ピア・グループ間の競争

——個別合理性と集団合理性について——

中　川　義　行
山　下　章　夫

キーワード
複占市場　Maxima　マーケットシェア　Nash 均衡　個別合理性　集団合理性

1　はじめに

本稿は，複数の意思決定主体で構成される企業が，複占市場において競争する状況を，ゲーム理論的に考察したものである[1]。本稿は，中川・山下 [2] の主眼である，各企業に意思決定主体が複数存在するモデルにおいて，企業数を 2，プレイヤー数をそれぞれ 2 とした場合を考察の対象としている。このときの個々のプレイヤーの利得最大化行動が，当該プレイヤーの所属する企業利得の最大化に繋がるか否かを分析している点が特徴的である。そのための計算手法は，中川・山下 [3] に基づいている。我々のモデルでは，各企業に属するプレイヤーの利得の合計を「企業利得」と定義している。この企業利得が最大化されるように戦略が選択されている Nash 均衡において，当該する企業を「集団合理的」と呼び，個々のプレイヤーが自己の利得を最大にする Nash 均衡において，それらのプレイヤーは「個別合理的」[2]であると呼ぶ。以下では，この個別合理性と集団合理性の両立の条件を考察する。

第 2 節では，プレイヤーの戦略と，その戦略から構成される企業戦略を定義する。そして企業戦略と企業の獲得するマーケットシェアの対応関係について述べる。第 3 節では，個々のプレイヤーの利得を定式化する。第 4 節では，個々のプレイヤーの利得最大化条件から Nash 均衡解を導く。その解は，いくつかのパラメタに依存する。そこで，解が特定の値をとる場合を考察し，そのときのパラメタ条件から規定される集合を求める。第 5 節では，企業利得の最大化条件を考察し，そのときのパラメタ条件を求める。第 6 節では，個別合理性を満たすパラメタと，集団合理性を満たすパラメタの関係について述べる。

2　戦略とマーケットシェア

中川・山下 [2] で定義した「組織ゲーム」について考察する。組織ゲームの定義の詳細は，中川・山下 [2]，29—31ページを参照して頂きたい。定義の骨子は，次のようなものである。産業内に複数の企業が存在し，各企業に複数の意思決定主体（プレイヤー）が所属しているとする。各企業の意思は，所属するプレイヤーの利得配分に基づくゲームによって集団的に規定され，それに基づいて企業間でゲームが行われる。

---

1)　本研究は龍谷大学経営学会の研究部会「社会科学の研究や教育における Maxima の応用」の共同研究の一部である。

2)　この用語については，例えば，丸山・成生 [4] の99ページを参照。

そのような組織ゲームの応用例として次の問題を考える。

1. 市場には2企業 I, II が存在する。各企業 X ($X \in \{I, II\}$) は2人の意思決定者からなるピア・グループであり，ある固定した価格で財を販売しているものとする。そして，市場全体の販売総額を z とし，z は正の定数とする。

2. すべての意思決定者は，戦略として，所属する企業の販売促進費の支出水準に対する選択肢 $\{H, L\}$ から1つを選んで同時に投票する。企業 X の販売促進費の支出水準は，所属する2人が選んだ投票結果の 4種類の組み合わせ $\{(H_1^X, H_2^X), (H_1^X, L_2^X), (L_1^X, H_2^X), (L_1^X, L_2^X)\}$ から，3種4元の企業戦略 $\sum^X = \{h, m, m, \ell\}$ への順序を込めた全射の像として，投票[3]による決定を行う[4]。

3. 支出水準 $\sigma \in \sum^X$ に対する販売促進費 c_σ は両企業で共通しており，それぞれ

$$\begin{cases} c_h = rqz \\ c_m = \dfrac{r+1}{2}qz \\ c_\ell = qz \end{cases} \tag{1}$$

とする。ただし，r は $r > 1$ であり，q は市場全体の販売総額 z に対する販売促進費の割合を示す。

4. 企業 X の獲得するマーケットシェアは販売促進費に依存する。ここでは，企業 X の獲得するマーケットシェアは次のルールで決まるものとする。

(a) 企業 Y ($X \neq Y \in \{I, II\}$) が (H_1^Y, H_2^Y) を選択する場合。

i. 企業 X の2人のプレイヤーが同じ戦略 (H_1^X, H_2^X)[5]を選択する場合，企業 X は c_h を支出する。そのとき，両企業は同じ戦略を選択することになるので，企業 X の獲得するマーケットシェアは $\dfrac{1}{2}$ であるとする。

ii. 企業 X の2人のプレイヤーが同じ戦略 (L_1^X, L_2^X) を選択する場合，企業 X は c_ℓ を支出する。企業 Y は (H_1^X, H_2^X) を選択しているが，仮定より c_ℓ は c_h の $\dfrac{1}{r}$ の大きさである。この場合，企業 X の獲得するマーケットシェアは $\dfrac{1}{2}$ よりも小さいものとする。ここでは，その大きさを $1-c$ とする。ただし，$\dfrac{1}{2} < c < 1$ である。

iii. 企業 X の2人のプレイヤーが異なる戦略 (L_1^X, H_2^X), (H_1^X, L_2^X) を選択する場合，企業 X は c_m を支出する。企業 X が獲得するマーケットシェアは漠然と $1-c$ と $\dfrac{1}{2}$ の間にあると想定されるが，ここでは単純化のために，このときのマーケットシェアを $1-c$ と $\dfrac{1}{2}$ の相加平均であるとする。

---

3) 企業内のプレイヤーが互いに独立して同時に意思決定を行うことを，「投票」という語で喩えている。

4) 従来の研究では，条件(1)の販売促進費の割合 q は企業が制御できる変数として扱われることが多いが，本稿ではパラメタとして扱っている。

5) H_1^X は企業 X の第1番目のプレイヤーが高い販売促進費の戦略を選択することを意味する。以下の記号の意味は同様に解釈する。

(b) 企業 Y が (L_1^Y, L_2^Y) を選択する場合。

i. 企業 X の 2 人のプレイヤーが同じ戦略を選択する (H_1^X, H_2^X) である場合，企業 X は c_h を支出する。この場合，企業 X の獲得するマーケットシェアは c である。

ii. 企業 X の 2 人のプレイヤーが同じ戦略 (L_1^X, L_2^X) を選択する場合，企業 X は c_ℓ を支出する。両企業は同じ戦略を選択するので，$\frac{1}{2}$ のマーケットシェアを得る。

iii. 企業 X の 2 人のプレイヤーが異なる戦略 (L_1^X, H_2^X)，(H_1^X, L_2^X) を選択する場合，企業 X は c_m を支出する。企業 X が獲得するマーケットシェアは漠然と c と $\frac{1}{2}$ の間にあるものと想定されるが，この場合もマーケットシェアを c と $\frac{1}{2}$ の相加平均であるとする。

(c) 企業 Y が (L_1^Y, H_2^Y)，(H_1^Y, L_2^Y) を選択する場合。

i. 企業 X の 2 人のプレイヤーが同じ戦略を選択する (H_1^X, H_2^X) である場合，企業 X は c_h を支出する。企業 X が獲得するマーケットシェアは漠然と c と $\frac{1}{2}$ の間にあるものと想定されるが，この場合もマーケットシェアを c と $\frac{1}{2}$ の相加平均であるとする。

ii. 企業 X の 2 人のプレイヤーが同じ戦略 (L_1^X, L_2^X) を選択する場合，企業 X は c_ℓ を支出する。企業 X が獲得するマーケットシェアは漠然と $1-c$ と $\frac{1}{2}$ の間にあるものと想定されるが，この場合もマーケットシェアを $1-c$ と $\frac{1}{2}$ の相加平均であるとする。

iii. 企業 X の 2 人のプレイヤーが異なる戦略 (L_1^X, H_2^X)，(H_1^X, L_2^X) を選択する場合，企業 X は c_m を支出する。市場から見たとき両企業は同じ戦略を選択しているので，$\frac{1}{2}$ のマーケットシェアを得る。

表 1: 企業 I のマーケットシェア

支出水準戦略		(H_1^{II}, H_2^{II})	(H_1^{II}, L_2^{II})	(L_1^{II}, H_2^{II})	(L_1^{II}, L_2^{II})
	販売促進費	c_h	c_m	c_m	c_ℓ
(H_1^I, H_2^I)	c_h	$\frac{1}{2}$	$\frac{2c+1}{4}$	$\frac{2c+1}{4}$	c
(H_1^I, L_2^I)	c_m	$\frac{3-2c}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2c+1}{4}$
(L_1^I, H_2^I)	c_m	$\frac{3-2c}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2c+1}{4}$
(L_1^I, L_2^I)	c_ℓ	$1-c$	$\frac{3-2c}{4}$	$\frac{3-2c}{4}$	$\frac{1}{2}$

この結果，企業 I の獲得するマーケットシェアが表 1 のように与えられる。この表を 4 階テンソル[6]で表したものを企業 I のマーケットシェアテンソルとして D^I と置き，計算の都合に合わせて

6) 本稿では，企業数が 2，かつ各企業に 2 人のプレイヤーが所属するケースを考察しているので，行列だけで表現可能である。しかし，一般に企業数 n $(n > 2)$ において，各企業に m_i $(m_i \geqslant 2, 1 \leqslant i \leqslant n)$ 人のプレイヤーが所属する場合，中川・山下 [2] のようにテンソルによる表現が有用であるため，ここに記しておく。また記号 ～ は以下で計算上，同値であることを示す記号として用いている。

射影された行列 δ^I も使う。

$$D^I = \left[\left[\left[\left[\frac{1}{2}, \frac{2c+1}{4}\right], \left[\frac{2c+1}{4}, c\right]\right], \left[\left[\frac{3-2c}{4}, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, \frac{2c+1}{4}\right]\right]\right], \left[\left[\left[\frac{3-2c}{4}, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, \frac{2c+1}{4}\right]\right], \left[\left[1-c, \frac{3-2c}{4}\right], \left[\frac{3-2c}{4}, \frac{1}{2}\right]\right]\right]\right] \tag{2}$$

$$\sim \quad \delta^I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2c+1}{4} & \frac{2c+1}{4} & c \\ \frac{3-2c}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{2c+1}{4} \\ \frac{3-2c}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{2c+1}{4} \\ 1-c & \frac{3-2c}{4} & \frac{3-2c}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{3}$$

同様に，企業 II のマーケットシェアテンソル D^{II} の成分を決めてもよいが，2 企業しかないことから，D^I の各成分を 1 から引けばよい。計算の都合に合わせて射影された行列 δ^{II} も同様に定義する。

$$D^{II} = \left[\left[\left[\left[\frac{1}{2}, \frac{3-2c}{4}\right], \left[\frac{3-2c}{4}, 1-c\right]\right], \left[\left[\frac{2c+1}{4}, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, \frac{3-2c}{4}\right]\right]\right], \left[\left[\left[\frac{2c+1}{4}, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, \frac{3-2c}{4}\right]\right], \left[\left[c, \frac{2c+1}{4}\right], \left[\frac{2c+1}{4}, \frac{1}{2}\right]\right]\right]\right] \tag{4}$$

$$\sim \quad \delta^{II} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3-2c}{4} & \frac{3-2c}{4} & 1-c \\ \frac{2c+1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3-2c}{4} \\ \frac{2c+1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3-2c}{4} \\ c & \frac{2c+1}{4} & \frac{2c+1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{5}$$

を得る。マーケットシェアテンソル D^I と D^{II} は，結果的に互いに共役の関係にあり，これは各企業が直面する状況は添え字が交換されるだけで，同じであることを意味する。また，行列 δ^I と δ^{II} の「計算の都合に合わせて」とは，テンソルの添え字を交換することが，ちょうど転置行列をとることになるように，射影することも意味している。

3　個人利得の定式化

企業 X のプレイヤーをそれぞれ P_1^X, P_2^X とする。P_i^X ($i \in \{1, 2\}$) の混合戦略ベクトル[7]を $\vec{v}_i^X = [x_i^X, 1 - x_i^X]$ とする。

企業 X の戦略 V^X は，各企業に属するプレイヤーの混合戦略の結合確率の組として，2 階テンソルまたは計算の都合に合わせて射影されたベクトル $\vec{v}_X$ によって定義される。

$$V^X = \vec{v}_1^X \otimes \vec{v}_2^X \tag{6}$$

$$= [x_1^X, 1 - x_1^X] \otimes [x_2^X, 1 - x_2^X] \tag{7}$$

$$\sim \quad \vec{v}_X = (x_1^X x_2^X, x_1^X(1 - x_2^X), (1 - x_1^X)x_2^X, (1 - x_1^X)(1 - x_2^X)) \tag{8}$$

7)　正確には，演算の性質上，1 階テンソルとして定義されるものであるが，それをベクトルと同一視してこのように呼ぶことにする。

ここでは，企業の利得を売上高から販売促進費を差し引いたものと定義する。企業 I が直面する販売促進費は，次の販売促進費テンソル E^I で表される。または，計算の都合に合わせて射影された行列 ϵ^I によって定義される。

$$
\begin{aligned}
E^I = &\Big[\Big[\Big[\Big[rqz,\ rqz\Big],\ \Big[rqz,\ rqz\Big]\Big],\\
&\Big[\Big[\frac{r+1}{2}qz,\ \frac{r+1}{2}qz\Big],\ \Big[\frac{r+1}{2}qz,\ \frac{r+1}{2}qz\Big]\Big]\Big],\\
&\Big[\Big[\Big[\frac{r+1}{2}qz,\ \frac{r+1}{2}qz\Big],\ \Big[\frac{r+1}{2}qz,\ \frac{r+1}{2}qz\Big]\Big],\\
&\Big[\Big[qz,\ qz\Big],\ \Big[qz,\ qz\Big]\Big]\Big]\Big]\\
\sim\quad \epsilon^I = &\begin{pmatrix} rqz & rqz & rqz & rqz \\ \frac{r+1}{2}qz & \frac{r+1}{2}qz & \frac{r+1}{2}qz & \frac{r+1}{2}qz \\ \frac{r+1}{2}qz & \frac{r+1}{2}qz & \frac{r+1}{2}qz & \frac{r+1}{2}qz \\ qz & qz & qz & qz \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

一方，企業 II が直面する販売促進費テンソル E^{II} は添え字の置換であり，射影された行列 ϵ^{II} で言えば，$\epsilon^{II} = {}^t\epsilon^I$ である。

テンソル（2）とテンソル（4）から2企業の利得を計算すると，企業 X の利得は次の利得テンソル M^X は $D^X - E^X$ で表される。または，計算の都合に合わせて射影された行列 $\mu^X = \delta^X - \epsilon^X$ によって定義される。

$$
\begin{aligned}
M^I &= D^I - E^I\\
&= \Big[\Big[\Big[\Big[-\frac{(2qr-1)z}{2},\ -\frac{(4qr-2c-1)}{4}\Big],\ \Big[-\frac{(4qr-2c-1)}{4},\ (c-qr)z\Big]\Big],\\
&\quad \Big[\Big[-\frac{(2qr+2q+2c-3)z}{4},\ -\frac{(qr+q-1)}{2}\Big],\\
&\quad \Big[-\frac{(qr+q-1)}{2},\ -\frac{(2qr+2q-2c-1)z}{4}\Big]\Big]\Big],\\
&\quad \Big[\Big[\Big[-\frac{(2qr+2q+2c-3)z}{4},\ -\frac{(qr+q-1)}{2}\Big],\\
&\quad \Big[-\frac{(qr+q-1)}{2},\ -\frac{(2qr+2q-2c-1)z}{4}\Big]\Big],\\
&\quad \Big[\Big[(-q-c+1)z,\ -\frac{(4q+2c-3)z}{4}\Big],\ \Big[-\frac{(4q+2c-3)z}{4},\ -\frac{(2q-1)z}{2}\Big]\Big]\Big]\Big]\\
&\sim\quad \mu^I = \delta^I - \epsilon^I\\
&= \begin{pmatrix} -\frac{(2qr-1)z}{2} & -\frac{(4qr-2c-1)z}{4} & -\frac{(4qr-2c-1)z}{4} & (c-qr)z \\ -\frac{(2qr+2q+2c-3)z}{4} & -\frac{(qr+q-1)z}{2} & -\frac{(qr+q-1)z}{2} & -\frac{(2qr+2q-2c-1)z}{4} \\ -\frac{(2qr+2q+2c-3)z}{4} & -\frac{(qr+q-1)z}{2} & -\frac{(qr+q-1)z}{2} & -\frac{(2qr+2q-2c-1)z}{4} \\ (-q-c+1)z & -\frac{(4q+2c-3)z}{4} & -\frac{(4q+2c-3)z}{4} & -\frac{(2q-1)z}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M^{II} &= D^{II} - E^{II} \\
&\sim \delta^{II} - \epsilon^{II} \\
&= {}^t\delta^{I} - {}^t\epsilon^{I} \\
&= {}^t(\delta^{I} - \epsilon^{I})
\end{aligned}
$$

さらに，P_1^X が直面する企業内の利得分配テンソルを

$$A^X = \left[\left[\frac{1}{2}, a^X\right], \left[1 - a^X, \frac{1}{2}\right]\right]$$

とする。ただし $a^X \neq \frac{1}{2}$ である[8]。以後，紙面の都合で a^I を a，a^{II} を b と記す。P_1^X への分配 $s^X(x_1^X, x_2^X)$ は

$$s^X(x_1^X, x_2^X) = A^X \otimes \vec{v}_1^X \otimes \vec{v}_2^X$$

となる。P_2^X への分配は $s^X(x_1^X, x_2^X)$ を用いて，$1 - s^X(x_1^X, x_2^X)$ で与えられる。

企業 X の利得 $f^X(x_1^I, x_2^I, x_1^{II}, x_2^{II})$ は

$$
\begin{aligned}
f^X(x_1^I, x_2^I, x_1^{II}, x_2^{II}) &= M^X \otimes (\vec{v}_1^I \otimes \vec{v}_2^I) \otimes (\vec{v}_1^{II} \otimes \vec{v}_2^{II}) \\
&= -\frac{(2q-2c+1)(x_1^I+x_2^I)+((2c-1)(x_1^{II}+x_2^{II})+4q-2)z}{4} \qquad (9)
\end{aligned}
$$

である。P_1^X の利得を $r_1^X(x_1^I, x_2^I, x_1^{II}, x_2^{II})$ と置くと

$$r_1^X(x_1^I, x_2^I, x_1^{II}, x_2^{II}) = s^X(x_1^X, x_2^X) f^X(x_1^I, x_2^I, x_1^{II}, x_2^{II})$$

である。P_2^X の利得を $r_2^X(x_1^I, x_2^I, x_1^{II}, x_2^{II})$ と置くと

$$r_2^X(x_1^I, x_2^I, x_1^{II}, x_2^{II}) = (1 - s^X(x_1^X, x_2^X)) f^X(x_1^I, x_2^I, x_1^{II}, x_2^{II})$$

である。

4 個人利得の最大化

最初にこのモデルの Nash 均衡を定義する。閉区間 I を $I = [0, 1]$ と置く。Nash 均衡は次式を満たす組 $(x_1^{I*}, x_2^{I*}, x_1^{II*}, x_2^{II*})$ である。

$$\forall x_1^I \in I;\ r_1^I(x_1^{I*}, x_2^{I*}, x_1^{II*}, x_2^{II*}) \geqslant r_1^I(x_1^I, x_2^{I*}, x_1^{II*}, x_2^{II*}) \qquad (10)$$

$$\forall x_2^I \in I;\ r_2^I(x_1^{I*}, x_2^{I*}, x_1^{II*}, x_2^{II*}) \geqslant r_2^I(x_1^{I*}, x_2^I, x_1^{II*}, x_2^{II*}) \qquad (11)$$

$$\forall x_1^{II} \in I;\ r_1^{II}(x_1^{I*}, x_2^{I*}, x_1^{II*}, x_2^{II*}) \geqslant r_1^{II}(x_1^{I*}, x_2^{I*}, x_1^{II}, x_2^{II*}) \qquad (12)$$

$$\forall x_2^{II} \in I;\ r_2^{II}(x_1^{I*}, x_2^{I*}, x_1^{II*}, x_2^{II*}) \geqslant r_2^{II}(x_1^{I*}, x_2^{I*}, x_1^{II*}, x_2^{II}) \qquad (13)$$

Nash 均衡の条件を構成する (10)，(11)，(12)，(13) の不等式は，各々のプレイヤーが他のプレイヤーの戦略を所与として自己の利得を最大にすることを意味する。各プレイヤーの利得の最適化

8) $a^X = \frac{1}{2}$ ならば，P_1^X，P_2^X の戦略によらず報酬が一定なので，ピア・グループ内のゲームを行わず，後述の共同利得最大化ゲームのみ行うことになる。

のための，1階の条件

$$\frac{\partial r_1^I(x_1^I, x_2^I, x_1^{II}, x_2^{II})}{\partial x_1^I} = 0$$
$$\frac{\partial r_2^I(x_1^I, x_2^I, x_1^{II}, x_2^{II})}{\partial x_2^I} = 0$$
$$\frac{\partial r_1^{II}(x_1^I, x_2^I, x_1^{II}, x_2^{II})}{\partial x_1^{II}} = 0$$
$$\frac{\partial r_2^{II}(x_1^I, x_2^I, x_1^{II}, x_2^{II})}{\partial x_2^{II}} = 0$$

より，連立方程式を解いて次の結果を得る。

$$\begin{aligned} x_1^I &= x_2^I \\ &= \frac{-1}{4(2a-1)(2b-1)q(r-1)(qr-q-2c+1)} \\ &\quad \times (4bq^2r^2 - 2q^2r^2 + 16abq^2r - 16bq^2r - 8aq^2r + 8q^2r - 8bcqr \\ &\quad - 4acqr + 6cqr - 8abqr + 8bqr + 6aqr - 5qr - 16abq^2 + 12bq^2 \\ &\quad + 8aq^2 - 6q^2 - 32abcq + 24bcq + 20acq - 14cq + 24abq - 16bq \\ &\quad - 14aq + 9q + 4bc^2 + 4ac^2 - 4c^2 + 16abc - 12bc - 12ac + 8c \\ &\quad - 8ab + 5b + 5a - 3) \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} x_1^{II} &= x_2^{II} \\ &= \frac{-1}{4(2a-1)(2b-1)q(r-1)(qr-q-2c+1)} \\ &\quad \times (4aq^2r^2 - 2q^2r^2 + 16abq^2r - 8bq^2r - 16aq^2r + 8q^2r - 4bcqr \\ &\quad - 8acqr + 6cqr - 8abqr + 6bqr + 8aqr - 5qr - 16abq^2 + 8bq^2 \\ &\quad + 12aq^2 - 6q^2 - 32abcq + 20bcq + 24acq - 14cq + 24abq \\ &\quad - 14bq - 16aq + 9q + 4bc^2 + 4ac^2 - 4c^2 + 16abc - 12bc \\ &\quad - 12ac + 8c - 8ab + 5b + 5a - 3) \end{aligned} \tag{15}$$

$x_1^I = x_2^I$ と $x_1^{II} = x_2^{II}$ は一見よく似た解であるが，波線で強調した部分が異なる。この結果，企業 I に属するプレイヤーの戦略は等しく，企業 II に属するプレイヤーの戦略は等しくなることが分かる。以下では，これらの解が

$$\begin{cases} x_1^I = x_2^I = 1, x_1^{II} = x_2^{II} = 1 & 4.1 \\ x_1^I = x_2^I = 0, x_1^{II} = x_2^{II} = 0 & 4.2 \\ x_1^I = x_2^I = 1, x_1^{II} = x_2^{II} = 0 & 4.3 \\ x_1^I = x_2^I = 0, x_1^{II} = x_2^{II} = 1 & 4.4 \end{cases}$$

となるそれぞれの場合の分配率 a, b を求める。

以下では，c, q, r の条件より，$\Delta = \left\{(c, q, r) \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, \frac{1}{2} < c < 1, q > 0, r > 1\right\}$ とおく。

4.1 $x_1^I = x_2^I = 1, x_1^{II} = x_2^{II} = 1$ の場合

この条件は (14) と (15) の分母と分子が等しい場合であり，この条件より

$$a = b = \frac{2qr + 2q + 2c - 3}{8qr - 4} \tag{16}$$

を得る[9]。(16) が分配率に関する条件 $0 < a\ (= b) < 1$ を満たす Δ の部分集合を考察する。ここで，(16) およびそのときの解を Nash 均衡の定義式 (10) ～ (13) に代入すると次式を得る。

$$r_1^I(1,1,1,1) - r_1^I(x_1^I,1,1,1) = -\frac{(2qr-2q-2c+1)^2(x_1^I-1)^2z}{16(2qr-1)} \tag{17}$$

$$r_2^I(1,1,1,1) - r_2^I(1,x_2^I,1,1) = -\frac{(2qr-2q-2c+1)^2(x_2^I-1)^2z}{16(2qr-1)} \tag{18}$$

$$r_1^{II}(1,1,1,1) - r_1^{II}(1,1,x_1^{II},1) = -\frac{(2qr-2q-2c+1)^2(x_1^{II}-1)^2z}{16(2qr-1)} \tag{19}$$

$$r_2^{II}(1,1,1,1) - r_2^{II}(1,1,1,x_2^{II}) = -\frac{(2qr-2q-2c+1)^2(x_2^{II}-1)^2z}{16(2qr-1)} \tag{20}$$

これらの式から，$2qr-1<0$であれば，(16) は Nash 均衡の定義式を満たす。したがって，プレイヤーの利得を最大にするパラメタの集合 (これを N_1 で表す) は次式で与えられる。

$$N_1 = \{(c,q,r) \in \Delta \mid 2qr+2q+2c-3<0,\ 6qr-2q-2c-1<0,\ 2qr-1<0\}$$

4.2 $x_1^I = x_2^I = 0,\ x_1^{II} = x_2^{II} = 0$ の場合

この条件は (14) と (15) の分子が 0 に等しい場合であり，この条件より

$$a = b = -\frac{2qr-6q-2c+3}{8q-4} \tag{21}$$

を得る。(21) およびそのときの解を Nash 均衡の定義式 (10) ～ (13) に代入すると次式を得る。

$$r_1^I(0,0,0,0) - r_1^I(x_1^I,0,0,0) = -\frac{(2qr-2q-2c+1)^2(x_1^I)^2z}{16(2q-1)} \tag{22}$$

$$r_2^I(0,0,0,0) - r_2^I(0,x_2^I,0,0) = -\frac{(2qr-2q-2c+1)^2(x_2^I)^2z}{16(2q-1)} \tag{23}$$

$$r_1^{II}(0,0,0,0) - r_1^{II}(0,0,x_1^{II},0) = -\frac{(2qr-2q-2c+1)^2(x_1^{II})^2z}{16(2q-1)} \tag{24}$$

$$r_2^{II}(0,0,0,0) - r_2^{II}(0,0,0,x_2^{II}) = -\frac{(2qr-2q-2c+1)^2(x_2^{II})^2z}{16(2q-1)} \tag{25}$$

これらの式から，$2q-1<0$であれば，(21) は Nash 均衡の定義式 (10) ～ (13) を満たす。したがって，プレイヤーの利得を最大にするパラメタの集合 (これを N_2 で表す) は次式で与えられる。

$$N_2 = \{(c,q,r) \in \Delta \mid 2qr-6q-2c+3>0,\ 2qr+2q-2c-1>0,\ 2q-1<0\}$$

4.3 $x_1^I = x_2^I = 1,\ x_1^{II} = x_2^{II} = 0$ の場合

この条件は (14) の分母と分子が等しく，(15) の分子が 0 に等しい場合であり，この条件より

$$a = \frac{2qr+2q-2c-1}{8qr-8c} \tag{26}$$

$$b = \frac{-2qr+6q+6c-5}{8q+8c-8} \tag{27}$$

を得る。(26)，(27) およびそのときの解を Nash 均衡の定義式 (10) ～ (13) に代入すると次式を

9) 他に $a = b = \frac{1}{2}$ の解を得る。この分配率の意味については，前の脚注を参照。

得る。

$$r_1^I(1,1,0,0) - r_1^I(x_1^I,1,0,0) = -\frac{(2qr-2q-2c+1)^2(x_1^I-1)^2 z}{32(qr-c)} \tag{28}$$

$$r_2^I(1,1,0,0) - r_2^I(1,x_2^I,0,0) = -\frac{(2qr-2q-2c+1)^2(x_2^I-1)^2 z}{32(qr-c)} \tag{29}$$

$$r_1^{II}(1,1,0,0) - r_1^{II}(1,1,x_1^{II},0) = -\frac{(2qr-2q-2c+1)^2(x_1^{II})^2 z}{32(q+c-1)} \tag{30}$$

$$r_2^{II}(1,1,0,0) - r_2^{II}(1,1,0,x_2^{II}) = -\frac{(2qr-2q-2c+1)^2(x_2^{II})^2 z}{32(q+c-1)} \tag{31}$$

これらの式から，$qr-c<0$ かつ $q+c-1<0$ であれば，(26)，(27) は Nash 均衡の定義式 (10) ～ (13) を満たす。この場合，プレイヤーの利得を最大にするパラメタの集合は次式で与えられる[10]。

$$N_3 = \left\{(c,q,r)\in\Delta \;\middle|\; \begin{array}{lll} 2qr+2q-2c-1<0, & 6qr-2q-6c+1<0, & qr-c<0, \\ 2qr-6q-6c+5>0, & -2qr-2q-2c+3>0, & 1-q-c>0 \end{array}\right\}$$

4.4 $x_1^I = x_2^I = 0$, $x_1^{II} = x_2^{II} = 1$ の場合

この条件は (14) の分子が 0 に等しく，(15) の分母と分子が等しい場合であり，この条件より

$$a = -\frac{2qr-6q-6c+5}{8q+8c-8} \tag{32}$$

$$b = \frac{2qr+2q-2c-1}{8qr-8c} \tag{33}$$

を得る。(32)，(33) およびそのときの解を Nash 均衡の定義式 (10) ～ (13) に代入すると次式を得る。

$$r_1^I(0,0,1,1) - r_1^I(x_1^I,0,1,1) = -\frac{(2qr-2q-2c+1)^2(x_1^I)^2 z}{32(q+c-1)} \tag{34}$$

$$r_2^I(0,0,1,1) - r_2^I(0,x_2^I,1,1) = -\frac{(2qr-2q-2c+1)^2(x_2^I)^2 z}{32(q+c-1)} \tag{35}$$

$$r_1^{II}(0,0,1,1) - r_1^{II}(0,0,x_1^{II},1) = -\frac{(2qr-2q-2c+1)^2(x_1^{II}-1)^2 z}{32(qr-c)} \tag{36}$$

$$r_2^{II}(0,0,1,1) - r_2^{II}(0,0,1,x_2^{II}) = -\frac{(2qr-2q-2c+1)^2(x_2^{II}-1)^2 z}{32(qr-c)} \tag{37}$$

これらの式から，$qr-c<0$ かつ $q+c-1<0$ であれば，(32)，(33) は Nash 均衡の定義式 (10) ～ (13) を満たす。この場合，プレイヤーの利得を最大にするパラメタの集合は次式で与えられる[11]。

$$N_4 = \left\{(c,q,r)\in\Delta \;\middle|\; \begin{array}{lll} -2qr+6q+6c-5<0, & -2qr-2q-2c+3>0, & q+c-1<0, \\ 2qr+2q-2c-1<0, & 6qr-2q-6c+1<0, & qr-c<0 \end{array}\right\}$$

5 企業利得の最大化

前節では，プレイヤーの利得最大化行動に基づく Nash 均衡の存在条件を考察したが，この節で

10) $N_3 \neq \emptyset$ であることが確かめられる。第 6 節では，条件 (48) で，この集合の一要素を示している。
11) $N_4 \neq \emptyset$ であることが確かめられる。第 6 節では，条件 (49) で，この集合の一要素を示している。

は，企業におけるプレイヤーの利得の和（共同利得）を最大にする戦略を考察する。そして企業 I, II におけるプレイヤーの利得の和を，それぞれ「企業利得」と定義する。我々のモデルでは，各企業における意思決定主体はプレイヤーであり，その数を 2 と仮定しているが，本節で考察する状況は，各企業に架空の経営者が存在して，この経営者がこの企業利得を最大化するようにプレイヤーに指示する状況と見做すことができる。

このような状況における均衡は，次式を満たす組 $(x_1^{I\dagger}, x_2^{I\dagger}, x_1^{II\dagger}, x_2^{II\dagger})$ として定義される。

$$\forall x_1^I \in I; f^I(x_1^{I\dagger}, x_2^{I\dagger}, x_1^{II\dagger}, x_2^{II\dagger}) \geqslant f^I(x_1^I, x_2^{I\dagger}, x_1^{II\dagger}, x_2^{II\dagger}) \tag{38}$$

$$\forall x_2^I \in I; f^I(x_1^{I\dagger}, x_2^{I\dagger}, x_1^{II\dagger}, x_2^{II\dagger}) \geqslant f^I(x_1^{I\dagger}, x_2^I, x_1^{II\dagger}, x_2^{II\dagger}) \tag{39}$$

$$\forall x_1^{II} \in I; f^{II}(x_1^{I\dagger}, x_2^{I\dagger}, x_1^{II\dagger}, x_2^{II\dagger}) \geqslant f^{II}(x_1^{I\dagger}, x_2^{I\dagger}, x_1^{II}, x_2^{II\dagger}) \tag{40}$$

$$\forall x_2^{II} \in I; f^{II}(x_1^{I\dagger}, x_2^{I\dagger}, x_1^{II\dagger}, x_2^{II\dagger}) \geqslant f^{II}(x_1^{I\dagger}, x_2^{I\dagger}, x_1^{II\dagger}, x_2^{II}) \tag{41}$$

最適解を求めるために，各変数に関する偏導関数を求めてみると，

$$\frac{\partial f^I(x_1^I, x_2^I, x_1^{II}, x_2^{II})}{\partial x_1^I} = -\frac{(2qr - 2q - 2c + 1)z}{4} \tag{42}$$

$$\frac{\partial f^I(x_1^I, x_2^I, x_1^{II}, x_2^{II})}{\partial x_2^I} = -\frac{(2qr - 2q - 2c + 1)z}{4} \tag{43}$$

$$\frac{\partial f^{II}(x_1^I, x_2^I, x_1^{II}, x_2^{II})}{\partial x_1^{II}} = -\frac{(2qr - 2q - 2c + 1)z}{4} \tag{44}$$

$$\frac{\partial f^{II}(x_1^I, x_2^I, x_1^{II}, x_2^{II})}{\partial x_2^{II}} = -\frac{(2qr - 2q - 2c + 1)z}{4} \tag{45}$$

となる。(42) ～ (45) は，変数 x_1^I, x_2^I, x_1^{II}, x_2^{II} に依存することなく一定の値になることがわかる。そこで，$2qr - 2q - 2c + 1 < 0$ の場合と $2qr - 2q - 2c + 1 > 0$ の場合について考察する。前者の場合，偏導関数が常に正，すなわち狭義単調増加するので，最適値は $x_1^I = 1$, $x_2^I = 1$, $x_1^{II} = 1$, $x_2^{II} = 1$ である。後者の場合，偏導関数が常に負，すなわち狭義単調減少するので，最適値は $x_1^I = 0$, $x_2^I = 0$, $x_1^{II} = 0$, $x_2^{II} = 0$ である。いま，企業利得を最大にするパラメタの集合を J_-, J_+ で表す。

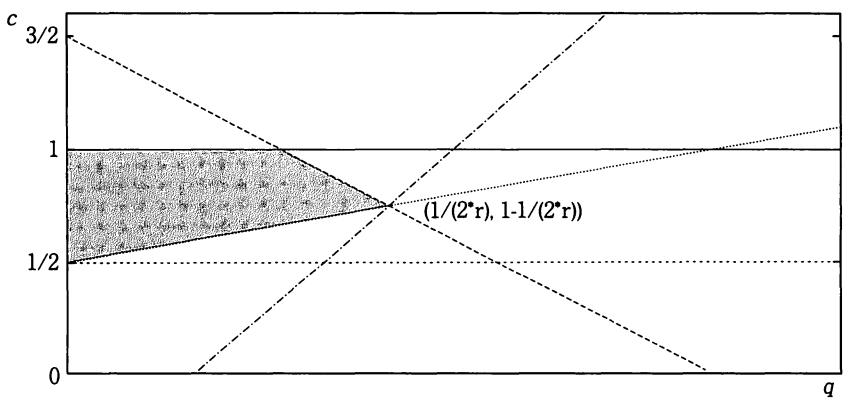


図 1: 個別合理性と集団合理性の両立する (q, c) の領域，$r > 1$, $x_1^I = x_2^I = x_1^{II} = x_2^{II} = 1$ の場合

$$J_- = \{(c, q, r) \in \Delta \mid 2qr - 2q - 2c + 1 < 0\} \tag{46}$$

$$J_+ = \{(c, q, r) \in \Delta \mid 2qr - 2q - 2c + 1 > 0\} \tag{47}$$

6 おわりに

本節ではモデルの意味するところを述べて結びに代える。市場におけるマーケットシェアを c, 市場全体の販売総額に占める販売促進費の支出額を q, さらに高い販売促進費の支出額と低い販売促進費の支出額の比率を $r = \frac{c_h}{c_\ell}$ とし，これらを所与とする。そのとき，プレイヤーが直面する分配率が両企業で共通であり，各企業内のプレイヤーが結果的に「協力をする」[12]ような Nash 均衡が存在する。このような Nash 均衡は N_1, N_2 で示されている。

両企業にとって共通のこの分配率に対応する Nash 均衡では各プレイヤーの利得が最大になっている。各プレイヤーが自己の利得を最大にするように戦略を選択しているとき，そのプレイヤーは「個別合理的」であると呼ばれる。また，各企業の利得を最大にするパラメタの集合は，前節で定義した，J_- および J_+ である。本稿では，各企業が自己の利得を最大にするように戦略を選択しているとき，それらの企業を「集団合理的」であると呼ぶことにしよう。分析の結果，

$$\begin{cases} N_1 \cap J_- \neq \emptyset \\ N_2 \cap J_+ \neq \emptyset \end{cases}$$

であることが確かめられた。上式の第 1 番目の式の共通集合は図 1 の影を付けた領域で示されている。その領域では，企業の各プレイヤーは自己の利得を最大にする戦略を選択しており，同時にその戦略は，当該プレイヤーの属する企業の利得を最大にする戦略になっている。すなわち，個別合理性と集団合理性が両立している[13]。

また，あるパラメタの組に対して，企業毎に異なる分配率が存在して，この分配率の下で各プレイヤーの利得が最大になる Nash 均衡が存在することが示された。これらの Nash 均衡は N_3 および N_4 である。しかしながら，この Nash 均衡では企業利得は最大化されない。すなわち，個別合理性は集団合理性と両立しない。このようなケースは，いわゆる「囚人のジレンマ」に相当するであろう。このことは，簡単な数値例によって確かめることができる。いま，集合 N_3 の 1 要素であるパラメタの例として

$$a = \frac{9}{16},\ b = \frac{3}{4},\ c = \frac{7}{10},\ q = \frac{1}{4},\ r = 2 \tag{48}$$

をとる。このとき，プレイヤーの最適な戦略は $x_1^I = x_2^I = 1$, $x_1^{II} = x_2^{II} = 0$ である。このケースにおいて，Nash 均衡の定義式 (10) ～ (13) が満たされることは容易に確かめることができる。企業 I のプレイヤーの利得は，それぞれ $\frac{z}{10}$ であり，企業 II のプレイヤーの利得は，それぞれ $\frac{z}{40}$ である。したがって，利得の合計はそれぞれ，$\frac{z}{5}$ および $\frac{z}{20}$ である。このパラメタの組 (48) に対して，企業利得を最大にするための条件である (42) ～ (45) の右辺の分子 $2qr - 2q - 2c + 1$ の値

12) なお，本稿の組織ゲームでは，各プレイヤーが選べる戦略が 2 種類しかないという特殊性から，確率 0 で同じ戦略を選択することも協力と言える。

13) 第 2 番目の式の共通集合は，同様にして示すことが可能であるが，紙面の制約上，ここでは掲載することを控える。

は，$\frac{1}{10}$ となり正数である。したがって，企業利得を最大にする戦略は $x_1^I = x_2^I = x_1^{II} = x_2^{II} = 0$ である。そしてこのときの企業利得は，それぞれ $\frac{z}{4}$ である。Nash 均衡において，企業に属する個々のプレイヤーは，自己の利得を最大にしているが，その場合，企業利得は最大化されないのである。

また，集合 N_4 の 1 要素であるパラメタの例として

$$a = \frac{5}{12},\ b = \frac{11}{24},\ c = \frac{8}{12},\ q = \frac{1}{12},\ r = 2 \tag{49}$$

をとる。このとき，プレイヤーの最適な戦略は $x_1^I = x_2^I = 0$，$x_1^{II} = x_2^{II} = 1$ である。このケースにおいて，Nash 均衡の定義式 (10) ～ (13) が満たされることは容易に確かめることができる。企業 I のプレイヤーの利得は，それぞれ $\frac{z}{8}$ であり，企業 II のプレイヤーの利得は，それぞれ $\frac{z}{4}$ である。したがって，利得の合計はそれぞれ，$\frac{z}{4}$ および $\frac{z}{2}$ である。このパラメタの組 (49) に対して，企業利得を最大にするための条件である (42) ～ (45) の右辺の分子 $2qr - 2q - 2c + 1$ の値は，$-\frac{1}{6}$ となり負数である。したがって，企業利得を最大にする戦略は $x_1^I = x_2^I = x_1^{II} = x_2^{II} = 1$ である。そしてこのときの企業利得は，それぞれ $\frac{z}{3}$ である。このケースのように，企業の利得最大化戦略の利得と Nash 均衡における利得とを比較すると，企業利得最大化の方が少なくなることがある。企業に属するプレイヤーの自由な行動は，より高い成果をもたらす可能性がある。

我々の研究 [2]，[3] では，複占市場における企業行動をゲーム理論的に考察した。残された問題として，企業数，各企業に所属するプレイヤーの数，および戦略の数を増加させることによって，寡占市場を取り扱う方向に拡張することが考えられる。これらは今後の課題としたい。

参 考 文 献

[1] 菊澤研宗，『組織の経済学入門』，有斐閣，(2006).

[2] 中川義行・山下章夫，「複占市場のゲーム理論的分析」，『龍谷大学経営学論集』，第48巻第 1 号，(2008).

[3] 中川義行・山下章夫，「ピア・グループにおけるプレイヤーの協力について」，『龍谷大学経営学論集』，第48巻第 3 号，(2008).

[4] 丸山雅祥・成生達彦，『現代のミクロ経済学』，創文社，(1997).

（受理　2008年12月16日）