2$ が正であれば利得 Π^0 は正値である。これを計算すると

$$\frac{1}{2} - q_2 = \frac{(r-1)r^a(r+1)^u + (r^a+1)(r2^u - (r+1)^u) + (1-r^a)2^u + r(r+1)^u(1-r^{a-1})}{2(r-1)(r^a+1)(2^u+(r+1)^u)} \tag{51}$$

を得る。$r > 1$ より，(51)の分母は明らかに正である。分子の第1項は正，第2項は $r > 1$，

12) 付録7.3を参照。

13) 例えば，文献[4]，p. 51を参照。

$u-1<0$ より

$$r2^u-(r+1)^u>r2^u-(2r)^u=r2^u(1-r^{u-1})>0$$

となるので正である。第3項と第4項はNash均衡が成立する $a<0$ の範囲に対して，$1-r^a>0$，$1-r^{a-1}>0$ であるから正である。したがって，$\Pi^0>0$ である。

2. $0<\delta_2<1$ の場合

この場合の条件として，

$$b_3(b_1+b_2+b_3)<0 \tag{52}$$

を得る。(52) は $q_1<q<q_2$ と同値である。$v=a$，$w=a$，$x_i^j=\delta_2$，$(i=1,2,\ j=I^*,II^*)$ のとき，(45)〜(48) は

$$\frac{\partial^2 r_i^j(x_1^{I*},x_2^{I*},x_1^{II*},x_2^{II*})}{\partial(x_i^j)^2}=\frac{(r^a-1)(2(r-1)(r^a+1)q-(r^a-1))}{2(r^a+1)^2},\quad (i=1,2,\ j=I,II) \tag{53}$$

となる。右辺の分子の第1因子が負のとき第2因子は正であり，(53) は負となる。このための条件は $a<0$ である。したがって，Nash均衡であるための条件として $a<0$ を得る。このときのプレイヤーの利得を Π^m とすると

$$\Pi^m=\frac{1-2((r-1)\delta_2+1)q}{4} \tag{54}$$

である。

3. $\delta_2=1$ の場合

この場合の条件として

$$b_1+b_2+b_3=0 \tag{55}$$

を得る。(55) は $q=q_1$ と同値である。$v=a$，$w=a$，$x_i^j=1$，$(i=1,2,\ j=I^*,II^*)$ のとき，(45)〜(48) は

$$\frac{\partial^2 r_i^j(x_1^{I*},x_2^{I*},x_1^{II*},x_2^{II*})}{\partial(x_i^j)^2}=\frac{(r^a-1)(r^u2^u-(r+1)^u)}{2(r^a+1)(r^u2^u+(r+1)^u)},\quad (i=1,2,\ j=I,II) \tag{56}$$

となる。(56) の分母は正である。分子の第2因子は $r>1$ より正である。したがって，この式が負となるためには，第1因子が負であればよい。このためには $a<0$ でなければならない。また q_1 の正数条件は (44)[14] である。

このときのプレイヤーの利得を Π^1 とすると

$$\Pi^1=\frac{(r+1)^u(r^{a+1}-r^a+3r-1)-r^u2^u(r^{a+1}+r^a-r+1)}{4(r-1)(r^a+1)\omega} \tag{57}$$

である。(57) は (38) の q_1 を用いると，$\dfrac{1-2q_1r}{4}$ に等しい。$\dfrac{1}{2r}-q_1$ が正であれば利得 Π^1 は正値

---

14)　例えば，$r=2$，$u=\dfrac{1}{2}$ のとき $\tilde{a}$ の値はおよそ -0.2075 となる。

である。これを計算すると

$$\frac{1}{2r}-q_1=\frac{(r-1)(r^a+1)(r+1)^u+r^{u+1}2^u(1-r^a)+(r(r+1)^u-r^u2^u)+(r(r+1)^u-r^{u+a}2^u)}{2(r-1)r(r^a+1)(r^u2^u+(r+1)^u)} \tag{58}$$

を得る。$r>1$ より (58) の分母は明らかに正である。(58) の分子の第1項は正である。第2項は Nash 均衡の成立条件 $a<0$ から $1-r^a>0$ となるので正である。第3項は $r+1>2$ の関係から

$$\begin{aligned} r(r+1)^u-r^u2^u &> r(r+1)^u-r^u(r+1)^u \\ &= r(r+1)^u(1-r^{u-1}) \end{aligned}$$

となる。$u-1<0$ より，この項は正である。最後に第4項は

$$\begin{aligned} r(r+1)^u-r^{u+a}2^u &> r(r+1)^u-r^{u+a}(r+1)^u \\ &= r(r+1)^u(1-r^{u-1+a}) \end{aligned}$$

となる。Nash 均衡の成立条件 $a<0$ および $u-1<0$ から，$u-1+a<0$ である。したがって，この項は正である。以上の考察によって，(58) の右辺は正であるから，$\Pi^1>0$ である。また r と u が所与のとき，Π^0 と Π^1 の大小関係は a の大きさに依存して決まる。

以上をまとめると，パラメタ r, u, q, a について次の関係が成り立つとき，閉区間 $[0,1]$ に少なくとも1つの Nash 均衡が存在する。

$$\begin{aligned} \check{a}<a<0 \\ q_1\leqslant q\leqslant q_2 \end{aligned}$$

本稿のモデルでは個々のプレイヤーは独立して戦略を選択しており，各プレイヤーが選択する戦略が2種類であることから，特に (25) の根が0と1のケースは，プレイヤー間の「協力」を意味する解と見做すことができるであろう。但し，ここでいう協力とは事前に協力的行動をとるという意味ではなく，合理的行動の結果として各プレイヤーが同じ確率で戦略を選択することを指している。その意味で結果的に協力関係が形成されている状況である。即ち，Nash 均衡の中で各企業内のプレイヤーが共に確率1で「努力」する戦略を選択する場合，そして共に確率1で「努力しない」戦略を選択する場合が存在する。

5 企業内で結合利得の最大化が行われる場合の均衡条件

本節では各企業において結合利得（利得の和）を最大化する場合を考察する。このような状況は，架空の経営者が企業に属するプレイヤーの結合利得を企業の目的関数に設定して，各プレイヤーに独立して戦略を選択させる状況であると考えることができる。この場合，企業内のプレイヤー間の競争は存在しない[15]が，市場における企業間競争は存在する。以下では，このような状況における Nash 均衡の存在条件を考察する。

各企業におけるプレイヤーの結合利得をそれぞれ，J^I, J^{II} と置く。

$$J^I(x_1^I, x_2^I, x_1^{II}, x_2^{II})=r_1^I(x_1^I, x_2^I, x_1^{II}, x_2^{II})+r_2^I(x_1^I, x_2^I, x_1^{II}, x_2^{II}) \tag{59}$$

15) 前節では企業内のプレイヤーへの分配率は，パラメタ a で規定されており，企業内のプレイヤーは分配率に関する零和ゲームに直面しているが，本節の定式化では企業の目的関数に a は含まれない。その結果，企業内における分配率を巡るプレイヤー間の競争は存在しない。

$$J^{II}(x_1^I, x_2^I, x_1^{II}, x_2^{II}) = r_1^{II}(x_1^I, x_2^I, x_1^{II}, x_2^{II}) + r_2^{II}(x_1^I, x_2^I, x_1^{II}, x_2^{II}) \tag{60}$$

この結合利得を最大化するための1階の条件は次式で表わされる。

$$\frac{\partial J^I(x_1^I, x_2^I, x_1^{II}, x_2^{II})}{\partial x_1^I} = \frac{\theta x_1^{II} x_2^{II} - \theta x_2^{II} x_2^I - \theta x_2^I x_1^{II} + \omega\alpha x_2^I + \beta}{2(r^u + 1)(2^u + (r+1)^u)\omega} = 0 \tag{61}$$

$$\frac{\partial J^I(x_1^I, x_2^I, x_1^{II}, x_2^{II})}{\partial x_2^I} = \frac{\theta x_1^{II} x_2^{II} - \theta x_2^{II} x_1^I - \theta x_1^I x_1^{II} + \omega\alpha x_1^I + \beta}{2(r^u + 1)(2^u + (r+1)^u)\omega} = 0 \tag{62}$$

$$\frac{\partial J^{II}(x_1^I, x_2^I, x_1^{II}, x_2^{II})}{\partial x_1^{II}} = \frac{-\theta x_2^I x_2^{II} - \theta x_2^{II} x_1^I + \theta x_1^I x_2^I + \omega\alpha x_2^{II} + \beta}{2(r^u + 1)(2^u + (r+1)^u)\omega} = 0 \tag{63}$$

$$\frac{\partial J^{II}(x_1^I, x_2^I, x_1^{II}, x_2^{II})}{\partial x_2^{II}} = \frac{-\theta x_2^I x_1^{II} - \theta x_1^{II} x_1^I + \theta x_1^I x_2^I + \omega\alpha x_1^{II} + \beta}{2(r^u + 1)(2^u + (r+1)^u)\omega} = 0 \tag{64}$$

但し，

$$\beta = -(r^u + 1)\omega((r-1)(2^u + (r+1)^u)q + 2^u - (r+1)^u) \tag{65}$$

と定める。θ, ω, α については，定義式 (29), (30), (31) を参照のこと。連立方程式 (61)〜(64) の分母は変数 x_1^I, x_2^I, x_1^{II}, x_2^{II} を含まないので，1階の偏導関数に関する条件は (61)〜(64) の分子が0となることである。

連立方程式 (61)〜(64) を解くと，8組の解[16]が得られる。それらの解の中ですべてのプレイヤーが同じ戦略をとる場合は，次の γ_1, γ_2 で表わされる。

$$\gamma_1 = \frac{\alpha\omega + \sqrt{4\beta\theta + \alpha^2\omega^2}}{2\theta} \tag{66}$$

$$\gamma_2 = \frac{\alpha\omega - \sqrt{4\beta\theta + \alpha^2\omega^2}}{2\theta} \tag{67}$$

γ_1 が閉区間 $I = [0, 1]$ に存在するための条件は，q に関する次の不等式[17]が成り立つことである。

$$q_1^j \leqslant q \leqslant q_2^j \tag{68}$$

ここで，q_2^j, q_1^j は次式で定義されている。

$$q_2^j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(r+1)^u - 2^u}{(r-1)(2^u + (r+1)^u)} \tag{69}$$

$$q_1^j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{r^u 2^u - (r+1)^u}{(r-1)(r^u 2^u + (r+1)^u)} \tag{70}$$

ここでは，条件 (68) において，q が q_2^j または q_1^j をとる場合を考察する。

1. (68) において，$\gamma_1 = 0$ となるための十分条件は $q = q_2^j$ である。そして，そのときの結合利得を Π^{j_0} とすると，$\Pi^{j_0} = \dfrac{1 - 2q_2^j}{2}$ である。そして $\Pi^{j_0} > 0$ である。この利得が正であることを確かめるために次式を計算する。

---

16)　これらの解は Maxima で求めている。紙幅の関係上，連立方程式 (61)〜(64) の解をすべて表示する代わりに，第4節の解と比較するために，すべてのプレイヤーが同じ戦略をとる場合の解のみを考察する。解の実数条件が満たされるとき，他の解は虚数解または閉区間 $[0, 1]$ に存在しない実数解であることが確かめられる。

17)　この不等式の導出と γ_2 が閉区間に存在しないことの証明は付録 7.3 を参照。

$$\frac{1}{2} - q_2^j = \frac{r2^u + 2^u + r(r+1)^u - 3(r+1)^u}{2(r-1)(2^u + (r+1)^u)} \tag{71}$$

(71) の分子は

$$\begin{aligned} r2^u+2^u+r(r+1)^u-3(r+1)^u &= (r2^u-(r+1)^u)+2^u+r(r+1)^u-2(r+1)^u \\ &> (r2^u-(2r)^u)+2^u+r2^u-2(r+1)^u \\ &= r2^u(1-r^{u-1})+2(r+1)(2^{u-1}-(r+1)^{u-1}) \end{aligned} \tag{72}$$

となる。(72) は $r+1>2$, $u-1<0$ を考慮に入れると正であることが分かる。したがって, $\Pi^{j_0}>0$ である。

また閉区間 $I=[0,1]$ に対して, $\gamma_1=0$, 即ち $x_1^I=x_2^I=x_1^{II}=x_2^{II}=0$ は, 以下の Nash 均衡の定義式をすべて等号で満たす。

$$\begin{aligned} &\forall x_1^I \in I \quad J^I(0,0,0,0) \geqslant J^I(x_1^I,0,0,0) \\ &\forall x_2^I \in I \quad J^I(0,0,0,0) \geqslant J^I(0,x_2^I,0,0) \\ &\forall x_1^{II} \in I \quad J^{II}(0,0,0,0) \geqslant J^{II}(0,0,x_1^{II},0) \\ &\forall x_2^{II} \in I \quad J^{II}(0,0,0,0) \geqslant J^{II}(0,0,0,x_2^{II}) \end{aligned}$$

2. (68) において, $\gamma_1=1$ となるための十分条件は $q=q_1^j$ である。そして, そのときの結合利得を Π^{j_1} とすると $\Pi^{j_1}=\dfrac{1-2q_1^jr}{2}$ である。そして $\Pi^{j_1}>0$ である。この利得が正であることを確かめるために $\dfrac{1}{2r}-q_1^j$ を計算すると

$$\frac{1}{2r} - q_1^j = \frac{(r-1)(r+1)^u + 2r(r+1)((r+1)^{u-1} - (2r)^{u-1})}{2r(r-1)(r^u2^u + (r+1)^u)} \tag{73}$$

を得る。(73) の分子の第 2 項は, $2r>r+1$ および $u-1<0$ より正である。したがって $\Pi^{j_1}>0$ である。

また, $\gamma_1=1$, 即ち $x_1^I=x_2^I=x_1^{II}=x_2^{II}=1$ は, 以下の Nash 均衡の定義式をすべて等号で満たす。

$$\begin{aligned} &\forall x_1^I \in I \quad J^I(1,1,1,1) \geqslant J^I(x_1^I,1,1,1) \\ &\forall x_2^I \in I \quad J^I(1,1,1,1) \geqslant J^I(1,x_2^I,1,1) \\ &\forall x_1^{II} \in I \quad J^{II}(1,1,1,1) \geqslant J^{II}(1,1,x_1^{II},1) \\ &\forall x_2^{II} \in I \quad J^{II}(1,1,1,1) \geqslant J^{II}(1,1,1,x_2^{II}) \end{aligned}$$

以上の考察の結果, 結合利得最大化の解は, パラメタ r, u, q 間に条件 (68) が成り立つ場合 Nash 均衡となる。特に $q=q_2^j$ または $q=q_1^j$ のとき, プレイヤーは高い支出または低い支出を確率 1 で選択する。そして $\Pi^{j_0}>\Pi^{j_1}$ である[18]。これは架空の経営者が結合利得の最大化を目的として, 各プレイヤーに独立して戦略を選択させる場合, プレイヤーが共に「努力しない」戦略を確率 1 で選択する Nash 均衡の利得は, プレイヤーが共に「努力する」戦略を確率 1 で選択する Nash 均衡の利得を上回ることを意味する。すべてのプレイヤーが $\gamma_1=1$ を選択する Nash 均衡では, 両企業の戦略が低い支出であればより高い利得が実現するにもかかわらず, 高い支出を選択することがプレ

18) これの証明は付録 7.5 を参照。

イヤーの最適戦略となっている。その結果，より高い利得 Π^{jo} が実現されていない。その意味で，この均衡は両企業にとって囚人のジレンマ的状況を意味する均衡である。

6 結びに代えて

以上の分析結果の意味と残された課題を述べて結びとする。第4節では各企業内で分配率を巡るプレイヤー間の競争が存在し，かつ企業間においてマーケットシェアを巡る競争が存在する状況における Nash 均衡の存在条件を考察した。分析の結果，パラメタが一定の条件を満たすとき，Nash 均衡の存在が示された。この Nash 均衡は次のように解釈することができるであろう。企業内の個々のプレイヤーへの分配率パラメタが設定されているとき，プレイヤーはこのパラメタの下で自己の利得を最大化する戦略を選択する。プレイヤーは独立して戦略を選択するが，ある条件下では企業内におけるプレイヤー間の競争と市場における企業間競争が均衡する状態，即ち，Nash 均衡が存在する。しかもこの条件下において，確率1で高い広告費支出または低い広告費支出を選択することがプレイヤーの最適戦略である場合が存在する。この最適戦略はプレイヤーが結果的に同じ戦略を選択するという意味において「協力」関係を意味する。即ち，両プレイヤーが確率1で高い「努力」を選択する場合が存在する[19]。

また第5節で考察したように，結合利得を目的関数として，これを最大化するように各プレイヤーが行動する場合を想定することができる。この場合，企業内の各プレイヤーは自企業の戦略が自己の混合戦略と相手のプレイヤーの混合戦略の結合確率で構成されることを知っており，かつ相手企業の戦略も相手企業に属するプレイヤーの混合戦略の結合確率で構成されることを知っている。そして，自己の得る利得は自企業の利得の大きさに依存する[20]ということも知っている。このような状況において，自企業の利得を最大化するような Nash 均衡が存在する。この Nash 均衡の中でパラメタがある一定の関係を満たすとき，すべてのプレイヤーが確率1で高い支出または低い支出を選択する Nash 均衡が存在する。そして後者の Nash 均衡における利得は前者のそれを上回る。

以上の結果は特定の関数(4)および(5)を仮定して，両企業の分配率パラメタが同一であるという条件下で企業数が2の場合について得られたものである。同じ条件下で，企業数が3以上の寡占的状況を分析すること，そして一方の企業内でプレイヤー間の競争が行われ，他方の企業内で結合利得の最大化が行われるような，異なる企業組織間の競争モデルにおける Nash 均衡の存在条件を考察することは今後の課題である。

参 考 文 献

[1] 菊澤研宗『組織の経済学入門』有斐閣 (2006).

[2] 中川義行・山下章夫「ピア・グループ間の競争」『龍谷大学経営学論集』第48巻第4号 (2009).

[3] 丸山雅祥・成生達彦『現代のミクロ経済学』創文社 (1997).

[4] Aliprantis, Charalambros C. and Chakrabarti, Subhir K., *Games and Decision Making*, Oxford University Press, (2000).

[5] Llien, G. and P. Kotler, *Marketing Decision Making*, Harper & Row, New York, (1983).

[6] Monahan, G. E., "The Structure of Equilibria in Market Share Attraction Models," *Management Science* Vol. 33, No. 2, (1987).

---

19) 両プレイヤーが確率1で低い「努力」を選択する Nash 均衡も存在する。

20) 企業の得る利得が大きいほど分配される利得も大きい。プレイヤーへの利得の分配ルールとしては，例えば利得の均等分配を想定することができる。

7 付　　録

7.1 $\alpha < 0$ の証明

$$\alpha = (3r^u + 1)2^u - (r+1)^u(r^u + 3) \tag{74}$$

(74) において，u は $0 < u < 1$，r は $r > 1$ の範囲で定義されている。$\lim_{r \to 1+0} \alpha = 0$ であることに注意する。(74) の両辺を r で微分すると次式を得る。

$$\frac{d\alpha}{dr} = \frac{u}{r(r+1)} \times (3r^{u+1}2^u - 2r^{u+1}(r+1)^u + 3r^u 2^u - r^u(r+1)^u - 3r(r+1)^u) \tag{75}$$

(75) の第 2 因子を g と置く。$r > 1$ に対して，$g < 0$ であれば，この範囲の r に対して α は r の減少関数になることから，$\alpha < 0$ が導かれる。このことを示すために，g を変形すると次式を得る。

$$\begin{aligned}
g &= (2r^{u+1}2^u + r^{u+1}2^u) - 2r^{u+1}(r+1)^u + (r^u 2^u + 2r^u 2^u) - r^u(r+1)^u - 3r(r+1)^u \\
&= (2r^{u+1}2^u - 2r^{u+1}(r+1)^u) + (r^{u+1}2^u + r^u 2^u) + 2r^u 2^u - r^u(r+1)^u - 3r(r+1)^u \\
&= 2r^{u+1}(2^u - (r+1)^u) + r^u 2^u(r+1) + 2r^u 2^u - r^u(r+1)^u - (2r(r+1)^u + r(r+1)^u) \\
&< 2r^{u+1}(2^u - (r+1)^u) + (r^u 2^u(r+1) - 2r(r+1)^u) + 2r^u 2^u - r^u 2^u - r(r+1)^u \\
&= 2r^{u+1}(2^u - (r+1)^u) + 2r(r+1)(r^{u-1}2^{u-1} - (r+1)^{u-1}) + (r^u 2^u - r(r+1)^u)
\end{aligned} \tag{76}$$

(76) の第 1 項は $(r+1)^u > 2^u$ であることから負である。第 2 項は $2r > r+1$ および $u - 1 < 0$ であることから負である。第 3 項は

$$r^u 2^u - r(r+1)^u < r^u 2^u - r2^u = r2^u(r^{u-1} - 1) \tag{77}$$

を考慮に入れると，仮定 $r > 1$，$u - 1 < 0$ より，$r^{u-1} - 1 < 0$ を得る。したがって，(76) の第 3 項は負である。以上の考察によって，$g < 0$ であることが分かる。即ち，(75) において，α は r の減少関数であるから $\alpha < 0$ である。

7.2 $\delta < 0$ の証明

$$\delta = r^{2u}2^u + 3r^u 2^u - 3r^u(r+1)^u - (r+1)^u \tag{78}$$

この δ は (74) を用いると

$$\delta = \alpha + (r^u - 1)(2^u(r^u + 1) - 2(r+1)^u) \tag{79}$$

となる。$\alpha < 0$ であることは，前節で示されている。したがって，上式の第 2 項が負であれば $\delta < 0$ である。

ここで (79) の第 2 項を λ と置く。$\lim_{r \to 1+0} \lambda = 0$ であることに注意する。λ を r の関数とみて r で微分すると

$$\frac{d\lambda}{dr} = 2u(r^u - 1)((2r)^{u-1} - (r+1)^{u-1}) + r^{u-1}u((r^u + 1)2^u - 2(r+1)^u) \tag{80}$$

を得る。(80) の第 1 項は仮定 $r > 1$，$u - 1 < 0$ より負である。第 2 項の第 2 因子は $r > 1$，$u - 1 < 0$ のとき負である。このことを確かめるために，この因子を r の関数とみて $\kappa(r)$ と置く。$\lim_{r \to 1+0} \kappa(r) = 0$ である。そして κ を r で微分すると

$$\frac{d\kappa}{dr} = 2u((2r)^{u-1} - (r+1)^{u-1}) \tag{81}$$

を得る。$r > 1$，$u - 1 < 0$ のとき，$\kappa(r)$ は r の減少関数であるから，$\kappa(r) < 0$ となる。それゆえ (80) の第 2 項の第 3 因子は負である。したがって，λ は r の減少関数であり $\lambda < 0$ が成り立つ。このことから，$\delta < 0$ となる。

7.3 $q_2 < \frac{1}{r}$ となる条件

$$\frac{1}{r} - q_2 = \frac{r^a 2^u (r-1) + (r2^{u+1} - 2^u - (r+1)^u) + r(r+1)^u(1 - r^{a-1})}{r(r-1)(r^a+1)(2^u + (r+1)^u)} \tag{82}$$

である。(82) の分母は正である。(82) の分子の第 1 項は正である。第 2 項から第 4 項の和を考察する。$r > 1$ の仮定は $2r > r + 1 > 2$ を意味する。したがって，次の不等式を得る。

$$\begin{aligned} r2^{u+1} - 2^u - (r+1)^u &> r2^{u+1} - (r+1)^u - (r+1)^u \\ &= 2(r2^u - (r+1)^u) \\ &> 2(r2^u - (2r)^u) \\ &= 2^{u+1} r(1 - r^{u-1}) \end{aligned}$$

仮定 $u - 1 < 0$ より，$1 - r^{u-1} > 0$ であるから，これらの項の和は正である。第 5 項が正であるためには，$a - 1 < 0$ であればよい。したがって，(82) の右辺が正となるための十分条件として $a < 1$ を得る。

7.4 結合利得最大化の解が閉区間に存在するための条件

すべてのプレイヤーが同じ戦略をとる場合，即ちすべての解が同じ場合を考察する。その解を γ_1, γ_2 とすると

$$\gamma_1 = \frac{\alpha\omega + \sqrt{4\beta\theta + \alpha^2\omega^2}}{2\theta}$$

$$\gamma_2 = \frac{\alpha\omega - \sqrt{4\beta\theta + \alpha^2\omega^2}}{2\theta}$$

である。最初に，γ_1 が閉区間 $[0, 1]$ に存在するための条件 $0 \leqslant \gamma_1 \leqslant 1$ を考察する。この条件は

$$\alpha\omega + \sqrt{4\beta\theta + \alpha^2\omega^2} \geqslant 2\theta \tag{83}$$

$$\alpha\omega + \sqrt{4\beta\theta + \alpha^2\omega^2} \leqslant 0 \tag{84}$$

と同値である。(83) より

$$\sqrt{4\beta\theta + \alpha^2\omega^2} \geqslant 2\theta - \alpha\omega \tag{85}$$

を得る。(85) の右辺は

$$2\theta - \alpha\omega = -(2^u + (r+1)^u)\delta > 0 \tag{86}$$

である。そこで (85) の両辺を 2 乗して整理すると

$$\beta \leqslant \theta - \alpha\omega \tag{87}$$

を得る。次に (84) より

$$\sqrt{4\beta\theta + \alpha^2\omega^2} \leqslant -\alpha\omega \tag{88}$$

を得る。(88) の右辺は正である。両辺を 2 乗して整理すると $\beta \geqslant 0$ を得る。以上の考察によって，γ_1 が閉区間 $[0, 1]$ に存在するための条件は

$$0 \leqslant \beta \leqslant \theta - \alpha\omega \tag{89}$$

となる。同様にして，γ_2 が閉区間 $[0, 1]$ に存在するための条件 $0 \leqslant \gamma_2 \leqslant 1$ を考察する。$\gamma_2 \leqslant 1$ は不等式

$$\alpha\omega - 2\theta \geqslant \sqrt{4\beta\theta + \alpha^2\omega^2} \tag{90}$$

が成り立つことと同値であるが，(90) の左辺は (86) より負であり，右辺は正であることから不等号に矛盾する。したがって，γ_2 は閉区間 $[0, 1]$ に存在しない。

(89) の $\beta \geqslant 0$ は次式と同値である。

$$q \leqslant \frac{(r+1)^u - 2^u}{(r-1)(2^u + (r+1)^u)} \stackrel{\text{def}}{=} q_2^j \tag{91}$$

また (89) の $\beta \leqslant \theta - \alpha\omega$ は

$$q \geqslant \frac{r^u 2^u - (r+1)^u}{(r-1)(r^u 2^u + (r+1)^u)} \stackrel{\text{def}}{=} q_1^j \tag{92}$$

と同値である。ここで，区間 $[q_1^j, q_2^j]$ の存在を吟味する。

$$q_2^j - q_1^j = \frac{2((r+1)^{2u} - r^u 2^{2u})}{(r-1)(2^u + (r+1)^u)(r^u 2^u + (r+1)^u)} \tag{93}$$

である。(93) の分母は $r > 1$ より正である。分子は

$$(r+1)^{2u} - r^u 2^{2u} = (r+1)^{2u} - (2\sqrt{r})^{2u} \tag{94}$$

である。$r > 1$ のとき，$r + 1 > 2\sqrt{r}$ であるから分子は正である。したがって，右辺が正であるから，$q_2^j > q_1^j$ であることが分かる。このことから，区間 $[q_1^j, q_2^j]$ が存在するので (89) は

$$q_1^j \leqslant q \leqslant q_2^j \tag{95}$$

と同値である。

最後に，支出が市場規模を超えない条件を考察するために，$\frac{1}{r}$ と q_2^j の差をとると

$$\frac{1}{r} - q_2^j = \frac{2r2^u - 2^u - (r+1)^u}{(r-1)r(2^u + (r+1)^u)} \tag{96}$$

を得る。(96) の分母は明らかに正である。分子を式変形すると

$$\begin{aligned} 2r2^u - 2^u - (r+1)^u &> 2r2^u - 2^u - (2r)^u \\ &= 2^u((r-1) + r(1 - r^{u-1})) \end{aligned} \tag{97}$$

となる。$r > 1$，$u - 1 < 0$ より $1 - r^{u-1} > 0$ であるから (97) は正である。$\frac{1}{r} > q_2^j$ が成り立つから，不等式 (95) は支出が市場規模を超えない仮定を満たしている。

7.5 $\Pi^{j_0} > \Pi^{j_1}$ の証明

$F = \Pi^{j_0} - \Pi^{j_1}$ と置く。

$$\begin{aligned} F = &\frac{1}{(r-1)(2^u + (r+1)^u)(r^u 2^u + (r+1)^u)} \times \\ &(r^{u+1}2^{2u} + r^u 2^{2u} + r^{u+1}(r+1)^u 2^u - r^u(r+1)^u 2^u - r(r+1)^u 2^u + \\ &(r+1)^u 2^u - r(r+1)^{2u} - (r+1)^{2u}) \end{aligned} \tag{98}$$

である。(98) において，u は $0 < u < 1$，r は $r > 1$ の範囲で定義されている。$\lim_{r \to 1+0} F = 0$ であることに注意する。

(98) の両辺を r で微分すると次式を得る。

$$\frac{dF}{dr} = \frac{2((r+1)^{2u} - r^u 2^{2u})Q}{(r-1)^2(r+1)(2^u + (r+1)^u)^2(r^u 2^u + (r+1)^u)^2} \tag{99}$$

(99) の分子の第 2 因子は (94) より正である。Q は次の多項式である。

$$Q = \varphi(r, u) + (r-1)r^u(r+1)^u u 2^u + r(r+1)^u 2^u(r^u - u) \tag{100}$$

但し $\varphi(r, u)$ は r, u に関する多項式であり，次式で定義されている。

$$\varphi(r,u) = r^{u+1}2^{2u} + r^u 2^{2u} + (r+1)^u u 2^u + r^u(r+1)^u 2^u + r(r+1)^u 2^u + (r+1)^u 2^u + r(r+1)^{2u} + (r+1)^{2u}$$

(100) において，すべての $r > 1$, $0 < u < 1$ に対して $\varphi(r, u) > 0$ である。そして $r^u > u$ より，$Q > 0$ である。したがって $\frac{dF}{dr} > 0$ である。F は r の増加関数であるから，$r > 1$, $0 < u < 1$ に対して $F > 0$ である。即ち $\Pi^{f_0} > \Pi^{f_1}$ である。

（受理　2009年12月14日）