〈研究ノート〉

ピア・グループにおけるプレイヤーの協力について

中　川　義　行
山　下　章　夫

キーワード
ゲーム理論　Maxima　複占市場　マーケットシェア　ピア・グループ(仲間組織)

1 はじめに

本稿は複占市場における企業に焦点を当てて，その企業に属するプレイヤーの行動をゲーム理論的に考察したものである[1)]。我々は中川・山下 [3] で組織ゲームを定義して，その応用例として複占市場における企業行動を分析した。そこでは2企業は市場規模が一定のもとで，より多くの利得を求めて競争を行う。その観点からは，Dixit [1] のコンテストゲームに類似している。

本稿は組織ゲームの一応用例であるが，プレイヤーの直面する利得行列をマーケットシェア促進のための販売促進費と関連付けて構成している点が特徴的である。以下では，各プレイヤーは有限個の戦略の中から或る戦略を選択するものとする。そして選択された戦略は販売促進費の水準と1対1に対応するものと仮定する。さらに販売促進費とマーケットシェアの大きさの関係は，全てのプレイヤーにとって既知の情報であると仮定する。このような前提の下で各プレイヤーはどの戦略を選択することが，利得の最大化の観点から最適であるかの分析を行っている。第2節では，問題を定式化する。第3節では，各プレイヤーの利得を定式化し，その最大化のための最適条件について分析する。さらに，パラメータの組について Nash 均衡の存在条件を求める。次に，企業利得最大化の Nash 均衡についても述べる。最後に，その両者の関係について考察する。ただし，その証明については煩雑であるため，全て付録に回している。第4節では，各命題が示す経済学的な意義について考察し，残された問題について言及する。

2 モデルの設定

組織ゲームの応用例として次の問題を考える。

1. 市場には2企業 I, II が存在する。企業 I は2人の意思決定者からなるピア・グループであり，企業 II の意思決定者は1人である。各企業は，ある固定した価格で財を販売しており，市場全体の販売総額を z とし，z は正の定数とする。

2. すべての意思決定者は，戦略として，所属する企業の販売促進費の支出水準に対する選択肢 $\{H, L\}$ から1つを選んで同時に投票する。

1) 本研究は龍谷大学経営学会の研究部会「社会科学の研究や教育における Maxima の応用」の共同研究の一部である。

(a) 企業 I の販売促進費の支出水準は，所属する 2 人が選んだ投票結果の 4 種類の組み合わせ $\{(H_1, H_2), (H_1, L_2), (L_1, H_2), (L_1, L_2)\}$ から，3 種 4 元の企業戦略 $\sum_I = \{h, m, m, \ell\}$ への順序を込めた全射の像として，投票による決定を行う[2]。

(b) 企業 II の販売促進費の支出水準は，所属する 1 人が選んだ投票結果 $\{(H), (L)\}$ から，2 種類の企業戦略 $\sum_{II} = \{h, \ell\}$ への順序を込めた全射の像として，投票による決定を行う。

3. 支出水準 $\sigma \in \sum_X (X \in \{I, II\})$ に対する販売促進費 c_σ は両企業で共通しており，それぞれ

$$\begin{cases} c_h = 2qz \\ c_m = \dfrac{3}{2}qz \\ c_\ell = qz \end{cases}$$

とする。ただし，q は市場全体の販売総額 z に対する販売促進費の割合を示す。

4. 企業 I の獲得するマーケットシェアは販売促進費に依存する。ここでは，企業 I の獲得するマーケットシェアは次のルールで決まるものとする。

(a) 企業 II が H を選択する場合。

i. 企業 I の 2 人のプレイヤーが同じ戦略 (H_1, H_2)[3] を選択する場合。企業 I は c_h を支出する。そのとき，両企業は同じ戦略を選択することになるので，企業 I の獲得するマーケットシェアは $\dfrac{1}{2}$ であるとする。

ii. 企業 I の 2 人のプレイヤーが同じ戦略 (L_1, L_2) を選択する場合。企業 I は c_ℓ を支出する。企業 II は H を選択しているが，仮定より c_ℓ は c_h の $\dfrac{1}{2}$ の大きさである。この場合，企業 I の獲得するマーケットシェアは $\dfrac{1}{2}$ よりも小さいものとする。ここでは，その大きさを $1 - c$ とする。ただし，$\dfrac{1}{2} < c < 1$ である。

iii. 企業 I の 2 人のプレイヤーが異なる戦略 $(L_1, H_2), (H_1, L_2)$ を選択する場合。この場合，企業 I は c_m を支出する。企業 I が獲得するマーケットシェアは漠然と $1 - c$ と $\dfrac{1}{2}$ の間にあると想定されるが，ここでは単純化のために，このときのマーケットシェアを $1 - c$ と $\dfrac{1}{2}$ の相加平均であるとする。

(b) 企業 II が L を選択する場合。

i. 企業 I の 2 人のプレイヤーが同じ戦略を選択する (H_1, H_2) である場合。企業 I は c_h を支出する。この場合，企業 I の獲得するマーケットシェアは c である。

ii. 企業 I の 2 人のプレイヤーが同じ戦略 (L_1, L_2) を選択する場合。企業 I は c_ℓ を支出する。両企業は同じ戦略を選択するので，$\dfrac{1}{2}$ のマーケットシェアを得る。

iii. 企業 I の 2 人のプレイヤーが異なる戦略 $(L_1, H_2), (H_1, L_2)$ を選択する場合。この場合，企業 I は c_m を支出する。企業 I が獲得するマーケットシェアは漠然と c と $\dfrac{1}{2}$ の間にある

2) 従来の研究では，条件3. の販売促進費の割合 q は企業が制御できる変数として扱われることが多いが，本稿ではパラメータとして扱っている。

3) H_1 は企業 I の第 1 番目のプレイヤーが高い販売促進費の戦略を選択することを意味する。以下の記号の意味は同様に解釈する。

ものと想定されるが，この場合もマーケットシェアを c と $\frac{1}{2}$ の相加平均であるとする。

表1: 企業 I のマーケットシェア

支出水準戦略		H	L
	販売促進費	c_h	c_ℓ
(H_1, H_2)	c_h	$\frac{1}{2}$	c
(H_1, L_2)	c_m	$\frac{3-2c}{4}$	$\frac{2c+1}{4}$
(L_1, H_2)	c_m	$\frac{3-2c}{4}$	$\frac{2c+1}{4}$
(L_1, L_2)	c_ℓ	$1-c$	$\frac{1}{2}$

この結果，企業 I の獲得するマーケットシェアが表1のように与えられる。この表を3階テンソルで表したものを企業 I のマーケットシェアテンソルとして S_I と置く。

$$S_I = \left[\left[\left[\frac{1}{2}, c\right], \left[\frac{3-2c}{4}, \frac{2c+1}{4}\right]\right], \left[\left[\frac{3-2c}{4}, \frac{2c+1}{4}\right], \left[1-c, \frac{1}{2}\right]\right]\right] \qquad (1)$$

同様に，企業 II のマーケットシェアテンソル S_{II} の成分を決めてもよいが，2企業しかないことから，S_I の各成分を1から引けばよいので，

$$S_{II} = \left[\left[\left[\frac{1}{2}, 1-c\right], \left[\frac{2c+1}{4}, \frac{3-2c}{4}\right]\right], \left[\left[\frac{2c+1}{4}, \frac{3-2c}{4}\right], \left[c, \frac{1}{2}\right]\right]\right] \qquad (2)$$

を得る[4]。

3 利得と最適条件

ここでは，企業の利得を売上高から販売促進費を差し引いたものと定義する。テンソル(1)とテンソル(2)から2企業の利得を計算すると，企業 $X(X \in \{I, II\})$ の利得は次の利得テンソル M_X で表される。

---

4) 本稿が想定しているゲームと利得構造がやや似ている例として，落語の『河豚鍋』という話をイメージするとよい。この『河豚鍋』は，『東海道中膝栗毛』の作者である十返舎一九が作った小噺を，落語家の二代目林家染丸が上方落語として仕立て直したものとされ，今日では江戸落語にも移植されている。上方落語版では，桂吉朝の口演をテキストに起こしたものを

http://homepage3.nifty.com/rakugo/kamigata/rakugo69.htm

で読むことができる。あらすじは，概ね以下の通り。

旦那さんのところへ遊びにきた大橋さん，旦那さんから酒の肴として鍋料理を出されて喜んだ。ところが，それが素人料理の河豚鍋だと知った途端，自分が毒見役をさせられているのに気付いて，箸を出すのに躊躇する。「河豚は食べたし命は惜しし」でお互い策を弄して，相手に先に食べさせようとするが，上手くいかず時間ばかりが過ぎてゆく。そこへちょうど，お鷹さんが現れた。これ幸いと旦那さんと大橋さんが，お鷹さんを騙して先に食べさせようとするが，実はお鷹さんの方が一枚上手で，逆に自分たちが毒味役をさせられてしまう。

落語では，組織間では逐次ゲームであったり，利得も河豚毒の有無で不確定であったりと本稿の組織ゲームとは違いもあるが，駆け引きの様子はイメージしやすいであろう。

$$M_I = \left[\left[\left[-\frac{(4q-1)z}{2},\ (c-2q)z\right],\ \left[-\frac{(6q+2c-3)z}{4},\ -\frac{(6q-2c-1)z}{4}\right]\right],\right.$$
$$\left.\left[\left[-\frac{(6q+2c-3)z}{4},\ -\frac{(6q-2c-1)z}{4}\right],\ \left[(-q-c+1)z,\ -\frac{(2q-1)z}{2}\right]\right]\right]$$
$$M_{II} = \left[\left[\left[\frac{z}{2}-2qz,\ (-q-c+1)z\right],\ \left[-\frac{(8q-2c-1)z}{4},\ -\frac{(4q+2c-3)z}{4}\right]\right],\right.$$
$$\left.\left[\left[-\frac{(8q-2c-1)z}{4},\ -\frac{(4q+2c-3)z}{4}\right],\ \left[(c-2q)z,\ -\frac{(2q-1)z}{2}\right]\right]\right]$$

企業 I のプレイヤーをそれぞれ P_1, P_2 とする。P_1 の混合戦略ベクトル[5] $\vec{v}_1 = [x_1,\ 1-x_1]$, P_2 の混合戦略 $\vec{v}_2 = [x_2,\ 1-x_2]$ および P_1 が直面する企業内の利得分配テンソルを

$$A = \left[\left[\frac{1}{2},\ a\right],\ \left[1-a,\ \frac{1}{2}\right]\right]$$

とする。ただし $a \neq \frac{1}{2}$ である[6]。P_1 への分配 $s(x_1, x_2)$ は

$$s(x_1, x_2) = A \otimes \vec{v}_1 \otimes \vec{v}_2$$

となる。P_2 への分配は $s(x_1, x_2)$ を用いて，$1 - s(x_1, x_2)$ で与えられる。企業 II のプレイヤーを P_3 とし，その混合戦略ベクトルを $\vec{v}_3 = [x_3,\ 1-x_3]$ とする。企業 I の利得 $f_1(x_1, x_2, x_3)$ は

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = M_I \otimes (\vec{v}_1 \otimes \vec{v}_2) \otimes \vec{v}_3$$
$$= -\frac{((4c-2)x_3+(2q-2c+1)x_2+(2q-2c+1)x_1+4q-2)z}{4} \qquad (3)$$

である。P_1 の利得を $r_1(x_1, x_2, x_3)$ と置くと

$$r_1(x_1, x_2, x_3) = s(x_1, x_2) f_1(x_1, x_2, x_3)$$

である。P_2 の利得を $r_2(x_1, x_2, x_3)$ と置くと

$$r_2(x_1, x_2, x_3) = (1 - s(x_1, x_2)) f_1(x_1, x_2, x_3)$$

である。企業 II の利得 $f_2(x_1, x_2, x_3)$ は

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = M_{II} \otimes (\vec{v}_1 \otimes \vec{v}_2) \otimes \vec{v}_3$$
$$= -\frac{((4q-4c+2)x_3+(2c-1)x_2+(2c-1)x_1+4q-2)z}{4} \qquad (4)$$

である。企業 II は単独のプレイヤーによって構成されるものと仮定しているので，P_3 の利得 $r_3(x_1, x_2, x_3)$ は $f_2(x_1, x_2, x_3)$ そのものである。

本稿では，非協力ゲームにおけるプレイヤーの協力という概念は，同一組織（企業）内に所属する全てのプレイヤーが確率 1 で同じ戦略を選択すること[7]を言う。このとき，以下の 3 命題と 1 系が得られた。

命題 1. 上述の設定の組織ゲームにおいて，各プレイヤーの個人利得最大化の Nash 均衡の存在条件は次の通りである。

1. $2q - 2c + 1 > 0$ のとき，

---

5) 正確には，演算の性質上，1 階テンソルとして定義されるものであるが，それをベクトルと同一視してこのように呼ぶことにする。

6) $a = \frac{1}{2}$ ならば，P_1, P_2 の戦略によらず報酬が一定なので，ピア・グループ内のゲームを行わず，共同利得最大化ゲームのみ行うことになる。

7) なお，本稿の組織ゲームでは，各プレイヤーが選べる戦略が 2 種類しかないという特殊性から，確率 0 で同じ戦略を選択することも協力と言える。

(a) $0 \leqslant a < \frac{1}{4}$ のとき，$\frac{8ac-2c-1}{16a-6} \leqslant q < \frac{1}{2}$

(b) $\frac{1}{2} < a \leqslant 1$ のとき，$\frac{8ac-2c-1}{16a-6} \leqslant q \leqslant \frac{2c+4a-3}{8a-2}$

のいずれかの条件下で $x_1 = x_2 = \frac{-8aq+2q+2c+4a-3}{2(2a-1)(2q-2c+1)}$，$x_3 = 0$ となる Nash 均衡が存在する。

2. $2q-2c+1 < 0$ のとき，$\frac{3}{4} < c < 1$ かつ

(a) $0 \leqslant a < \frac{1}{4}$ のとき，$\frac{2c+4a-3}{16a-6} \leqslant q \leqslant \frac{-8ac+6c+8a-5}{8a-2}$

(b) $\frac{1}{4} < a < \frac{3}{8}$ のとき，$\frac{-8ac+6c+8a-5}{8a-2} \leqslant q < \frac{1}{2}$

(c) $\frac{3}{8} < a < \frac{1}{2}$ のとき，$\frac{-8ac+6c+8a-5}{8a-2} \leqslant q \leqslant \frac{2c+4a-3}{16a-6}$

のいずれかの条件下で $x_1 = x_2 = \frac{-8aq+2q-8ac+6c+8a-5}{2(2a-1)(2q-2c+1)}$，$x_3 = 1$ となる Nash 均衡が存在する。

3. $2q-2c+1 = 0$ のとき，

(a) $\frac{1}{2} < c < \frac{3}{4}$ のとき，$x_1 = x_2 = 0$ かつ任意の $x_3 \in [0, 1]$ に対して Nash 均衡が存在する。

(b) $\frac{3}{4} \leqslant c < 1$ のとき，任意の $x_1 \in [0, 1]$，任意の $x_2 \in [0, 1]$ かつ $x_3 = \frac{1}{2c-1} - 1$ に対して Nash 均衡が存在する。

命題 2. 上述の設定の組織ゲームにおいて，企業 I の利得最大化の Nash 均衡は，以下の場合に分けられる。

1. $q + \frac{1}{2} < c < 1$ のとき，$x_1 = x_2 = x_3 = 1$ となる Nash 均衡が存在する。
2. $\frac{1}{2} < c < q + \frac{1}{2}$ のとき，$x_1 = x_2 = x_3 = 0$ となる Nash 均衡が存在する。

この場合，企業 I に所属するプレイヤーは，互いに協力している。

命題 3. 上述の設定の組織ゲームにおいて，P_1，P_2 の個人利得最大化の Nash 均衡条件と，企業 I の利得最大化の Nash 均衡条件が，一致する場合がある。

系 3.1. 上述の設定の組織ゲームにおいて，q，c が与えられたとき，分配率 a を $a = \frac{6q+2c-3}{16q-4}$ または $a = \frac{2q+2c-3}{8q-4}$ として定めることによって，P_1，P_2 の個人利得最大値の合計を，企業 I の利得最大値に一致させることができる。

証明は煩雑だが初等的なので，全て付録に回すことにする。

4 命題が示す経済学的意義

以上のモデルの経済学的意味を述べて結びとする。本稿で考察している企業 I の組織形態はピア・グループと呼ばれる組織形態である。ピア・グループとはいわゆる「平等な」仲間組織のことであり，上下の階層がなく直接的な監督者もいない単純な平面的組織である[8)]。ここで考察したピア・グループは 2 人のプレイヤーから成る最小の組織形態である。

企業 I のプレイヤー P_1, P_2 は 2 つの戦略を持つ。我々のモデルにおける戦略は次のように喩えることができる。P_1 は H_1, L_1 と書かれた 2 種類のカードを持ち, P_2 は H_2, L_2 と書かれた 2 種類のカードを持っている。彼らはこれらのカードのうち 1 枚を組織内に置かれた「投票箱」に投票する[9]。彼らが投票するカードの種類に応じて 4 つの要素で構成される次の集合 $\sum_1$ が確定する。

$$\sum_1 = \{\{H_1, H_2\}, \{H_1, L_2\}, \{L_1, H_2\}, \{L_1, L_2\}\} \tag{5}$$

$\sum_1$ の第 1 要素は P_1 がカード H_1, P_2 がカード H_2 を投票することを意味する。他の要素も同様に解釈する。そしてこれらの要素が実現する確率は, プレイヤーがそれぞれのカードを選択する確率の結合確率として求められる。我々は $\sum_1$ の各要素にこの結合確率を対応させたものを, 企業 I の戦略と定義する[10]。このようにして定義される企業戦略は, 企業 I のプレイヤーが互いに「平等」であることから考えても自然な想定であると思われる。他方, 企業 II のプレイヤー P_3 は 2 つのカード H_3, L_3 を持っている。彼も企業 I のプレイヤーと同様に, 自企業に設置された「投票箱」にカードを投票する。その結果, 2 つの要素で構成される次の集合 $\sum_2$ が確定する。

$$\sum_2 = \{\{H_3\}, \{L_3\}\} \tag{6}$$

P_3 がカードを選ぶ確率を $\sum_2$ の要素に付与したものを企業 II の戦略と定義する。企業 II のメンバー数は 1 であると仮定しているので, 企業 II の戦略は P_3 の混合戦略である。

我々のモデルでは, プレイヤーによる戦略の選択は企業としての広告費の決定をも意味する。つまり $\sum_1$ の各要素は3つの広告費の支出額, (高い広告費 c_h, 低い広告費 c_ℓ, そしてそれらの中間の広告費 c_m) のいずれかとある対応関係をもつ。また $\sum_2$ の各要素は高い広告費 c_h, 低い広告費 c_ℓ と 1 対 1 の対応関係をもつ。具体的には, 企業 I のプレイヤーの選択する戦略が異なる場合, 中間の広告費 c_m が選択され, それが同じ場合は高い広告費 c_h か低い広告費 c_ℓ のいずれかが選択される。企業 II では c_h か c_ℓ が選択される。

企業 II のメンバー数を1と仮定したのは, 主に企業 I のプレイヤーの行動を考察するための単純化である。企業 I のプレイヤーの利得は, 当該企業の他のプレイヤーの戦略に依存するだけではなく, 企業 II の戦略にも依存する。即ち, 企業 I のプレイヤーは自己の戦略の選択において, 同一組織内における他のプレイヤーの戦略と組織外のプレイヤーの戦略 (この場合は企業 II の戦略) を同時に考慮に入れて最適な戦略を選択する。企業 I のプレイヤーの利得は, 所与の利得分配率 a の下でプレイヤーの戦略の選択に応じて決まる。戦略と利得のこの関係は, 一種の報酬体系と考えることができるであろう。そこでは各プレイヤーは予め決められた分配率 a をパロメーターとする企業内競争と相手企業との競争を同時に考慮に入れて自己の利得を最大にする。我々はこのような状況における Nash 均衡の存在条件を考察した。

Nash 均衡における個人利得を $r_1(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$, $r_2(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ とするとき, 企業 I の組織利得は $f_1(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = r_1(x_1^*, x_2^*, x_3^*) + r_2(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ である。一般に

$$f_1(x_1^*, x_2^*, x_3^*) \leqslant \max f_1(x_1, x_2, x_3) \equiv f_1(x_1^\dagger, x_2^\dagger, x_3^\dagger) \tag{7}$$

---

8) 菊澤 [2], 31ページを参照のこと。

9) 例えば H_1 のカードを投票することは, 戦略 H_1 を選択することを意味する。

10) P_1, P_2 の確率が決まれば, 対応する $\sum_1$ の要素に付与する確率は確定して, それらの確率の和は 1 となる。逆に確率の和が 1 であるという条件の下で, $\sum_1$ の各要素に任意の確率を付与した場合, その確率と一致するような, P_1, P_2 の確率が常に存在するとは限らない。

が成り立つのであるが，分析の結果，

$$f_I(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = \max f_I(x_1, x_2, x_3) \tag{8}$$

である場合の存在が示された。(8) の左辺を個人合理性，右辺を集団合理性と呼べば，個人合理性と集団合理性が一致する。しかも，この場合

$$x_1^* = x_1^\dagger = x_2^* = x_2^\dagger = 0 \tag{9}$$

または

$$x_1^* = x_1^\dagger = x_2^* = x_2^\dagger = 1 \tag{10}$$

の場合があり，企業 I のプレイヤー間の協力関係が結果的に生成される。即ち，両プレイヤーは確率 0 または 1 で戦略を選択する。本稿ではマーケットシェア c，広告費の支出割合 q を与件として取り扱っている。このとき，これらの c，q に対応した分配率 a が一義的に決まり，この分配率に応じてプレイヤーへの報酬が決まる。分配率をパロメーターとする企業 I の報酬体系は，組織内における価格メカニズムの役割を果たすものと考えられる。「適正な」報酬体系は，プレイヤーの自由な行動を通じて，結果として組織利得の最大化に寄与するのである。

我々は，組織ゲームの適用例として複占市場における企業行動を考察した。今後の課題は，企業 II のプレイヤー数が 2 の場合の企業行動を分析することである。

参 考 文 献

[1] Dixit, A., "Strategic Behavior in Contests", *The American Economic Review*, Vol. 77, No. 5, (1987), pp. 891-898.

[2] 菊澤研宗，『組織の経済学入門』，有斐閣，(2006).

[3] 中川義行・山下章夫，「複占市場のゲーム理論的分析」，『龍谷大学経営学論集』，第48巻第 1 号，(2008).

付録 A 命題 1 の証明

関数 $r_i(x_1, x_2, x_3)$ $(i = 1, 2, 3)$ を求めるときに 3 階テンソルを利用する。

ただ高階テンソルやリスト積 $\otimes$ に慣れていなければ，以下のような行列やベクトルで考えても計算結果を同値にすることができる。これは純粋に計算上の工夫であり，本来の階より低い階のテンソルに射影するので，射影軸によって行列が異なるため，以下の表現は一意ではない。

$$M_I \sim m_I$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{(4q-1)z}{2} & (c-2q)z \\ -\frac{(6q+2c-3)z}{4} & -\frac{(6q-2c-1)z}{4} \\ -\frac{(6q+2c-3)z}{4} & -\frac{(6q-2c-1)z}{4} \\ (-q-c+1)z & -\frac{(2q-1)z}{2} \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_1 \otimes \vec{v}_2 \sim \vec{u}$$

$$= (x_1x_2,\ x_1(1-x_2),\ (1-x_1)x_2,\ (1-x_1)(1-x_2))$$

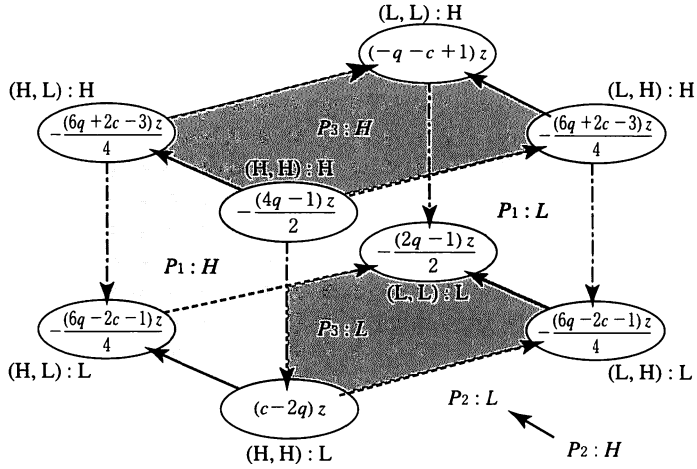


図 1: 利得テンソル M_I の可視化の一例

$$A \sim \alpha = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & a \\ 1-a & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

として同一視することで,

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3) &= M_I \otimes (\vec{v}_1 \otimes \vec{v}_2) \otimes \vec{v}_3 \\ &= \vec{u}\, m_I\, \vec{v}_3^{\,\mathrm{T}} \\ s(x_1, x_2) &= A \otimes \vec{v}_1 \otimes \vec{v}_2 \\ &= \vec{v}_1\, \alpha\, \vec{v}_2^{\,\mathrm{T}} \end{aligned}$$

として計算しても同じ値を得る。

まず，停留条件を求めるために，関数 $r_i(x_1, x_2, x_3)$ $(i = 1, 2, 3)$ を変数 x_i で偏微分したものを考える。

$$\frac{\partial r_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) = -\frac{(2(2a-1)(2c-1)x_3+2(2a-1)(2q-2c+1)x_1+(8a-2)q-2c-4a+3)z}{8} \tag{11}$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) = -\frac{(2(2a-1)(2c-1)x_3+2(2a-1)(2q-2c+1)x_2+(8a-2)q-2c-4a+3)z}{8} \tag{12}$$

$$\frac{\partial r_3}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = -\frac{(2q-2c+1)z}{2} \tag{13}$$

ここで，$\frac{\partial r_3}{\partial x_3}$ が変数 x_i を一切含まないので，方程式 (11)，(12)，(13) を 0 と置いてしまうと不能または不足方程式系となる可能性がある。だが，$\frac{\partial r_3}{\partial x_3}$ の意味を考えると，$z > 0$ より $2q - 2c + 1$ の値によって次のように場合分けすることになる。

1. $2q - 2c + 1 > 0$ のとき。

$r_3(x_1, x_2, x_3)$ は x_3 について狭義単調減少する。すなわち，$x_3 = 0$ が最適解となる。このとき，方程式 $\frac{\partial r_i}{\partial x_i} = 0$ $(i = 1, 2)$ に $x_3 = 0$ を代入して整理するとそれぞれ,

$$2(2a-1)(2q-2c+1)x_i - 8aq + 2q + 2c + 4a - 3 = 0 \qquad (i=1,2)$$

となるので，$a \neq \frac{1}{2}$ および $2q-2c+1>0$ より，

$$x_1 = x_2 = \frac{-8aq+2q+2c+4a-3}{2(2a-1)(2q-2c+1)} \tag{14}$$

が解の候補となる。

以下では，$0 \leqslant x_i \leqslant 1$ $(i=1,2)$ を満たす場合について考察する。$\frac{1}{2} < a \leqslant 1$ ならば，

$$0 \leqslant -8aq+2q+2c+4a-3 \leqslant 2(2a-1)(2q-2c+1)$$

を満たさねばならない。すなわち，左辺と中辺より，

$$q \leqslant \frac{2c+4a-3}{8a-2} \tag{15}$$

と，中辺と右辺より，

$$q \geqslant \frac{8ac-2c-1}{16a-6} \tag{16}$$

とで挟まれた領域となる。これを図2のように立体図で描いて，それを q が異なる高さによって切断した図を縦に並べたものが，図3—図6である。なお，Nash 均衡が存在するパラメタ領域を影を付けてある。また，この領域が $0<q<\frac{1}{2}$ に存在するためには，$\frac{1}{2}<a\leqslant 1$ においては，不等式 (15) の右辺が不等式 (16) の右辺より大きければよいので，

$$\frac{2c+4a-3}{8a-2} - \frac{8ac-2c-1}{16a-6} = \frac{4(2a-1)^2(1-c)}{(4a-1)(8a-3)} \tag{17}$$

より，$\frac{1}{2}<c<1$ であるから，式 (17) の右辺は常に正となり区間として存在する。$2q-2c+1>0$ より，$q>c-\frac{1}{2}$ また，その区間では $\frac{8ac-2c-1}{16a-6} = \frac{c}{2} - \frac{1-c}{2(8a-3)} > c-\frac{1}{2} > 0$ かつ $\frac{2c+4a-3}{8a-2} = \frac{1}{2} - \frac{1-c}{4a-1} < \frac{1}{2}$ なので，q の区間条件も満たしている。

一方，$0 \leqslant a < \frac{1}{2}$ においては，

$$0 \geqslant -8aq+2q+2c+4a-3 \geqslant 2(2a-1)(2q-2c+1)$$

を満たさねばならない。すなわち，左辺と中辺より，

$$(8a-2)q \geqslant 2c+4a-3$$

であるから，$0 \leqslant a < \frac{1}{4}$ のとき，$q \leqslant \frac{2c+4a-3}{8a-2}$ となり，$\frac{1}{4}<a<\frac{1}{2}$ のとき，$q \geqslant \frac{2c+4a-3}{8a-2}$ となる。そして，中辺と右辺より，

$$(16a-6)q \leqslant 8ac-2c-1 \tag{18}$$

であるから，$0 \leqslant a < \frac{3}{8}$ のとき，$q \geqslant \frac{8ac-2c-1}{16a-6}$ となり，$\frac{3}{8}<a<\frac{1}{2}$ のとき，$q \leqslant \frac{8ac-2c-1}{16a-6}$ となる。つまり，

(a) $0<a<\frac{1}{4}$ のとき，

$$q \leqslant \frac{2c+4a-3}{8a-2}$$
$$q \geqslant \frac{8ac-2c-1}{16a-6}$$

の共通集合となる。a の条件より式 (17) の右辺が正となるので，この条件は，

$$\frac{8ac-2c-1}{16a-6} \leqslant q \leqslant \frac{2c+4a-3}{8a-2}$$

となるが，$\dfrac{2c+4a-3}{8a-2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1-c}{4a-1} > \dfrac{1}{2}$ より，

$$\frac{8ac-2c-1}{16a-6} \leqslant q \leqslant \frac{1}{2}$$

となる。

(b) $\dfrac{1}{4} < a < \dfrac{3}{8}$ のとき，

$$q \geqslant \frac{2c+4a-3}{8a-2} \tag{19}$$

$$q \geqslant \frac{8ac-2c-1}{16a-6} \tag{20}$$

の共通集合となる。a の条件より式 (17) の右辺が負となるので，この条件は，

$$q \geqslant \frac{8ac-2c-1}{16a-6}$$

だけになるが，$\dfrac{8ac-2c-1}{16a-6} = \dfrac{c}{2} - \dfrac{1-c}{2(8a-3)} > \dfrac{c}{2} + \dfrac{1-c}{2} = \dfrac{1}{2}$ より，条件 $0 < q < \dfrac{1}{2}$ に反する。

(c) $\dfrac{3}{8} < a < \dfrac{1}{2}$ のとき，

$$q \geqslant \frac{2c+4a-3}{8a-2} \tag{21}$$

$$q \leqslant \frac{8ac-2c-1}{16a-6} \tag{22}$$

の共通集合となる。a の条件より式 (17) の右辺が正となるので，これは空集合となる。

2. $2q-2c+1<0$ のとき。

$r_3(x_1, x_2, x_3)$ は x_3 について狭義単調増加する。すなわち，$x_3 = 1$ が最適解となる。このとき，方程式11, 12に $x_3 = 1$ を代入して整理するとそれぞれ，

$$2(2a-1)(2q-2c+1)x_i - 8aq + 2q - 8ac + 6c + 8a - 5 = 0 \qquad (i = 1, 2)$$

となるので，$a \neq \dfrac{1}{2}$ および $2q-2c+1 > 0$ より，

$$x_1 = x_2 = \frac{-8aq+2q-8ac+6c+8a-5}{2(2a-1)(2q-2c+1)} \tag{23}$$

以下では，$0 \leqslant x_i \leqslant 1$ $(i = 1, 2)$ を満たす場合について考察する。$\dfrac{1}{2} < a \leqslant 1$ ならば，

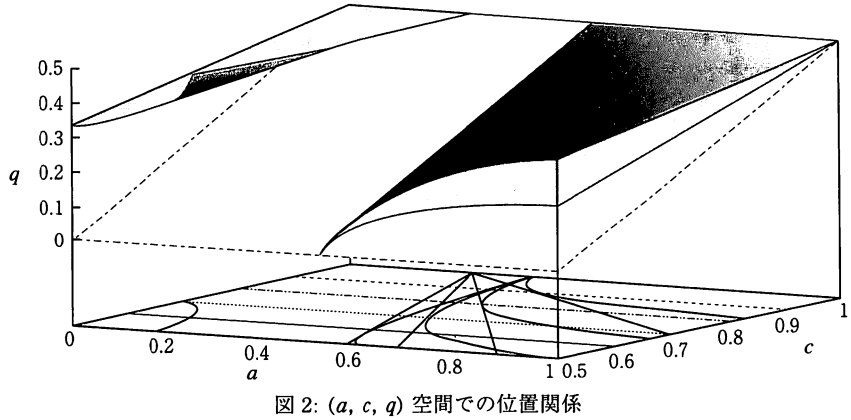


図 2: (a, c, q) 空間での位置関係

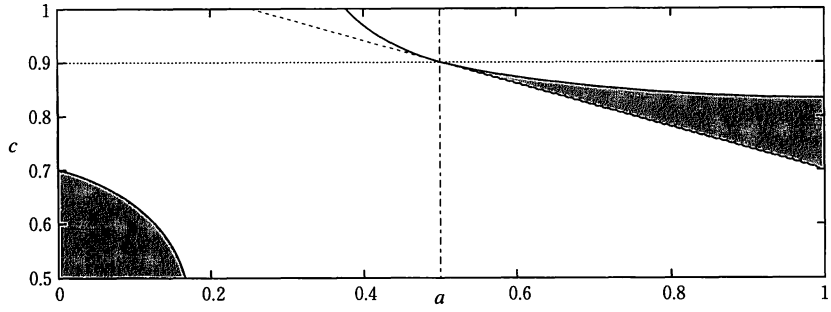


図 3: 図 2 の $q = \frac{4}{10}$ における (a, c) 平面への射影

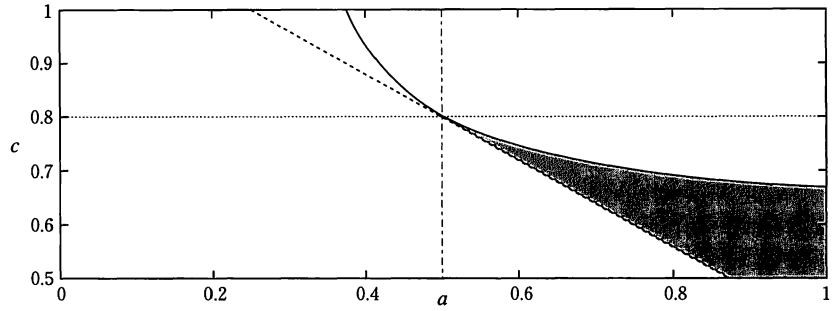


図 4: 図 2 の $q = \frac{3}{10}$ における (a, c) 平面への射影

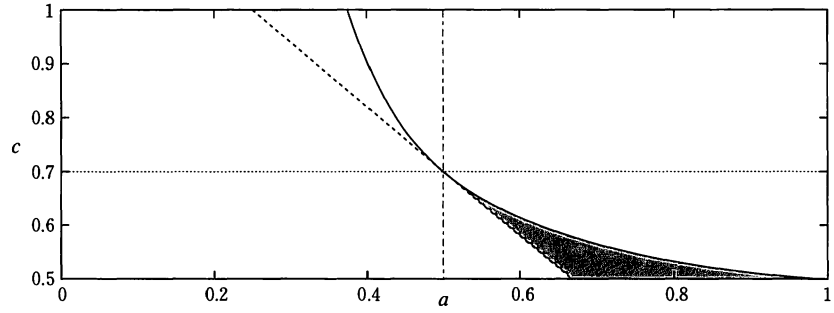


図 5: 図 2 の $q = \frac{2}{10}$ における (a, c) 平面への射影

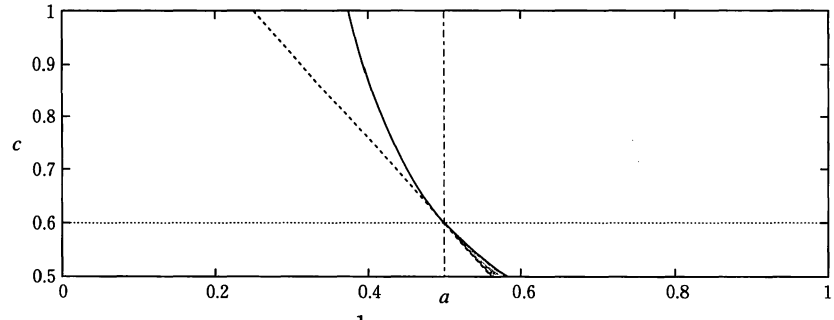


図 6: 図 2 の $q = \frac{1}{10}$ における (a, c) 平面への射影

$$0 \leqslant -8aq + 2q - 8ac + 6c + 8a - 5 \leqslant 2(2a-1)(2q-2c+1)$$

を満たさねばならない。すなわち，左辺と中辺より，

$$q \leqslant \frac{-8ac + 6c + 8a - 5}{8a - 2} \tag{24}$$

であり，中辺と右辺より，

$$q \geqslant \frac{2c + 4a - 3}{16a - 6} \tag{25}$$

とで挟まれた領域となる。これを図7のように立体図で描いて，それを q が異なる高さによって切断した図を縦に並べたものが，図8—図11である。なお，Nash 均衡が存在するパラメタ領域を影を付けてある。また，この領域が $0 < q < \frac{1}{2}$ に存在するためには，$\frac{1}{2} < a \leqslant 1$ においては，不等式 (24) の右辺が不等式 (25) の右辺より大きければよいので，

$$\frac{-8ac + 6c + 8a - 5}{8a - 2} - \frac{2c + 4a - 3}{16a - 6} = \frac{2(2a-1)^2(4c-3)}{(4a-1)(8a-3)} \tag{26}$$

より，$\frac{1}{2} < c < 1$ であるから，式 (26) の右辺は $\frac{1}{2} < c < \frac{3}{4}$ において常に正となり区間として存在する。しかし，$2q - 2c + 1 < 0$ より $q < c - \frac{1}{2}$ であるが，

$$c - \frac{1}{2} - \frac{2c + 4a - 3}{16a - 6} = \frac{(2a-1)(4c-3)}{8a-3} \tag{27}$$

となり，$\frac{1}{2} < c < \frac{3}{4}$ において，評価式 (27) は常に負となるために不適切な区間となる。

次に，$0 \leqslant a < \frac{1}{2}$ においては，

$$0 \geqslant -8aq + 2q - 8ac + 6c + 8a - 5 \geqslant 2(2a-1)(2q-2c+1)$$

を満たさねばならない。すなわち，左辺と中辺より，

$$(8a-2)q \geqslant -8ac + 6c + 8a - 5$$

であるから，$0 \leqslant a < \frac{1}{4}$ のとき，$q < \frac{-8ac + 6c + 8a - 5}{8a - 2}$ となり，$\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}$ のとき，$q \geqslant \frac{-8ac + 6c + 8a - 5}{8a - 2}$ となる。そして，中辺と右辺より，

$$(16a-6)q \leqslant 2c + 4a - 3$$

であるから，$0 \leqslant a < \frac{3}{8}$ のとき，$q \geqslant \frac{2c + 4a - 3}{16a - 6}$ となり，$\frac{3}{8} < a < \frac{1}{2}$ のとき，$q \geqslant \frac{2c + 4a - 3}{16a - 6}$ となる。つまり，

(a)　$0 < a < \frac{1}{4}$ のとき，

$$q \leqslant \frac{-8ac + 6c + 8a - 5}{8a - 2}$$

$$q \geqslant \frac{2c + 4a - 3}{16a - 6}$$

の共通集合となる。a の条件より $\frac{3}{4} < c < 1$ であれば，不等式 (26) の右辺が正となるので，この条件は，

$$\frac{2c + 4a - 3}{16a - 6} \leqslant q \leqslant \frac{-8ac + 6c + 8a - 5}{8a - 2}$$

となる。また，評価式 (27) の右辺が常に正となるので適切な区間である。

3. $\frac{1}{4} < a < \frac{3}{8}$ のとき，

$$q \geqslant \frac{-8ac + 6c + 8a - 5}{8a - 2}$$
$$q \geqslant \frac{2c + 4a - 3}{16a - 6}$$

の共通集合となる。a の条件より，

(a) $\frac{1}{2} < c < \frac{3}{4}$ のとき，式 (26) の右辺が負となるので，$q \geqslant \frac{2c + 4a - 3}{16a - 6}$ となる。しかし，評価式 (27) は常に負となるために不適切な区間となる。

(b) $\frac{3}{4} < c < 1$ のとき，式 (26) の右辺は正となるので，$q \geqslant \frac{-8ac + 6c + 8a - 5}{8a - 2}$ となる。このとき，

$$c - \frac{1}{2} - \frac{-8ac + 6c + 8a - 5}{8a - 2} = \frac{2(c + a - 1)}{4a - 1} \tag{28}$$

より，評価式 (28) は常に正となるので適切な区間である。

4. $\frac{3}{8} < a < \frac{1}{2}$ のとき，

$$q \geqslant \frac{-8ac + 6c + 8a - 5}{8a - 2}$$
$$q \leqslant \frac{2c + 4a - 3}{16a - 6}$$

の共通集合となる。aの条件より，$\frac{3}{4} < c < 1$ であれば，不等式 (26) の右辺が負となるので，この条件は，

$$\frac{-8ac + 6c + 8a - 5}{8a - 2} \leqslant q \leqslant \frac{2c + 4a - 3}{16a - 6}$$

となる。また，評価式 (27) の右辺が常に正となるので適切な区間である。

5. $2q - 2c + 1 = 0$ のとき。

方程式 (13) が自明になり，情報を持たず，テンソル M_1 (図 1 参照)の「天井」の各成分は，すべて $\frac{(3 - 4c)z}{2}$ であり，「床」の成分は，すべて $(1 - c)z$ である。これは企業 II の戦略に対する P_1，P_2 の最適解が，閉区間 [0, 1] の任意の値をとることを意味する。

なお，数学的には方程式 (11)，(12) に $2q - 2c + 1 = 0$ を代入して整理すると，いずれも

$$(2a - 1)\left((2c - 1)x_3 + 2c - 2\right)z = 0$$

となる。$z > 0$，$a \neq \frac{1}{2}$，$\frac{1}{2} < c < 1$ より，これが成立するには $x_3 = \frac{2 - 2c}{2c - 1} = \frac{1}{2c - 1} - 1$ が要請される。

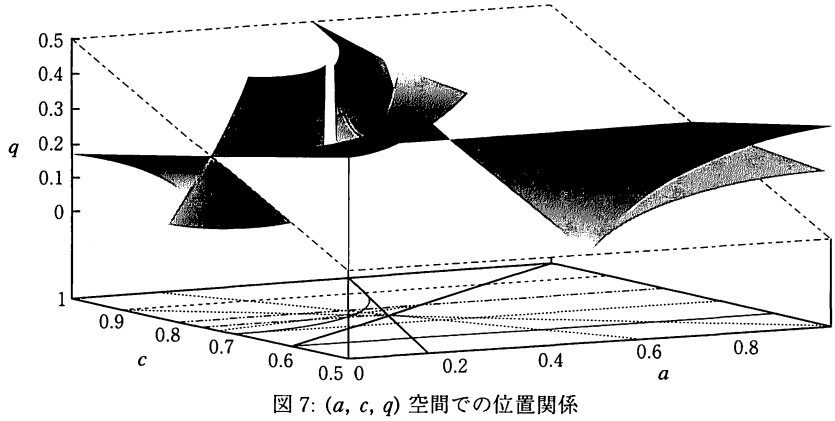


図 7: (a, c, q) 空間での位置関係

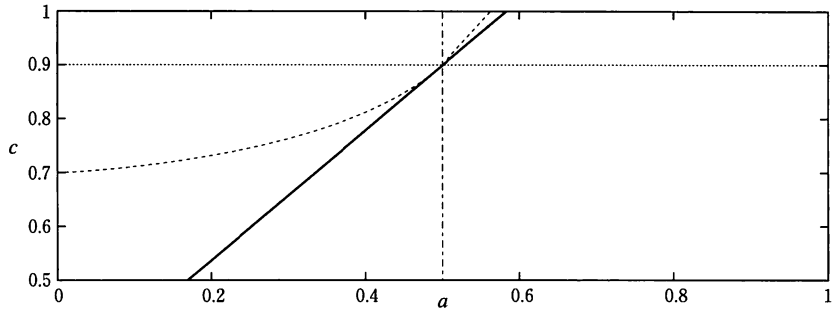


図 8: 図 7 の $q = \frac{4}{10}$ における (a, c) 平面への射影

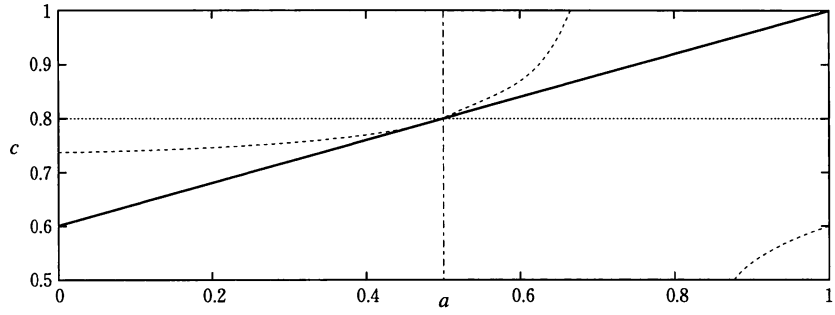


図 9: 図 7 の $q = \frac{3}{10}$ における (a, c) 平面への射影

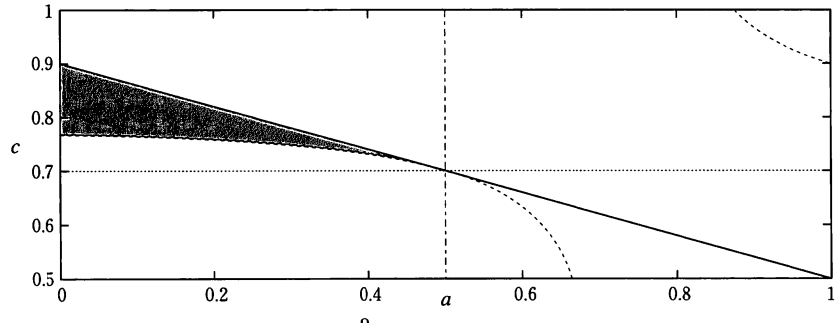


図10: 図 7 の $q = \frac{2}{10}$ における (a, c) 平面への射影

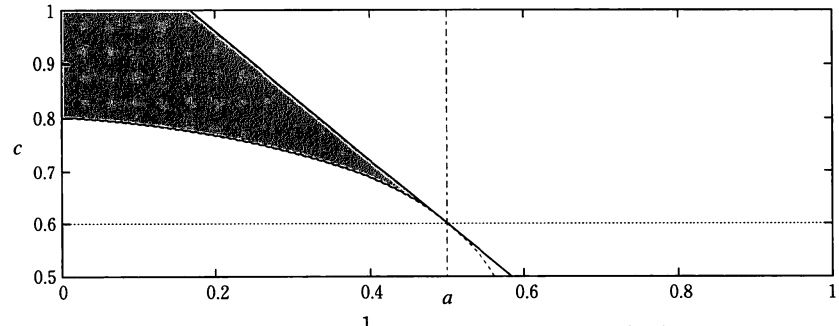


図11: 図 7 の $q = \frac{1}{10}$ における (a, c) 平面への射影

これは，$c=\frac{1}{2}$ と $x_3=-1$ を漸近線にもつ直角双曲線であるが，$x_3\in[0,1]$ の条件より，$\frac{3}{4}\leqslant c<1$ において，x_1, x_2 が区間 $[0,1]$ で不定で，$x_3=\frac{1}{2c-1}-1$ となる。$\frac{1}{2}<c<\frac{3}{4}$ において，任意の x_3 について，

$$(2a-1)\left((2c-1)x_3+2c-2\right)z<0$$

であるので，$i=1,2$ について，$\frac{\partial r_i}{\partial x_i}(x_1,x_2,x_3)$ の意味を考えると，$r_i(x_1,x_2,x_3)$ は x_i について狭義単調減少する。従って，$x_1=0$, $x_2=0$, x_3 が区間 $[0,1]$ で不定となる。

付録 B 命題 2 の証明

各企業に仮に経営者が存在したとして，この経営者が市場における競争相手の企業との競争に打ち勝つために，所属するプレイヤーの利得合計が最大になる確率を指定し，所属するプレイヤーにそのように選択させる状況を考える。したがって，このような状況における Nash 均衡を $x^\dagger=(x_1^\dagger,x_2^\dagger,x_3^\dagger)$ とすると，$x^\dagger$ は次の不等式[11]を満たす。

$$\forall x_1\in[0,1]\ f_1(x_1^\dagger,x_2^\dagger,x_3^\dagger)\geqslant f_1(x_1,x_2^\dagger,x_3^\dagger) \tag{29}$$

$$\forall x_2\in[0,1]\ f_1(x_1^\dagger,x_2^\dagger,x_3^\dagger)\geqslant f_1(x_1^\dagger,x_2,x_3^\dagger) \tag{30}$$

$$\forall x_3\in[0,1]\ f_2(x_1^\dagger,x_2^\dagger,x_3^\dagger)\geqslant f_2(x_1^\dagger,x_2^\dagger,x_3) \tag{31}$$

不等式 (29), (30) は x_3 を所与とするとき，$f_1(x_1,x_2,x_3)$ が x_1, x_2 に関して最大化されている条件であり，これらは共同利得（P_1 と P_2 の利得の合計）が最大化されるための条件である。不等式 (31) は x_1, x_2 を所与とするとき，企業 II の利得が最大化されるための条件である。この解を求めるために $f_1(x_1,x_2,x_3)$ を x_1, x_2 で微分し，$f_2(x_1,x_2,x_3)$ を x_3 で微分すると

$$\frac{\partial f_1(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_1}=-\frac{(2q-2c+1)z}{4} \tag{32}$$

$$\frac{\partial f_1(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_2}=-\frac{(2q-2c+1)z}{4} \tag{33}$$

$$\frac{\partial f_2(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_3}=-\frac{(2q-2c+1)z}{2} \tag{34}$$

を得る。$c\neq q+\frac{1}{2}$ を仮定すると，方程式 (32), (33), (34) から，最適解と企業 I の利得は次のようになる。

1. $q+\frac{1}{2}<c<1$ のとき，最適解は

$$x_1=x_2=x_3=1 \tag{35}$$

であり，そのときの利得[12]は

$$\max f_1(x_1,x_2,x_3)=f_1(1,1,1)=-\frac{(4q-1)z}{2} \tag{36}$$

である。

2. $\frac{1}{2}<c<q+\frac{1}{2}$ のとき，最適解は

$$x_1=x_2=x_3=0 \tag{37}$$

---

11) $f_i(x_1,x_2,x_3)$ の添え字 i は企業 i の利得を意味する。第 i 番目の変数で微分したものではないことに注意する。

12) $\max f_1(x_1,x_2,x_3)$ は $f_1(x_1,x_2,x_3)$ の最大値を意味する。

であり，そのときの利得は

$$\max f_1(x_1, x_2, x_3) = f_1(0, 0, 0) = -\frac{(2q-1)z}{2} \tag{38}$$

付録C　命題3および系3.1の証明

プレイヤーの利得 $r_i(x_1, x_2, x_3)$，$(i = 1, 2)$ を個人利得と定義する。そしてプレイヤーの利得の合計である共同利得 $f_1(x_1, x_2, x_3)$ を組織利得と定義する。Nash 均衡におけるプレイヤーの利得は次のようになる。Nash 均衡は2組存在するが，これらの組に対応するプレイヤーの利得の合計は同じであり，

$$r_1(x_1, x_2, x_3) + r_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{(2q-2c+1)z}{4(2a-1)} \tag{39}$$

である。共同利得の最大化の解と比較するために，方程式 (36)，(38) から方程式 (39) をそれぞれ引くと

$$f_1(1, 1, 1) - (r_1(x_1, x_2, x_3) + r_2(x_1, x_2, x_3)) = -\frac{(16aq-6q-2c-4a+3)z}{4(2a-1)} \tag{40}$$

および

$$f_1(0, 0, 0) - (r_1(x_1, x_2, x_3) + r_2(x_1, x_2, x_3)) = -\frac{(8aq-2q-2c-4a+3)z}{4(2a-1)} \tag{41}$$

を得る。

$a \neq \frac{1}{2}$ より，方程式 (40)，(41) の分母はいずれも0ではないので，それぞれの分子が0であれば，

$$f_1(1, 1, 1) = r_1(x_1, x_2, x_3) + r_2(x_1, x_2, x_3) \tag{42}$$

$$f_1(0, 0, 0) = r_1(x_1, x_2, x_3) + r_2(x_1, x_2, x_3) \tag{43}$$

を得る。図3，図5の灰色の部分は Nash 均衡の存在するパラメタの領域であるが，(a, c) 平面においてそれぞれ，

$$c = \frac{8aq-2q-4a+3}{2},$$
$$c = \frac{(16q-4)a-6q+3}{2}$$

すなわち

$$q = \frac{2c+4a-3}{8a-2},$$
$$q = \frac{2c+4a-3}{16a-6}$$

はこの領域の境界線である。この境界線上では $x_1 = x_2 = 0$ あるいは $x_1 = x_2 = 1$ となり，結果的にプレイヤーの協力関係が生成される。そして，同時にこの境界線上では企業 I のプレイヤーの個人利得の最大値の合計が組織利得の最大値に一致する。

すなわち，c，q が与えられたとき，分配率 a をそれぞれ

$$a = \frac{6q+2c-3}{16q-4}$$
$$a = \frac{2q+2c-3}{8q-4}$$

に定めることによって，個人利得の合計を組織利得の最大値に一致させることができる。

（受理　2008年9月30日）