複占市場のゲーム理論的分析

中　川　義　行
山　下　章　夫

キーワード
複占市場　ピア・グループ（仲間組織）　Nash 均衡　Stackelberg 均衡　Maxima

1 はじめに

本稿[1]は複占市場における企業行動を考察したものである。本稿の特徴は企業に属する意思決定主体（プレイヤー）が複数であると仮定している点である。

第2節では，一般的な「組織ゲーム」を定義する。第3節では，組織ゲームの例として，複占市場における企業行動を扱う。その複占市場における2企業をそれぞれ，企業 I, II とする。そして特に企業 I が2人のプレイヤーで構成され，企業 II が単一のプレイヤーで構成される場合を考察する。企業 I のプレイヤー間に階層は存在せず，2人が同格の立場で1つの企業を形成する。企業 I のプレイヤーはそれぞれが独立して利得を最大化するが，利得の分配を巡って企業内で競争を行う。その場合の Nash 均衡解を，文字変数でパラメタライズされた形で求める。第4節では，さらに具体的な数値を与えることで，企業間で Cournot 型ゲーム [1] が行われ，同時に企業 I のプレイヤー間に利得の分配を巡って Cournot 型ゲームが行われる場合の Nash 均衡の存在条件を考察する。第5節では支配的企業を企業 I，従属的企業を企業 II として，企業間で Stackelberg 型ゲーム [4, 5, 6] が行われ，同時に企業 I のプレイヤー間に利得の分配を巡って Cournot 型ゲームが行われる場合の Nash 均衡の存在条件を考察する。この Stackelberg 型ゲームにおいて，支配的企業のプレイヤー間に協力関係が生成されることが示される。第6節ではプレイヤーの共同利得最大化行動を考察する。プレイヤーの共同利得はいわば「組織益」と考えることができるが，この組織益を最大にする解を考察する。第7節では残された課題を述べる。

2 組織ゲームの定義

まず，組織ゲーム (Organizational Game) を定義する。集合 $L = \{P(1), P(2), \ldots, P(N)\}$ を N 組織からなる集団とし，その L の要素としての集合 $P(i) = \{P(i, 1), P(i, 2), \ldots, P(i, n_i)\}$ を n_i 人のプレイヤーからなる第 i 組織とする[2]。特に本稿では，集団 L を寡占産業とし，$P(i)$ を第 i 番目の企業，$P(i, j)$ をその第 j 番目のメンバーとして考える。第 i 組織の第 j プレイヤー $P(i, j)$ は，$m_{i,j}$ 個の純粋戦略集合

$$S(i, j) = \{s(i, j, 1), s(i, j, 2), \ldots, s(i, j, m_{i,j})\}$$

1) 本研究は龍谷大学経営学会の研究部会「社会科学の研究や教育における Maxima の応用」の共同研究の一部である。

2) これは例えば，野球のリーグやサッカーのような，チームスポーツのリーグゲームを考えると良いだろう。

を持ち，それに対応する混合戦略ベクトル

$$\vec{x}(i, j) = (x(i, j, 1), x(i, j, 2), \ldots, x(i, j, m_{i,j}))$$

を持つ。$\vec{1}$ を全ての成分が1である，適切な次元のベクトルとする。混合戦略ベクトルは離散的確率分布のリスト表現であることから，$\vec{x}(i, j)\cdot\vec{1} = 1$ を満たす。プレイヤー $P(i, j)$ の組織内利得分配率は，組織内ゲームによって決定され，以下の利得分配率テンソルに従う。

$$T(i, j) = [r(i, j; k_1, k_2, \ldots, k_{n_i})]$$

これは n_i 階テンソル $T(i, j)$ を成分表記するとき，$(k_1, k_2, \ldots, k_{n_i})$ 成分が，組織の各プレイヤー $P(i, \ell)$ が独立に戦略 $s(i, \ell, k_\ell)$ を選んだときの，プレイヤー $P(i, j)$ の利得分配率 $r(i, j; k_1, k_2, \ldots, k_{n_i})$ であることを意味する。分配率であることから，i と $(k_1, k_2, \ldots, k_{n_i})$ を固定したとき，

$$\sum_{j=1}^{n_i} r(i, j; k_1, k_2, \ldots, k_{n_i}) = 1$$

を満たす。

第 i 組織 $P(i)$ の純粋戦略集合は，そこに属する各プレイヤーの純粋戦略集合の直積集合

$$S(i) = S(i, 1) \times S(i, 2) \times \ldots \times S(i, n_i)$$

として構成され，それに対応する n_i 階の混合戦略テンソル $M(i)$ が，

$$M(i) = [x(i, k_1, k_2, \ldots, k_{n_i})]$$

として定義される。これは $M(i)$ を成分表記するとき，$(k_1, k_2, \ldots, k_{n_i})$ 成分は，組織 $P(i)$ の各プレイヤー $P(i, \ell)$ が独立に戦略 $s(i, \ell, k_\ell)$ を選ぶ確率を $x(i, k_1, k_2, \ldots, k_{n_i})$ で与え，直積 $\prod_{j=1}^{n_i}\vec{x}(i, j)$ と同型とする。すなわち，$M(i)$ の各成分は各プレイヤーの混合戦略ベクトルの成分を用いることで，

$$x(i, k_1, k_2, \ldots, k_{n_i}) = \prod_{j=1}^{n_i} x(i, j, k_j)$$

として定義する。確率空間の直積と同型であることから，$M(i)$ が結合確率として確率空間になっている。第 i 組織 $P(i)$ の利得は，産業内ゲームによって決定され，次の産業内評価テンソルに従う。

$$T(i) = [q(i; \vec{\sigma}(1), \vec{\sigma}(2), \ldots, \vec{\sigma}(N))]$$

ただし，各 $\vec{\sigma}(\ell)$ は，組織 $P(\ell)$ の各メンバーが選んだ戦略を要素とするリストであり，$q(i; \vec{\sigma}(1), \vec{\sigma}(2), \ldots, \vec{\sigma}(N))$ は $S(1) \times S(2) \times \ldots \times S(N)$ の要素に対する，つまり各組織 $P(\ell)$ が戦略 $\vec{\sigma}(\ell)$ を選んだときの，$P(i)$ の利得である。

組織ゲームの総利得 $Q = \sum_{i=1}^{N} q(i; \vec{\sigma}(1), \vec{\sigma}(2), \ldots, \vec{\sigma}(N))$ が $\{\vec{\sigma}(1), \vec{\sigma}(2), \ldots, \vec{\sigma}(N)\}$ に依存しなければ，その総利得を Q として，$r(i; \vec{\sigma}(1), \vec{\sigma}(2), \ldots, \vec{\sigma}(N)) := \frac{1}{Q} q(i; \vec{\sigma}(1), \vec{\sigma}(2), \ldots, \vec{\sigma}(N))$ を定義して用いることで，各組織の利得を産業内利得分配率で表現することができる。これは例えば市場が十分成熟しているときの，各企業のマーケットシェアと考えることができる。

ここで言う企業 $P(i)$ のマーケットシェアとは，市場全体の供給量 Q に占める企業 $P(i)$ の供給量比率 $r(i; \vec{\sigma}(1), \vec{\sigma}(2), \ldots, \vec{\sigma}(N))$ の意味で用いる。

以後，本稿のモデルでは，総利得一定も仮定して，

$$T(i) = [r(i; \vec{\sigma}(1), \vec{\sigma}(2), \ldots, \vec{\sigma}(N))]$$

によって考える。

ここから，第 i 組織の利得関数 $\pi(i)$ は，$\otimes$ を一般化された内積として，

$$\pi(i) = T(i) \otimes \bigotimes_{i=1}^{N} M(i)$$

として与えられ，第 i 組織の第 j プレイヤーの利得関数 $\pi(i, j)$ は，

$$\pi(i, j) = \pi(i) \times T(i, j) \otimes \overset{n_i}{\underset{j=1}{\bigotimes}} \vec{x}(i, j)$$

として与えられる。

そして，組織間に階層が存在しない場合の組織ゲーム[3]における，第 i 組織の第 j プレイヤーの目的は，

$$\begin{aligned}
&\text{Maximize} && \pi(i, j), \text{ for given } \vec{\sigma}(\ell)(\ell \neq i) \text{ and } k_m(m \neq j)\\
&\text{Subject to} && x(i, j, k) \geqslant 0\\
&&& \vec{x}(i, j) \cdot \vec{1} = 1\\
&&& M(i) \otimes \overset{n_i}{\underset{j=1}{\bigotimes}} \vec{1} = 1\\
&&& \sum_{k=1}^{n_i} r(i, k; k_1, k_2, \ldots, k_{n_i}) = 1\\
&&& \sum_{k=1}^{N} r(k; \vec{\sigma}(1), \vec{\sigma}(2), \ldots, \vec{\sigma}(N)) = 1
\end{aligned}$$

として記述できる。ただし，第 ℓ 組織 $(\ell \neq i)$ の戦略リスト $\vec{\sigma}(\ell)$ は，第 ℓ 組織の組織内利得分配率に依存して決定されるが，第 i 組織のメンバーは，誰も第 ℓ 組織の組織内利得分配率を知らないと仮定する。よって，組織ゲームは，多人数，有限，完備，不完全情報ゲームに分類できる。全ての i, j について，この条件を満たす解を組織ゲームの Nash 均衡とする。その Nash 均衡の存在性については，原理的にはほぼ Nash [3] の手法をなぞることで言えるが，煩雑になるので付録で概略を述べる。

また，本稿の第 5 節では，組織間に階層を設定した場合[4]も考察している。なお，Maxima においては，n 階テンソルを成分表記するとき，長さを適切に揃えたリストを，n 重にネストさせることで表現することにする。このとき，テンソル A と B の一般化された内積は，結果的にドット積 A.B で記述することができる。

3　企業戦略と利得

3.1　組織ゲームの具体例

本節以後は簡単のために 2 人組織と 1 人組織による組織ゲームで，各プレイヤーの純粋戦略が 2 であるものを考える。すなわち，$N = 2, n_1 = 2, n_2 = 1, m_{1,j} = 2, m_{2,j} = 2, (j \in \{1, 2\})$ である。そのような集団のモデルとして，意思決定形態がピア・グループ（仲間組織）である企業と，単一メンバーからなる企業による複占市場 L を考えると，組織が企業に対応する。ピア・グループとは，意思決定者に上下の階層がなく，直接的な監督者もいない平面的な組織である。このような組織では，各メンバーは同じ意思決定権を持ち，彼らの戦略は相互調整メカニズムによって調整され，収益はある規則に従ってメンバー間に分配される[5]。

企業として，$P(1)$ 社と $P(2)$ 社を考える。組織を構成するプレイヤーはその企業行動の決定権を持つメンバーに対応していて，$P(1)$ 社が $P(1, 1), P(1, 2)$，$P(2)$ 社が $P(2, 1)$ とする。

以後，添え字が多くなって表記が煩雑になることを防ぐ意味で，2 企業 $P(1), P(2)$ を I, II する。同様の理由で，企業 I のプレイヤー $P(1, 1), P(1, 2)$ を P_1, P_2 とし，企業 II のプレイヤー $P(2, 1)$ を P_3 とする。市場の需要は一定であり，この複占市場において企業が獲得するマーケットシェ

3)　本稿では，これを Cournot-Cournot 型ゲームと呼ぶ。
4)　本稿では，これを Stackelberg-Cournot 型ゲームと呼ぶ。
5)　このピア・グループに関する表現は菊澤 [2] を参照した。

ア[6]は，それぞれの企業に属するプレイヤーの戦略によって決まるものと仮定する。

選択可能な純粋戦略として，製品価格の「価格引き下げ (discount より $\mathcal{D}$ と略記する)」と「価格維持 (price maintenance より $\mathcal{M}$ と略記する)」を考える。それに対応する混合戦略ベクトルは，そのメンバーが価格戦略を選ぶ確率のベクトルに対応していて，$P_i(i = 1, 2, 3)$ が価格引き下げの戦略 $\mathcal{D}^i$ を選ぶ確率 $\Pr(D^i)$ を文字変数 x_i と置くと，x_i は $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ をとる。そして，P_i が価格維持の戦略 $\mathcal{M}^i$ を選ぶ確率 $\Pr(M^i)$ は $1 - x_i$ となる。すると，P_i の混合戦略ベクトル $\vec{x}_i$ は $\vec{x}_1 = \vec{x}(1, 1) = (x_1, 1 - x_1)$, $\vec{x}_2 = \vec{x}(1, 2) = (x_2, 1 - x_2)$, $\vec{x}_3 = \vec{x}(2, 1) = (x_3, 1 - x_3)$ となる。このように置けるのは，確率空間であることから従う。

組織内ゲームの利得分配率テンソルの成分は，企業内での各メンバーの戦略選択に依存している。それは，

- P_1 と P_2 も同じ戦略を選択すれば，報酬は $\frac{1}{2}$ ずつ分配する。
- P_1 と P_2 で意見が異なるとき，価格引き下げを主張した方が a，価格維持を主張した方が $1 - a$ を得る。

の仮定を満たすものとする。この仮定に基づいて，企業 I のプレイヤーへの分配率を次の表 1 で表す。

表 1: 企業 I のプレイヤーへの分配率

	$\mathcal{D}^2$	$\mathcal{M}^2$
$\mathcal{D}^1$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$(a, 1 - a)$
$\mathcal{M}^1$	$(1 - a, a)$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

よって，P_1 の利得分配率テンソル T_1 は，

$$T_1 = T(1, 1) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & a \\ 1 - a & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

となる。これを用いて，企業 I 内における P_1 の分配率の期待値を $s(x_1, x_2)$ とすると，

$$s(x_1, x_2) = T_1 \otimes x_1 \otimes x_2$$

として与えられる。P_2 の利得分配率もテンソルを用いて表現することもできるが，それよりも企業 I の利得から P_1 の利得を差し引いた分を P_2 の利得とする方が楽である。これは，各プレイヤーの利得分配率の総和が 1 であることから従う。

このとき，企業 I の純粋戦略集合 S_I は，

$$S_I = S(1) = \{\mathcal{D}^1, \mathcal{M}^1\} \times \{\mathcal{D}^2, \mathcal{M}^2\}$$

となり，それに対応する混合戦略テンソル X は，

$$X = M(1) = \begin{bmatrix} x_1x_2 & x_1(1 - x_2) \\ (1 - x_1)x_2 & (1 - x_1)(1 - x_2) \end{bmatrix}$$

6) ここでは財を販売する際の費用は無視している。

となる。同様にして，企業 II の純粋戦略集合 S_{II} と混合戦略テンソル Y はそれぞれ，

$$\begin{aligned} S_{II} &= S(2) \\ &= \{\mathcal{D}^3, \mathcal{M}^3\} \\ Y &= M(2) \\ &= [x_3, 1-x_3] \sim \vec{x}_3 \end{aligned}$$

となる[7)]。

産業内評価テンソルは，各企業が選択する戦略に応じた，マーケットシェアによって与えられるテンソルとなる。そのテンソルの成分は，

- 両方の企業が同じ戦略を用いる場合，即ち，企業 I の各プレイヤーが価格引き下げの戦略 $(\mathcal{D}^1, \mathcal{D}^2)$，企業 II が価格引き下げの戦略 $(\mathcal{D}^3)$ をとる場合，あるいは企業 I の各プレイヤーが価格維持の戦略 $(\mathcal{M}^1, \mathcal{M}^2)$，企業 II が価格維持の戦略 $(\mathcal{M}^3)$ をとる場合，企業 I は b だけのマーケットシェアを得る。企業 I と企業 II の販売する財には知名度の差があり，より多くの顧客が知名度の高い製品を購入する。従って，両企業が同一の戦略をとる場合でも，企業の獲得するマーケットシェアの格差が存在することがある。このことは，$b \neq \frac{1}{2}$ 以外の場合も想定していることを意味する。
- 企業 I の各プレイヤーのとる戦略が異なり，企業 II が戦略 $\mathcal{D}$ をとる場合，企業 I の獲得するマーケットシェアは市場全体のシェアの半分に満たない。このマーケットシェアを p とする。
- 企業 I の各プレイヤーのとる戦略が異なり，企業 II が戦略 $\mathcal{M}$ をとる場合，企業 I の獲得するマーケットシェアは市場全体のシェアの半分より多い。このマーケットシェアを q とする。
- 相手が戦略 $\mathcal{M}$，自分が戦略 $\mathcal{D}$ をとるとき，かなりの割合のマーケットシェアを獲得すると仮定する。ここでは企業 I の各プレイヤーが戦略 $\mathcal{D}$，企業 II が戦略 $\mathcal{M}$ をとる場合，企業 I は $c > \frac{1}{2}$ だけのマーケットシェアを得る。そして逆に企業 I の各プレイヤーが戦略 $\mathcal{M}$，企業 II が戦略 $\mathcal{D}$ をとるとき，企業 I は $1-c < \frac{1}{2}$ だけのマーケットシェアを得る。

の仮定を満たすものとする。この仮定に基づいて，企業 I が獲得することができるマーケットシェアを次の表 2 で表す。

表 2: 企業 I が獲得するマーケットシェア

		企業 II の戦略	
		$\mathcal{D}^3$	$\mathcal{M}^3$
企業 I の戦略	$(\mathcal{D}^1, \mathcal{D}^2)$	b	c
	$(\mathcal{D}^1, \mathcal{M}^2)$	p	q
	$(\mathcal{M}^1, \mathcal{D}^2)$	p	q
	$(\mathcal{M}^1, \mathcal{M}^2)$	$1-c$	b

表 2 において

$$c > b > 1 - c \tag{1}$$

を仮定する。この仮定は企業 II の戦略を所与とするとき，価格引き下げの戦略を選択した場合，企業 I はより多くのマーケットシェアを得ることを意味する。このとき，企業 I の産業内評価テン

7) 記号 ～ は，数学では習慣的に用いられており，概念としては異なるものであるが，演算については完全に同一視できることを意味する。

ソルを B とし，市場評価テンソルと呼ぶ。B は3階テンソルとなるので，それをネストしたリストを利用して形式的に，

$$\begin{aligned} B &= T(1) \\ &= [[[b, c], [p, q]], [[p, q], [1-c, b]]] \end{aligned}$$

と記述できる。これを用いて，企業 I のマーケットシェア $f(x_1, x_2, x_3)$ を，

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= \pi(1) \\ &= T(1) \otimes M(1) \otimes M(2) \\ &= B \otimes X \otimes Y \end{aligned}$$

と記述することができる。企業 II の産業内評価もテンソルを用いて表現することもできるが，それよりも，マーケット全体から企業 I のマーケットシェアを差し引いた分が，企業 II のマーケットシェアとなる。これによって，P_1 の利得 $\pi_1(x_1, x_2, x_3)$，P_2 の利得 $\pi_2(x_1, x_2, x_3)$，P_3 の利得 $\pi_3(x_1, x_2, x_3)$ は，

$$\begin{aligned} \pi_1(x_1, x_2, x_3) &= \pi(1, 1) \\ &= (T(1, 1) \otimes \vec{x}(1, 1) \otimes \vec{x}(1, 2)) \\ &\quad \times (T(1) \otimes M(1) \otimes M(2)) \\ &= s(x_1, x_2) f(x_1, x_2, x_3) \qquad (2) \\ \pi_2(x_1, x_2, x_3) &= \pi(1, 2) \\ &= (1 - T(1, 1) \otimes \vec{x}(1, 1) \otimes \vec{x}(1, 2)) \\ &\quad \times (T(1) \otimes M(1) \otimes M(2)) \\ &= (1 - s(x_1, x_2)) f(x_1, x_2, x_3) \qquad (3) \\ \pi_3(x_1, x_2, x_3) &= \pi(2, 1) \\ &= 1 - (T(1) \otimes M(1) \otimes M(2)) \\ &= 1 - f(x_1, x_2, x_3) \qquad (4) \end{aligned}$$

として定義される。

また，この規模であれば一般的な高階テンソルではなく，少し工夫すれば次のように階を落としてベクトルと行列で結果的に同じ利得になるように，

$$\begin{aligned} X &= M(1) \\ &\sim (x_1x_2, x_1(1-x_2), (1-x_1)x_2, (1-x_1)(1-x_2)) \\ Y &= M(2) \\ &\sim (x_3, 1-x_3) \\ B &= T(1) \\ &\sim \begin{pmatrix} b & c \\ p & q \\ p & q \\ 1-c & b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

として代用することで，行列計算だけで計算結果が一致するようにできる。

この利得関数を用いると，この組織ゲームモデルにおける $P_i(i = 1, 2, 3)$ の目的は，

Maximize $\pi_i(x_1, x_2, x_3)$, for given $x_j(j \neq i)$

Subject to $0 \leqslant x_i \leqslant 1$

として記述できる。ここから Nash 均衡を求める。

まず，各プレイヤー P_i について，Lagrange 関数 $L_i(x_1, x_2, x_3, \lambda_1^{(i)}, \lambda_2^{(i)})$ を立てる。

$$L_1(x_1, x_2, x_3, \lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}) = \pi_1(x_1, x_2, x_3) + \lambda_1^{(1)}(0 - x_1) + \lambda_2^{(1)}(x_1 - 1)$$
$$L_2(x_1, x_2, x_3, \lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(2)}) = \pi_2(x_1, x_2, x_3) + \lambda_1^{(2)}(0 - x_2) + \lambda_2^{(2)}(x_2 - 1)$$
$$L_3(x_1, x_2, x_3, \lambda_1^{(3)}, \lambda_2^{(3)}) = \pi_3(x_1, x_2, x_3) + \lambda_1^{(3)}(0 - x_3) + \lambda_2^{(3)}(x_3 - 1)$$

ここから Karush-Kuhn-Tucker 条件 (以後，KKT 条件と略する) より，次の非線形連立方程式，

$$x_1\frac{\partial}{\partial x_1}L_1(x_1, x_2, x_3, \lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}) = 0 \tag{5}$$
$$x_2\frac{\partial}{\partial x_2}L_2(x_1, x_2, x_3, \lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(2)}) = 0 \tag{6}$$
$$x_3\frac{\partial}{\partial x_3}L_3(x_1, x_2, x_3, \lambda_1^{(3)}, \lambda_2^{(3)}) = 0 \tag{7}$$
$$\lambda_1^{(1)}\frac{\partial}{\partial \lambda_1^{(1)}}L_1(x_1, x_2, x_3, \lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}) = 0 \tag{8}$$
$$\lambda_2^{(1)}\frac{\partial}{\partial \lambda_2^{(1)}}L_1(x_1, x_2, x_3, \lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}) = 0 \tag{9}$$
$$\lambda_1^{(2)}\frac{\partial}{\partial \lambda_1^{(2)}}L_2(x_1, x_2, x_3, \lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(2)}) = 0 \tag{10}$$
$$\lambda_2^{(2)}\frac{\partial}{\partial \lambda_2^{(2)}}L_2(x_1, x_2, x_3, \lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(2)}) = 0 \tag{11}$$
$$\lambda_1^{(3)}\frac{\partial}{\partial \lambda_1^{(3)}}L_3(x_1, x_2, x_3, \lambda_1^{(3)}, \lambda_2^{(3)}) = 0 \tag{12}$$
$$\lambda_2^{(3)}\frac{\partial}{\partial \lambda_2^{(3)}}L_3(x_1, x_2, x_3, \lambda_1^{(3)}, \lambda_2^{(3)}) = 0 \tag{13}$$

を x_i, $\lambda_j^{(i)}(i = 1, 2, 3,\ j = 1, 2)$ の 9 変数について，

$$0 \leqslant x_i \leqslant 1$$
$$\lambda_j^{(i)} \geqslant 0$$

の範囲に入るものを求めることになる。

しかし，これは計算が煩雑で，単純に Maxima の solve 函数だけで解くのは困難である。そこで，条件式 (8) − (13) を計算すれば，

$$x_1\lambda_1^{(1)} = 0$$
$$(x_1 - 1)\lambda_2^{(1)} = 0$$
$$x_2\lambda_1^{(2)} = 0$$
$$(x_2 - 1)\lambda_2^{(2)} = 0$$
$$x_3\lambda_1^{(3)} = 0$$
$$(x_3 - 1)\lambda_2^{(3)} = 0$$

となるので，$P_i(i = 1, 2, 3)$ については

- $x_i = 0$ のとき，

  $\lambda_1^{(i)}$ が自由変数，$\lambda_2^{(i)} = 0$

- $x_i = 1$ のとき，

  $\lambda_1^{(i)} = 0$，$\lambda_2^{(i)}$ が自由変数。

- $0 < x_i < 1$ のとき，

  $\lambda_1^{(i)} = \lambda_2^{(i)} = 0$

という条件が導ける。そこでこれらの組み合わせとして，始めから $3^3 = 27$通りの場合分けを行う[8]ことができる。さらに計算のテクニカルな都合上，制約条件 $c = \frac{1}{2} - p + q$ を加えて，これに

8)　テクニカルには，3 進数によって場合分けを表現した。

よって3変数非線形連立方程式にして，それぞれの場合についてsolve函数を用いて解いた。制約条件 $c=\frac{1}{2}-p+q$ を要請する理由については，次の小節で述べる。この条件下で求まった解は，全部で90個あった。ただし，a, b, p, q の値によって，x_i の値が確率値として適切か不適切かを判断しなければならないものが多いが，そこまでは自動化していない。なお，全ての解を記述するには，紙数の問題で少々都合が悪い[9]ので，ここでは付録に計算プログラムを掲載するに留める。それをMaximaで実行すれば，全ての解を閲覧することができる。

3.2 制約条件 $c=\frac{1}{2}-p+q$ の背景

$x_i(i=1, 2, 3)$ が内点解をとる，すなわち $\lambda_1^{(i)}=\lambda_2^{(i)}=0$ であるならば，条件(5)－(7)は，

$$
\begin{aligned}
&x_1\frac{\partial}{\partial x_1}L_1(x_1, x_2, x_3, 0, 0)\\
&=\frac{x_1}{2}(4aqx_3x_2^2-2qx_3x_2^2-4apx_3x_2^2+2px_3x_2^2-4acx_3x_2^2+2cx_3x_2^2\\
&\quad+2ax_3x_2^2-x_3x_2^2-4aqx_2^2+2qx_2^2+2acx_2^2-cx_2^2+2abx_2^2-bx_2^2\\
&\quad-8aqx_3x_1x_2+4qx_3x_1x_2+8apx_3x_1x_2-4px_3x_1x_2+8acx_3x_1x_2\\
&\quad-4cx_3x_1x_2-4ax_3x_1x_2+2x_3x_1x_2+8aqx_1x_2-4qx_1x_2-4acx_1x_2\\
&\quad+2cx_1x_2-4abx_1x_2+2bx_1x_2-2qx_3x_2+2px_3x_2+2cx_3x_2-x_3x_2\\
&\quad+2qx_2-cx_2-bx_2+4aqx_3x_1-2qx_3x_1-4apx_3x_1+2px_3x_1\\
&\quad-4acx_3x_1+2cx_3x_1-4abx_3x_1+2bx_3x_1+4ax_3x_1-2x_3x_1-4aqx_1\\
&\quad+2qx_1+4abx_1-2bx_1+qx_3-px_3+2acx_3-2cx_3+2abx_3\\
&\quad-2bx_3-2ax_3+2x_3-q-2ab+2b)\\
&=0 \qquad (14)\\
&x_2\frac{\partial}{\partial x_2}L_2(x_1, x_2, x_3, 0, 0)\\
&=-\frac{x_2}{2}(8aqx_1x_2x_3-4qx_1x_2x_3-8apx_1x_2x_3+4px_1x_2x_3-8acx_1x_2x_3\\
&\quad+4cx_1x_2x_3+4ax_1x_2x_3-2x_1x_2x_3-4aqx_2x_3+2qx_2x_3+4apx_2x_3\\
&\quad-2px_2x_3+4acx_2x_3-2cx_2x_3+4abx_2x_3-2bx_2x_3-4ax_2x_3+2x_2x_3\\
&\quad-4aqx_1^2x_3+2qx_1^2x_3+4apx_1^2x_3-2px_1^2x_3+4acx_1^2x_3-2cx_1^2x_3\\
&\quad-2ax_1^2x_3+x_1^2x_3+2qx_1x_3-2px_1x_3-2cx_1x_3+x_1x_3-qx_3+px_3\\
&\quad-2acx_3+2cx_3-2abx_3+2bx_3+2ax_3-2x_3-8aqx_1x_2+4qx_1x_2\\
&\quad+4acx_1x_2-2cx_1x_2+4abx_1x_2-2bx_1x_2+4aqx_2-2qx_2-4abx_2\\
&\quad+2bx_2+4aqx_1^2-2qx_1^2-2acx_1^2+cx_1^2-2abx_1^2+bx_1^2-2qx_1\\
&\quad+cx_1+bx_1+q+2ab-2b)\\
&=0 \qquad (15)\\
&x_3\frac{\partial}{\partial x_3}L_3(x_1, x_2, x_3, 0, 0)\\
&=x_3(2qx_1x_2-2px_1x_2-2cx_1x_2+x_1x_2-qx_2+px_2+cx_2+bx_2-x_2\\
&\quad-qx_1+px_1+cx_1+bx_1-x_1-c-b+1)\\
&=0 \qquad (16)
\end{aligned}
$$

9) Maxima 5.11.0 で求めると，一般的な文字サイズだとA4で約70ページ分となる。

となる。これを代入法で解くときの一つの手順として，式 (16) から x_2 を消して，それを式 (14) と (15) に代入する。そしてそれらをそれぞれ x_3 について解いたものの差を取って x_1 だけの式を作り，それが 0 になる x_1 を解くという手順を考える。なお，$0 < x_i < 1$ における解を求めたいので，$x_i = 0$ は無視する。

途中に出てくる x_1 だけの式を，詳しく調べるために因数分解をすることを考える。Maxima で実装されている因数分解のアルゴリズムでは実用的時間で因数分解できなかった[10]が，異なるアルゴリズムを採用している *Mathematica* や Maple では[11]実用的な時間で因数分解可能で，分母が x_1 の 5 次式

$$\begin{aligned}&(q^2-2pq+p^2-c^2+c+b^2-b)(2qx_1-2px_1-2cx_1+x_1-q+p+c+b\\&-1)(4aqx_1^2-2qx_1^2-4apx_1^2+2px_1^2-4acx_1^2+2cx_1^2+2ax_1^2-x_1^2-4aqx_1\\&+4apx_1+4acx_1+4abx_1-2bx_1-4ax_1+x_1+q-p-2ac-2ab+2a)\\&(4aqx_1^2-2qx_1^2-4apx_1^2+2px_1^2-4acx_1^2+2cx_1^2+2ax_1^2-x_1^2-4aqx_1\\&+4qx_1+4apx_1-4px_1+4acx_1-4cx_1+4abx_1-2bx_1-4ax_1+3x_1-q\\&+p-2ac+2c-2ab+2b+2a-2)\end{aligned}$$

となり，分子は x_1 の 2 次式

$$(2q-2p-2c+1)x_1^2+2(-q+p+c+b-1)x_1-c-b+1$$

と，係数がかなり複雑[12]な x_1 の 4 次式との積となる。

そこで，x_1 の 2 次式の項の，2 次の係数 $2q-2p-2c+1$ の項に着目した。これを 0 にするように c を決める。すなわち，$c=\frac{1}{2}-p+q$ と決めておくと，2 次式の項が 1 次式に下がる。また x_1 の 4 次式の項も 4 次の係数が，

$$2(2a-1)^2(2q-2p-2c+1)^2(b^2-c+c^2-bp+cp+q-bq-cq)$$

で，3 次の係数が，

$$\begin{aligned}&(1-2a)(2q-2p-2c+1)(20acq^2-8cq^2+12abq^2-4bq^2-20aq^2+8q^2\\&-32acpq+12cpq+8abpq-4bpq+20apq-8pq-36ac^2q+14c^2q\\&-24abcq+10bcq+52acq-21cq-28ab^2q+12b^2q+24abq-11bq\\&-16aq+7q+12acp^2-4cp^2-20abp^2+8bp^2+28ac^2p-10c^2p-8abcp\\&+2bcp-28acp+11cp+4ab^2p+16abp-7bp+16ac^3-6c^3+12abc^2\\&-6bc^2-30ac^2+12c^2+16ab^2c-6b^2c-12abc+6bc+14ac-6c\\&+12ab^3-6b^3-14ab^2+6b^2)\end{aligned}$$

であるから，$-1+2c+2p-2q$ の因子が 0 となって，x_1 の 2 次式にまで下がる。すると，この例に限って言えば，全体的に分子における x_1 の次数が低下して解きやすくなるので，前小節の仮定を採用した。次節以後で，さらに具体的な数値を与えることで，解の様子を分析した例を示す。

4 Cournot-Cournot 型ゲーム

以下では P_1, P_2 が同じ戦略を確率 1 でとる可能性があるとき，「協力」関係がある，あるいは「協力解」が存在するという表現を用いる。

---

10) 著者が利用した Maxima 5.11.0 では，Berlekamp のアルゴリズムによって因数分解を行っている。Berlekamp のアルゴリズムで有限時間内に因数分解可能かどうかは，係数が繁雑なので考察は行っていない。

11) 例えば，著者が利用した *Mathematica* 4.1 は，Cantor-Zassenhaus のアルゴリズムを採用している。

12) x_1 の 2 次以下の係数が異様に長い。ここでの考察では x_1 の 2 次以下の係数は不要なので省略した。

4.1 Nash均衡とパラメタ領域

このモデルのNash均衡を定義する。閉空間 $I_1\times I_2\times I_3 = I^3 = [0, 1]^3$ において，Nash均衡は次式を満たす組 (x_1^*, x_2^*, x_3^*) である。

$$\forall x_1 \in I_1,\ \pi_1(x_1^*, x_2^*, x_3^*) \geqslant \pi_1(x_1, x_2^*, x_3^*) \tag{17}$$

$$\forall x_2 \in I_2,\ \pi_2(x_1^*, x_2^*, x_3^*) \geqslant \pi_2(x_1^*, x_2, x_3^*) \tag{18}$$

$$\forall x_3 \in I_3,\ \pi_3(x_1^*, x_2^*, x_3^*) \geqslant \pi_3(x_1^*, x_2^*, x_3) \tag{19}$$

Nash均衡の条件を構成する (17), (18), (19) の不等式は各々のプレイヤーが他のプレイヤーの戦略を所与として自己の利得を最大にすることを意味する。この節では内点解が存在するためには市場評価行列（テンソル）および分配率行列のパラメタにどのような制約が必要であるかを考察する。すなわち，(2), (3), (4) をそれぞれ x_1, x_2, x_3 で偏微分した次の方程式系の解を求める。

$$\frac{\partial\pi_1}{\partial x_1} = f(x_1, x_2, x_3)\frac{\partial}{\partial x_1}s(x_1, x_2) + s(x_1, x_2)\frac{\partial}{\partial x_1}f(x_1, x_2, x_3) = 0 \tag{20}$$

$$\frac{\partial\pi_2}{\partial x_2} = -f(x_1, x_2, x_3)\frac{\partial}{\partial x_2}s(x_1, x_2) + (1-s(x_1, x_2))\frac{\partial}{\partial x_2}f(x_1, x_2, x_3) = 0 \tag{21}$$

$$\frac{\partial\pi_3}{\partial x_3} = -\frac{\partial}{\partial x_3}f(x_1, x_2, x_3) \tag{22}$$

最初に (22) を x_2 について解いた式を (20), (21) にそれぞれ代入する。そして代入後のそれぞれの式を x_3 について解いた式を $x_3 = \phi(x_1)$ および $x_3 = \psi(x_1)$ とする。最後に，こうして得られた2つの式から $h(x_1) \equiv \phi(x_1) - \psi(x_1)$ を定義して，方程式 $h(x_1) = 0$ の解を求める。$h(x_1)$ は因数分解をすることができて分数式[13]で表される。

$h(x_1)$ の分子の2次式は

$$1-b-c-2x_1+2bx_1+2cx_1+2px_1-2qx_1+x_1^2-2cx_1^2-2px_1^2+2qx_1^2 \tag{23}$$

である。以下では数値計算を容易にするために，前小節の方針に従ってパラメタの数を減らすことを試みる。すなわち (23) の2次の項が0となるための条件

$$c = -p + q + \frac{1}{2} \tag{24}$$

を仮定する[14]。そして数値例として $p = \frac{2}{5}$, $q = \frac{3}{5}$ を仮定する。

このときプレイヤーの利得最大化のための条件 (20), (21), (22) は x_1, x_2, x_3 に関する次の方程式系となる。

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial\pi_1}{\partial x_1} = 2abx_1x_3 - bx_1x_3 - ax_1x_3 + \dfrac{x_1x_3}{2} - abx_3 + bx_3 + \dfrac{3ax_3}{10} - \dfrac{2x_3}{5} - abx_2^2 \\
\qquad + \dfrac{bx_2^2}{2} + \dfrac{ax_2^2}{2} - \dfrac{x_2^2}{4} + 2abx_1x_2 - bx_1x_2 - ax_1x_2 + \dfrac{x_1x_2}{2} + \dfrac{bx_2}{2} - \dfrac{x_2}{4} \\
\qquad - 2abx_1 + bx_1 + \dfrac{6ax_1}{5} - \dfrac{3x_1}{5} + ab - b + \dfrac{3}{10} = 0 \\
\dfrac{\partial\pi_2}{\partial x_2} = 2abx_2x_3 - bx_2x_3 - ax_2x_3 + \dfrac{x_2x_3}{2} - abx_3 + bx_3 + \dfrac{3ax_3}{10} - \dfrac{2x_3}{5} + 2abx_1x_2 \\
\qquad - bx_1x_2 - ax_1x_2 + \dfrac{x_1x_2}{2} - 2abx_2 + bx_2 + \dfrac{6ax_2}{5} - \dfrac{3x_2}{5} - abx_1^2 + \dfrac{bx_1^2}{2} \\
\qquad + \dfrac{ax_1^2}{2} - \dfrac{x_1^2}{4} + \dfrac{bx_1}{2} - \dfrac{x_1}{4} + ab - b + \dfrac{3}{10} = 0
\end{cases}$$

13) この分数式の分子は2次式と4次式の積になることが確かめられる。

14) この仮定は (4) の多項式の x_1x_2 の係数が0になる条件である。このとき，$h(x_1) = 0$ の分子の4次式の4次の項の係数および3次の項の係数はいずれも0となることが確かめられる。

$$\left| \frac{\partial \pi_3}{\partial x_3} = -bx_2 + \frac{x_2}{2} - bx_1 + \frac{x_1}{2} + b - \frac{3}{10} = 0 \right.$$

この方程式系より，上述した手続きによって x_1 に関する分数式 $h(x_1) = 0$ を得る。方程式 $h(x_1) = 0$ は分数式となり，分子は次のように 1 次式と 2 次式の積に因数分解をすることができる。

$$(20bx_1 - 10x_1 - 10b + 3) \times$$
$$(120a^2bx_1^2 - 120abx_1^2 + 30bx_1^2 - 60a^2x_1^2 + 60ax_1^2 - 15x_1^2 - 120a^2bx_1 + 120abx_1$$
$$- 30bx_1 + 36a^2x_1 - 36ax_1 + 9x_1 + 20a^2b - 20ab - 18a^2 + 18a - 2)$$

そして $h(x_1) = 0$ の分母は次式である。

$$2(20abx_1 - 10bx_1 - 10ax_1 + 5x_1 - 10ab + 3a + 1) \times$$
$$(20abx_1 - 10bx_1 - 10ax_1 + 5x_1 - 10ab + 10b + 3a - 4)$$

この結果，方程式 $h(x_1) = 0$ の解の候補として，分子の 1 次式が 0 となる場合の解（これを第 1 の解とする）と 2 次式が 0 となる場合の解（これを第 2 の解とする）を考察する。それぞれの場合について解を求めて，その解を分母の式に代入した結果が 0 でなければその解は $h(x_1) = 0$ の解である。

4.1.1 第 1 の解

方程式 $h(x_1) = 0$ の分子の 1 次式 (23) が 0 となる場合の解について考察する。これは，条件 (24) によって，p, q によらず

$$1 - b - c - x_1 + 2bx_1 = 0$$

となる。これより，

$$x_1 = \frac{1 - b - c}{1 - 2b}$$

を得る。これが，内点解となるためには $0 < x_1 < 1$ を満たさねばならないので，b が $\frac{1}{2}$ よりも大きいか小さいかで場合分けする。

1. $b < \frac{1}{2}$ の場合。

   $1 - 2b > 0$ より，$0 < 1 - b - c$ から $b < 1 - c$，$1 - b - c < 1 - 2b$ から $b < c$ を得る。

   $c > \frac{1}{2}$ より，$b < 1 - c$ となる。しかし，これは条件式 (1) に矛盾する。

2. $b > \frac{1}{2}$ の場合。

   $1 - 2b < 0$ より，$0 > 1 - b - c$ から $b > 1 - c$，$1 - b - c > 1 - 2b$ から $b > c$ を得る。

   $c > \frac{1}{2}$ より，$b > c$ となる。これも条件式 (1) に矛盾する。

よって，p, q の値によらず，第 1 の解は存在しない。

4.1.2 第 2 の解

これは係数が繁雑なので，$p = \frac{2}{5}, q = \frac{3}{5}$ の条件の下で解く。

方程式 $h(x_1) = 0$ の分子の 2 次式が 0 となる場合の解を，それぞれ x_1^1, x_1^2 とする。これらの解に応じて 2 組の解，$(x_1^1, x_2^1, x_3^1), (x_1^2, x_2^2, x_3^2)$ を得る。$x_2^1, x_2^2, x_3^1, x_3^2$ を実際に求めると，$x_1^1 = x_2^2$, $x_2^1 = x_1^2$, $x_3^1 = x_3^2$ であることが確かめられる。このことから 2 組の解が開空間 $(0, 1)^3$ に入るためのパラメタの条件を確定するためには，最初の解を考察すれば十分である。その解を

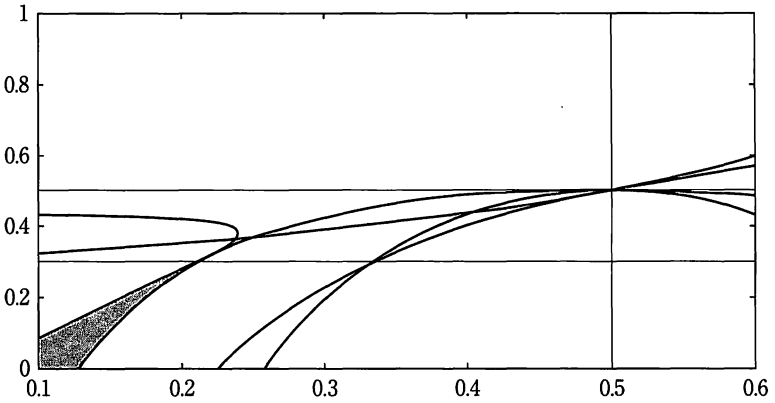


図 1: 第 2 の解が存在するパラメタの領域

$$x_1 = -\frac{\sqrt{3}\sqrt{M} - 60ab + 30b + 18a - 9}{30(2a-1)(2b-1)} \tag{25}$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{3}\sqrt{M} + 60ab - 30b - 18a + 9}{30(2a-1)(2b-1)} \tag{26}$$

$$x_3 = \frac{10ab - 9a + 2}{5(2a-1)(2b-1)} \tag{27}$$

と置く。ここに

$$M = (400a^2-400a+300)b^2+(400a^2-400a-100)b-252a^2 +252a-13 \tag{28}$$

である。(25), (26), (27) を $h(x_1) = 0$ の分母に代入すると次式を得る。

$$\text{分母} = \frac{2(2b-1)^2(100a^2b^2-100ab^2+100a^2b-100ab+50b-63a^2+63a-22)}{75}$$

よって，$b \neq \frac{1}{2}$ のとき，および曲線

$$100a^2b^2-100ab^2+100a^2b-100ab+50b-63a^2+63a-22 = 0 \tag{29}$$

で規定される点を除いた点では $h(x_1) = 0$ の分母は 0 ではない。従って，このとき (25), (26), (27) は $h(x_1) = 0$ の解である。以下ではこれらの解が Nash 均衡であるためのパラメタの条件を考察するが，その条件を導くための手続きはやや煩雑なため詳細は付録に掲載する。

第 2 の解が存在するパラメタ領域は図 1 で影を付けた領域である。その領域の 2 つの境界線の方程式は

$$b = \beta_1(a) \equiv \frac{9a^2 - 9a + 1}{10a^2 - 10a} \tag{30}$$

および

$$b = \beta_2(a) \equiv \frac{(8\sqrt{2}a - 4\sqrt{2})\sqrt{11a^2 - 11a + 2} - 20a^2 + 20a + 5}{40a^2 - 40a + 30} \tag{31}$$

である。(31) は実数解を保証する境界線の方程式である。(25), (26) が開区間 (0, 1) に入る条件を付録で考察した結果 b の条件として $b < \frac{3}{10}$ となる。一方，条件式 (24) より，$c = \frac{7}{10}$ となるので，$b < 1 - c$ ということになる。これは条件式 (1) に矛盾するので，$p = \frac{2}{5}$, $q = \frac{3}{5}$ の場合には，第 2 の内点解も存在しない。p, q が他の場合については，まだ考察していない。

5 Stackelberg-Cournot 型ゲーム

この節では企業 I が支配的企業，企業 II が従属的企業であり，両企業が Stackelberg 型のゲームを行う場合の Nash 均衡について考察する。Stackelberg 型のゲームにおいては，企業 I は企業 II の反応関数を考慮に入れて利得を最大化する。いま，市場評価行列 B の第 1 列ベクトルを $\vec{b}_1$，B の第 2 列ベクトルを $\vec{b}_2$ とする。X は第 3 節で定義した企業 I の戦略ベクトルとする。このとき P_3 の目的関数は x_3 に関する 1 次式として表すことができる。

$$1 - f(x_1, x_2, x_3) = X\cdot(\vec{b}_2 - \vec{b}_1)x_3 + (1 - X\cdot\vec{b}_2) \tag{32}$$

ここに，$X\cdot(\vec{b}_2 - \vec{b}_1)$ は X と $\vec{b}_2 - \vec{b}_1$ の内積を意味する。P_3 は市場評価行列に関する情報を得ており，企業 I が戦略の組 $(\mathcal{D}^1, \mathcal{D}^2)$, $(\mathcal{D}^1, \mathcal{M}^2)$, $(\mathcal{M}^1, \mathcal{D}^2)$, $(\mathcal{M}^1, \mathcal{M}^2)$ のいずれかを，ある確率で選択するということを知っている。ここで，P_3 は企業 I の戦略 X を所与のものとして (32) を最大化することを目的とする。即ち，P_3 の最適な戦略は次の最大化問題の解である。

Maximize　$\pi_3(x_1, x_2, x_3) = X\cdot(\vec{b}_2 - \vec{b}_1)x_3 + (1 - X\cdot\vec{b}_2)$, for given X

Subject to　$\begin{cases} -x_3 \leqslant 0 \\ x_3 \leqslant 1 \end{cases}$

この節では (24) の関係および $p = \dfrac{2}{5}$, $q = \dfrac{3}{5}$ を仮定する。そして

$$X\cdot(\vec{b}_2 - \vec{b}_1) = \left(\frac{1}{2} - b\right)(x_1 + x_2) + \left(b - \frac{3}{10}\right) > 0 \tag{33}$$

が成り立つ場合[15]を分析する。(33) が成り立つとき，P_3 の最適な戦略は $x_3 = 1$ である。このとき，P_1, P_2 は，P_3 のその戦略を考慮に入れて自己の利得を最大化しようとするが，企業内において彼らは利得の分配を巡って Cournot 型ゲームを行うものと仮定する。それゆえ P_1, P_2 の最適な戦略は次の最大化問題の解として得られる。

Maximize　$\pi_1(x_1, x_2, 1) = s(x_1, x_2)f(x_1, x_2, 1)$, for given x_2

Subject to　$\begin{cases} -x_1 \leqslant 0 \\ x_1 \leqslant 1 \end{cases}$

および

Maximize　$\pi_2(x_1, x_2, 1) = (1 - s(x_1, x_2))f(x_1, x_2, 1)$, for given x_1

Subject to　$\begin{cases} -x_2 \leqslant 0 \\ x_2 \leqslant 1 \end{cases}$

である。P_1 と P_2 の問題に内点解が存在するものと仮定すると，Lagrange 未定乗数法における制約条件の係数を 0 に固定できるので，この問題の KKT 条件の一部は次の方程式系になる。

$$\frac{\partial\pi_1}{\partial x_1} = \frac{\partial s}{\partial x_1}f(x_1, x_2, 1) + s(x_1, x_2)\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \tag{34}$$

$$\frac{\partial\pi_2}{\partial x_2} = -\frac{\partial s}{\partial x_2}f(x_1, x_2, 1) + (1 - s(x_1, x_2))\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \tag{35}$$

(34), (35) より P_1, P_2 の反応関数を得る。

$$x_1 = \frac{((20a - 10)b - 10a + 5)x_2^2 + (5 - 10b)x_2 - 6a + 2}{((40a - 20)b - 20a + 10)x_2 + 4a - 2} \tag{36}$$

---

15) 逆向きの不等号が成立して P_3 の最適な戦略が $x_3 = 0$ の場合も同様にして分析することができるが，本稿では省略する。

$$x_2 = \frac{((20a-10)b-10a+5)x_1^2+(5-10b)x_1-6a+2}{((40a-20)b-20a+10)x_1+4a-2} \tag{37}$$

(36), (37) はそれぞれ相手の戦略が与えられたとき，自己の利得が最大になる戦略を決定するための反応関数である。Nash 均衡はこれらの反応関数の交点で与えられる。この交点に対応する (x_1, x_2) の組は次数による考察から，一般には全部で 4 組存在すると考えられるが，その中の 2 組は $x_1 = x_2$ であることが文字変数の置換の対称性により容易に確かめられる[16]。本節で考察している状況は，P_3 が価格引き下げの戦略を用いる場合であるが，この P_3 の戦略に対抗して P_1 と P_2 が協力して価格引き下げの戦略をとる場合が存在するか，換言すれば，極限として，$x_1 = x_2 = 1$ となるケースが存在するかを考察する。そのために，次小節では 1 つの解を取り出して，その解が開区間 (0, 1) に入る条件を考察する。

5.1 Stackelberg 均衡とパラメタ領域

この節では反応関数 (36), (37) の交点に対応する次の解を考察する。

$$x_1^* = x_2^* = -\frac{\sqrt{D}+10b+4a-7}{10(2a-1)(2b-1)} \tag{38}$$

ここに

$$D = 100b^2+(-480a^2+480a-220)b+256a^2-256a+89 \tag{39}$$

と置いている。この解が実数であるためには，判別式 (39) が非負でなければならない。境界線として $D=0$ を b について解くと

$$\begin{cases} b = -\dfrac{(8a-4)\sqrt{9a^2-9a+2}-24a^2+24a-11}{10} \\ b = \dfrac{(8a-4)\sqrt{9a^2-9a+2}+24a^2-24a+11}{10} \end{cases} \tag{40}$$

を得る。

次に (38) が開区間 (0, 1) に入るためのパラメタ a, b に関する条件を (38) の分母が正の場合と負の場合について考察する。

- $(2a-1)(2b-1) > 0$ のとき，(38) の分母を払って整理すると

$$\sqrt{D} < -10b-4a+7 \tag{41}$$

$$\sqrt{D} > (10-40a)b+16a-3 \tag{42}$$

を得る。(41) は $-10b-4a+7 > 0$ のとき，

$$D-(-10b-4a+7)^2 = -40(2a-1)(2b-1)(3a-1) < 0 \tag{43}$$

と同値である。(43) より $3a-1 > 0$ を得る。(42) は $(10-40a)b+16a-3 > 0$ のとき，

$$D-((10-40a)b+16a-3)^2 = -80(2a-1)(2b-1)(5ab-1) > 0 \tag{44}$$

と同値である。従って，(44) より $5ab-1 < 0$ を得る。以上をまとめると，(38) が開区間 (0, 1) に入るための条件は (40) と次の条件が成立することである。

$$\begin{cases} -10b-4a+7 > 0 \\ 3a-1 > 0 \\ (10-40a)b+16a-3 > 0 \\ 5ab-1 < 0 \end{cases} \tag{45}$$

16) 関数のグラフ $x_1 = g(x_2)$, $x_2 = g(x_1)$ を (x_1, x_2) 平面に描くと，それらは直線 $x_1 = x_2$ を中心軸として互いに線対称であるので，交点が存在するとすると直線 $x_1 = x_2$ 上にあるはずである。

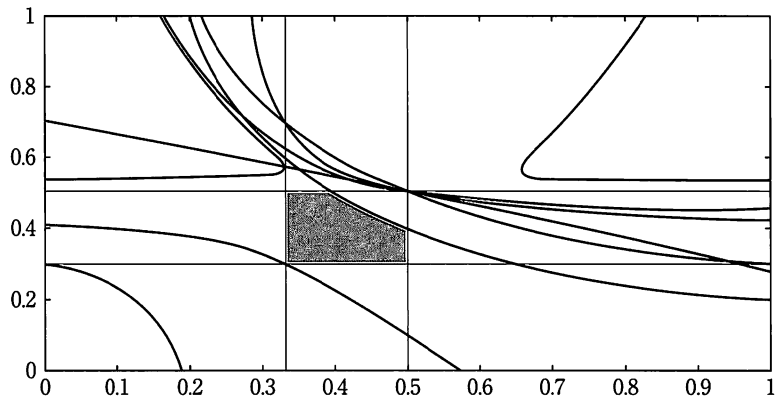


図 2: Stackelberg 均衡が存在するパラメタの領域

これらの不等式の境界を各破線で (a, b) 平面に図示したものが図 2 である。

$(x_1^*, x_2^*, 1)$ が Stackelberg 均衡となるためには，(38) が (33) を満たすことが必要である。(38) を (33) に代入して整理すると条件

$$\frac{\sqrt{D}+20ab-2a-4}{10(2a-1)} > 0 \tag{46}$$

を得る。$x_1^*(=x_2^*)$ が開区間 $(0, 1)$ に入る条件から，図 2 より明らかに $2a-1<0$ でのみ考察すればよい。従って，(33) が成り立つ条件は (46) の分子が負となることである。即ち，この条件は次の不等式が成り立つことである。

$$\sqrt{D} < 4+2a-20ab \tag{47}$$

(47) は $4+2a-20ab>0$ の条件下で

$$\begin{aligned} &D-(4+2a-20ab)^2 \\ &\quad = -(2a-1)(200ab^2+100b^2+200ab-220b-126a+73) < 0 \end{aligned} \tag{48}$$

と同値である。これより条件

$$200ab^2+100b^2+200ab-220b-126a+73 < 0 \tag{49}$$

を得る。(49) が成立するとき，P_3 の最適戦略は $x_3=1$ である。それゆえ $(x_1^*, x_2^*, 1)$ は Stackelberg 均衡である。

- 同様にして $(2a-1)(2b-1)<0$ のとき，(38) が開区間 $(0, 1)$ に入るための条件は (40) と次の条件が成立することである。

$$\begin{cases} -10b-4a+7>0 \\ 3a-1<0 \\ (10-40a)b+16a-3>0 \\ 5ab-1>0 \end{cases} \tag{50}$$

である。実数解を保証する条件 (40) の境界線と $a=\frac{1}{3}$ は接することが確かめられる。そして条件 $a<\frac{1}{3}$ を満たす a の値は，条件 $b>\frac{1}{5a}$ を満たす (a, b) の領域には含まれない。従って，条件 (50) を満たす領域は存在しない。

以上の考察によって，条件式 (1) を満たし，(34)，(35) に内点解が存在するパラメタの領域は $2a-1<0$ かつ $2b-1<0$ の領域内に存在し，かつ Stackelberg 均衡の成立するパラメタの領域

(これを S 領域と呼ぶ) は，その領域の一部であることがわかる。図 2 において，S 領域を影によって示している。

S 領域の境界線上の点においてプレイヤー間に協力関係が生成されることを示すことができる。例えば，$b=\frac{2}{5}$ の場合を考える。このとき，(38) は

$$x_1=\frac{\sqrt{64a^2-64a+17}+4a-3}{4a-2} \tag{51}$$

となる。(51) の右辺は $a\to\frac{1}{2}-0$ のとき 1 である。即ち，$b=\frac{2}{5}$ の場合，分配率 a が左極限として $\frac{1}{2}$ に限りなく近づくとき，P_1, P_2 の協力関係が生成される。P_1, P_2 は P_3 の価格引き下げに対抗して，共に確率 1 で価格引き下げの戦略をとる。これは，ピア・グループである企業 I において，企業内分配率が相互調整メカニズムとして機能して，協力関係を生成させたと言える。

6 共同利得の最大化

この節では企業 I のプレイヤー P_1, P_2 が共同利得 (P_1, P_2 の利得の合計として定義し，これを組織益と呼ぶ) の最大化を目的として企業 II と競争する場合の解を求める。P_1, P_2 の利得の合計は $f(x_1, x_2, x_3)$ であり，企業 I のプレイヤーは $f(x_1, x_2, x_3)$ を最大にするような x_1, x_2 を選択する。従って，共同利得最大化のための Nash 均衡を (x_1^*, x_2^*, x_3^*) とすると，(x_1^*, x_2^*, x_3^*) は閉空間 I^3 に対して，次の不等式を満たす。

$$\begin{cases}\forall x_1\in I_1 & f(x_1^*, x_2^*, x_3^*)\geqslant f(x_1, x_2^*, x_3^*)\\ \forall x_2\in I_2 & f(x_1^*, x_2^*, x_3^*)\geqslant f(x_1^*, x_2, x_3^*)\\ \forall x_3\in I_3 & 1-f(x_1^*, x_2^*, x_3^*)\geqslant 1-f(x_1^*, x_2^*, x_3)\end{cases} \tag{52}$$

(52) の第 1 式および第 2 式は，P_1, P_2 が $f(x_1, x_2, x_3)$ を x_1, x_2 に関して最大化することを意味する。第 3 式は P_3 が $f(x_1, x_2, x_3)$ を最小化することを意味する。内点解を仮定すると，これらの条件より次の方程式系を得る。

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x_1}=\dfrac{(2b-1)x_3+(-4q+2c+2b)x_2+2q-2b}{2}=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}=\dfrac{(2b-1)x_3+(-4q+2c+2b)x_1+2q-2b}{2}=0\\ \dfrac{\partial(1-f)}{\partial x_3}=-\dfrac{(2b-1)x_2+(2b-1)x_1-2c-2b+2}{2}=0\end{cases}$$

この方程式系の解は

$$x_1=\frac{1-b-c}{1-2b},\ x_2=\frac{1-b-c}{1-2b},\ x_3=\frac{(4c-2)q-2c^2+(2-4b)c+2b^2}{4b^2-4b+1} \tag{53}$$

である。この解は Cournot 型ゲームの第 1 の解と同じになるが条件式 (1) を満たさない。したがって，共同利得の最大化の解は，この場合の数値例では存在しない。

7 おわりに

本稿では「組織ゲーム」を一般的な形で定義した。そしてその応用として複占市場における企業の価格戦略を考察した。また本稿ではピア・グループのメンバーの行動を分析するために，複占市場における一方の企業が 2 人の意思決定主体で構成される場合を考察した。その場合，メンバー (プレイヤー) の選択する純粋戦略の直積集合と，確率ベクトルとの間に，自然な対応を与えることによって企業の戦略を定義した。他方の企業は，単一の意思決定主体で構成されるものと仮定し

た。そのため，その企業の戦略はプレイヤーの混合戦略と自然に同一視した。

企業間で Cournot 型のゲームが行われる場合と Stackelberg 型のゲームが行われる場合を考察した。このとき企業の利得関数には 5 個のパラメタが含まれるが，利得の最大化から導かれる反応関数は非線形関数であり，同数のパラメタを含むことになる。分析を容易にするためにパラメタ間に特別の関係を仮定して，パラメタ平面上で Nash 均衡が存在する領域を検討した。

本稿で仮定した数値例では，企業間で Cournot 型のゲームが行われる場合は内点解としての Nash 均衡は存在しないことが確かめられたが，Stackelberg 型のゲームにおいてはこれらの領域の境界線上あるいは境界線の接点で，企業内分配率を相互調整メカニズムとしてとらえることによって，ピア・グループにおけるメンバーの協力関係を意味する戦略の組が生成されることを示した。また，この数値例で組織益 (共同利得) の最大化を実現する解も存在しないことが分かった。

今後の展開として，条件式 (24) を仮定せずに，パラメタ p, q の値を一般的に変化させたとき，Cournot 型ゲームの内点解や，組織益の最大化を実現する内点解の存在について考察していきたい。また，市場評価に基づいて，個人益の最大化と組織益の最大化が一致するように企業内の分配率を与える定式化が考えられる。さらには，企業数や企業に属するプレイヤー数が 2 以上の場合に分析を拡張することも考えられる。これらは今後の課題である。

参考文献

[1] Cournot, A., "*Recherches sur les Principes Mathematiques de la Theorie des Richesses.*", 1838. (中山伊知郎訳，近代経済学古典選集 2『富の理論の数学的原理に関する研究』，日本経済評論社，1982.)

[2] 菊澤研宗，『組織の経済学入門』，有斐閣，2006.

[3] John Nash, "*Non-Cooperative games*", Annals of Mathematics, 2(54), 1951.

[4] 大和瀬達二，『寡占経済理論の構造』，新評論，1970.

[5] von Stackelberg, H., "*Marktform und Gleichgewicht*", Vienna: Julius Springer, 1934.

[6] 高本昇，『価格と市場の理論』，東洋経済新報社，1967.

A 組織ゲームの Nash 均衡解の存在性

組織ゲームの Nash 均衡解の存在も，その混合戦略ベクトルの存在空間が，ユークリッド $\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n_i} m_{i,j}$ 次元空間内の単体であることから，Nash による均衡解存在定理［3］に倣って，適切な縮小写像をとることで，不動点定理を用いて証明できる。以下では，その方針での証明の概略を述べる。

Ξ を全てのプレイヤーの混合戦略ベクトルの集合 $\Xi = \{\vec{x}(i,j) \mid 1 \leqslant i \leqslant N, 1 \leqslant j \leqslant n_i\}$ とする。Ξ においてプレイヤー $P(i,j)$ だけが混合戦略 $\vec{x}(i,j)$ から純粋戦略

$$\vec{e}(i,j,k) = (0, \ldots, 0, \overset{k\text{-th}}{1}, 0, \ldots, 0)$$

に変えて，他のプレイヤーの戦略を所与としたときの利得を $\pi^{(k)}(i,j)$ として次の連続関数を定義する。

$$\phi(i,j,\vec{x}(i,j),\vec{e}(i,j,k)) = \max\left(0, \pi^{(k)}(i,j) - \pi(i,j)\right)$$

これは，他のプレイヤーの戦略を所与として Ξ から $(\Xi \setminus \{\vec{x}(i,j)\}) \cup \{\vec{e}(i,j,k)\}$ に戦略を変更することで利得が狭義に増加するならば $\phi(i,j,\vec{x}(i,j),\vec{e}(i,j,k)) > 0$，広義に減少するならば $\phi(i,j,\vec{x}(i,j),\vec{e}(i,j,k)) \leqslant 0$ である。これを用いて写像 $\tau_{i,j}$ を以下のように定義する。

$$\tau_{i,j} : \vec{x}(i,j) \rightarrow \frac{\vec{x}(i,j) + \sum_{k=1}^{m_{i,j}} \phi(i,j,\vec{x}(i,j),\vec{e}(i,j,k))\vec{e}(i,j,k)}{1 + \sum_{k=1}^{m_{i,j}} \phi(i,j,\vec{x}(i,j),\vec{e}(i,j,k))}$$

ここで，

$$T = \{\tau_{i,j} \mid 1 \leqslant i \leqslant N, 1 \leqslant j \leqslant n_i\}$$

としておく。$\tau_{i,j}(\vec{x}(i,j))$ はその定義より，$\vec{x}(i,j)$ の $\phi(i,j,\vec{x}(i,j),\vec{e}(i,j,k)) > 0$ であるような戦略 $s(i,j,k)$ に与えられる確率が 1 へと漸近的に大きくなり，$\phi(i,j,\vec{x}(i,j),\vec{e}(i,j,k)) = 0$ であるような戦略 $s(i,j,k)$ に与えられる確率は小さくなる連続写像である。よって，$\tau_{i,j}$ は，閉空間 $[0,1]^{m_{i,j}}$ 内の各 $\vec{e}(i,j,k)$ を頂点とする $m_{i,j}-1$ 次元単体の，それ自身への連続写像となる。

また各 $\vec{x}(i,j)$ は確率ベクトルであることから，閉空間 $[0,1]^{m_{i,j}}$ 内の各 $\vec{e}(i,j,k)$ を頂点とする $m_{i,j}-1$ 次元単体上を自在に動ける。よって，Ξ 全体の集合を自然に直積空間と見做すことで，Ξ は，$m_{i,j}-1$ 次元単体の接合を $-1+\sum_{i=1}^{N} n_i$ 回行って得られた，単体的複体上を自在に動けると見做すことができる。単体の接合であることから，Ξ は $\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n_i}(m_{i,j}-1) + \left(-1+\sum_{i=1}^{N} n_i\right) = -1 + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n_i} m_{i,j}$ 次元の単体となる。従って，Brouwer の不動点定理より，Ξ 全体の集合を表す単体から，それ自身への連続写像 T による不動点が存在することが分かる。

以下ではこの不動点が Nash 均衡であることを示す。ある $\Xi^* = \{\vec{x}^*(i,j) \mid 1 \leqslant i \leqslant N, 1 \leqslant j \leqslant n_i\}$ が T の不動点であるとする。そのとき，各純粋戦略に与えられる確率は T によって広義の単調増加であることから，すべての i,j について $\phi(i,j,\vec{x}^*(i,j),\vec{e}(i,j,k))$ が 0 でなければならない。もし $\phi(i,j,\vec{x}^*(i,j),\vec{e}(i,j,k))$ に 0 のものと正のものが混在すれば，T によって 0 を与える戦略 $s(i,j,k)$ の確率が下がり，正を与える戦略 $s(i,j,k)$ の確率は上がるので，不動点であることに反する。一方，いくつかの純粋戦略を線形的に組み合わせたものが混合戦略であるから，すべての戦略について $\phi(i,j,\vec{x}^*(i,j),\vec{e}(i,j,k))$ が正ということはない。すべてのプレイヤーについてこれが成立するので，各プレイヤーは $\vec{x}^*(i,j)$ から，どの戦略に切り替えても利得 $\pi(i,j)$ は増えない。よって，元の各 $\vec{x}^*(i,j)$ は最適反応であり，それらの組 Ξ^* は Nash 均衡である。

逆に Ξ^* が Nash 均衡であるならば，他のどの戦略に切り替えても利得 $\pi(i,j)$ は増えない。よって，すべての i,j について $\phi(i,j,\vec{x}^*(i,j),\vec{e}(i,j,\mathrm{k})) = 0$ となるので，Ξ^* は T の不動点である。

B 全ての解を求める Maxima プログラム

```
digit2trinarylist(x, n): =block([i: 0, lst: [], y: x, z],
  while i<n do(
    z: entier(y/3),
```

```
    lst: cons(y-3*z, lst),
    y: z,
    i: i+1
  ),
return(lst))$
flag: makelist(digit2trinarylist(i-1, 3), i, 1, 3^3)$
substlist: makelist(
  flatten(makelist(
    if flag[i][j]=0 then [x[j-1][0]=x[j-1][0], x[j-1][1]=0, x[j-1][2]=0]
      else if flag[i][j]=1 then [x[j-1][0]=0, x[j-1][1]=x[j-1][1], x[j-1][2]=0]
      else [x[j-1][0]=1, x[j-1][1]=0, x[j-1][2]=x[j-1][2]],
    j, 1, length(flag[i])
  )), i, 1, length(flag)
)$
ratprint: false$
ma: matrix([1/2, a], [1-a, 1/2]);
mm: matrix([b, -p+q+1/2], [p, q], [p, q], [p-q+1/2, b]);
px(x, y, z): =ratsimp(
  ([x, 1-x].ma.[y, 1-y])*([x*y, x*(1-y), (1-x)*y, (1-x)*(1-y)].mm.[z, 1-z])
)$
py(x, y, z): =ratsimp(
  (1-[x, 1-x].ma.[y, 1-y])*([x*y, x*(1-y), (1-x)*y, (1-x)*(1-y)].mm.[z, 1-z])
)$
pz(x, y, z): =ratsimp(
  1-[x*y, x*(1-y), (1-x)*y, (1-x)*(1-y)].mm.[z, 1-z]
)$
Lgx(x, y, z, u, v): =-px(x, y, z)-u*x+v*(x-1)$
Lgy(x, y, z, u, v): =-py(x, y, z)-u*y+v*(y-1)$
Lgz(x, y, z, u, v): =-pz(x, y, z)-u*z+v*(z-1)$
sol: []$
for k: 27 thru 15 step -1 do(
  eq[1]: ratsimp(subst(
    substlist[k],
    x[0][0]*diff(Lgx(x[0][0], x[1][0], x[2][0], x[0][1], x[0][2]), x[0][0])
    )),
  eq[2]: ratsimp(subst(
    substlist[k],
    x[1][0]*diff(Lgy(x[0][0], x[1][0], x[2][0], x[1][1], x[1][2]), x[1][0])
    )),
  eq[3]: ratsimp(subst(
    substlist[k],
    x[2][0]*diff(Lgz(x[0][0], x[1][0], x[2][0], x[2][1], x[2][2]), x[2][0])
    )),
  eqns: listify(setify(makelist(if eq[i] # 0 then eq[i]=0 else [], i, 1, 3))),
```

```
  if first(eqns) = [] then eqns: rest(eqns) else eqns: eqns,
  vars: listify(intersection(
    setify(listofvars(eqns)),
    setify([x[0][0], x[1][0], x[2][0], x[0][1], x[0][2], x[1][1], x[1][2], x[2][1], x[2][2]])
  )),
  slt: solve(eqns, vars),
  for i: 1 thru length(slt) do(
    tmp: ratsimp(subst(substlist[k], subst(slt[i], [[x[0][0], x[1][0], x[2][0]]
, [x[0][1], x[0][2], x[1][1], x[1][2], x[2][1], x[2][2]]]))),
    print(tmp),
    sol: endcons(tmp, sol)
  )
);
for k: 13 thru 2 step -1 do(
  eq[1]: ratsimp(subst(
    substlist[k],
    x[0][0]*diff(Lgx(x[0][0], x[1][0], x[2][0], x[0][1], x[0][2]), x[0][0])
  )),
  eq[2]: ratsimp(subst(
    substlist[k],
    x[1][0]*diff(Lgy(x[0][0], x[1][0], x[2][0], x[1][1], x[1][2]), x[1][0])
  )),
  eq[3]: ratsimp(subst(
    substlist[k],
    x[2][0]*diff(Lgz(x[0][0], x[1][0], x[2][0], x[2][1], x[2][2]), x[2][0])
  )),
  eqns: listify(setify(makelist(if eq[i] # 0 then eq[i] = 0 else [], i, 1, 3))),
  if first(eqns) = [] then eqns: rest(eqns) else eqns: eqns,
  vars: listify(intersection(
    setify(listofvars(eqns)),
    setify([x[0][0], x[1][0], x[2][0], x[0][1], x[0][2], x[1][1], x[1][2], x[2][1], x[2][2]]
))
  ),
  slt: solve(eqns, vars),
  for i: 1 thru length(slt) do(
    tmp: ratsimp(subst(
      substlist[k],
      subst(
        slt[i],
        [[x[0][0], x[1][0], x[2][0]], [x[0][1], x[0][2], x[1][1], x[1][2], x[2][1], x[2][2]]])
    )),
    print(tmp),
    sol: endcons(tmp, sol)
  )
```

```
);
eq[1]: ratsimp(subst(
  substlist[1],
  x[0][0]*diff(Lgx(x[0][0], x[1][0], x[2][0], x[0][1], x[0][2]), x[0][0])
))$
eq[2]: ratsimp(subst(
  substlist[1],
  x[1][0]*diff(Lgy(x[0][0], x[1][0], x[2][0], x[1][1], x[1][2]), x[1][0])
))$
eq[3]: ratsimp(subst(
  substlist[1],
  x[2][0]*diff(Lgz(x[0][0], x[1][0], x[2][0], x[2][1], x[2][2]), x[2][0])
))$
sol12: solve(eq[1]=0, x[2][0])$
sol21: flatten(makelist(solve(subst(sol12[i], eq[2])=0, x[1][0]), i, 1, length(sol12)))$
sol30: flatten(makelist(makelist(
  solve(subst(sol21[j], subst(sol12[i], eq[3]))=0, x[0][0]),
  i, 1, length(sol12)), j, 1, length(sol21)
))$
insolsub: []$
for i: 1 thru length(sol21) do(
  tmp: subst(sol21[i], subst(sol12, [x[0][0], x[1][0], x[2][0]])),
  insolsub: endcons(tmp, insolsub)
)$
insolsub: ratsimp(insolsub);
insol: []$
for j: 1 thru length(insolsub) do(
  for i: 1 thru length(sol30) do(
    tmp: errcatch(ratsimp(outermap(subst, sol30[i], insolsub[j]))),
    print([i, j, tmp]),
    insol: endcons([first(tmp), [0, 0, 0, 0, 0, 0]], insol)
  )
)$
insol: rest(listify(setify(insol)));
sol: append(insol, sol);
```

C Cournot-Cournot 型ゲームの図解手順

これは本文第4節中の，第2の解がNash均衡となるためのパラメタの領域を考察することである。(28) の実数条件より M の値が非負でなければならない。境界線として $M=0$ の式を b について解くと

$$\begin{cases} b = -\dfrac{(8\sqrt{2}a - 4\sqrt{2})\sqrt{11a^2 - 11a + 2} + 20a^2 - 20a - 5}{40a^2 - 40a + 30} \\ b = \dfrac{(8\sqrt{2}a - 4\sqrt{2})\sqrt{11a^2 - 11a + 2} - 20a^2 + 20a + 5}{40a^2 - 40a + 30} \end{cases} \tag{54}$$

を得る。(a, b) 平面は条件 (54) の境界線でいくつかの領域に分けられる。実数解を保証する領域のなかで，

(25), (26), (27) がそれぞれ開区間 (0, 1) に入るための条件を考察する。

最初に x_3 の条件を考察する。$0 < x_3 < 1$ は

$$0 < \frac{10ab - 9a + 2}{5(2a-1)(2b-1)} < 1 \tag{55}$$

である。

- $(2a-1)(2b-1) > 0$ のとき，(55) の分母を払って b について整理すると

$$\frac{9a-2}{10a} < b < \frac{a-3}{10(a-1)} \tag{56}$$

を得る。

- 同様にして，$(2a-1)(2b-1) < 0$ のとき，

$$\frac{9a-2}{10a} > b > \frac{a-3}{10(a-1)} \tag{57}$$

を得る。(a, b) 平面において，(54) の等号条件と (56), (57) の上限と下限の曲線を図 3 に描く。前者は左右対称的な曲線であり，実数解となる領域はこの曲線に挟まれた領域である。後者は点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ で接する 1 組の曲線である。(a, b) 平面は 2 直線 $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$ によって 4 つの領域に分割される。そのうち $0 < x_3 < 1$ の条件は (56) の場合に満たされる。従って，x_3 が開区間 (0, 1) に入る条件は実数解を満たす領域の中で，後者の 1 組の曲線で挟まれた領域である。

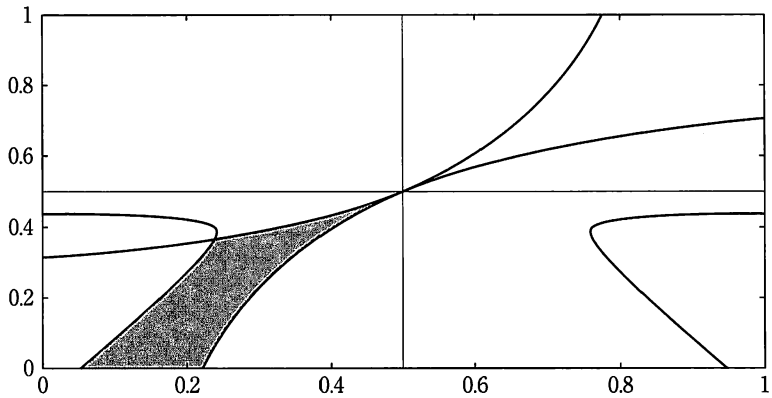


図 3: $0 < x_3 < 1$ であるパラメタの領域

次に (25) が開区間 (0, 1) に入る条件を考察する。

- $(2a-1)(2b-1) > 0$ のとき，次の不等式が成立することと同値である。

$$-3(2a-1)(10b-7) < \sqrt{3M} < 3(2a-1)(10b-3) \tag{58}$$

- 同様にして $(2a-1)(2b-1) < 0$ のとき，

$$-3(2a-1)(10b-7) > \sqrt{3M} > 3(2a-1)(10b-3) \tag{59}$$

である。

(58), (59) の境界線の方程式は

$$\sqrt{3M} = -3(2a-1)(10b-7) \tag{60}$$

$$\sqrt{3M} = 3(2a-1)(10b-3) \tag{61}$$

である。(60), (61) の実数条件の境界線を (a, b) 平面に描くと図 4 となる。

- $(2a-1)(2b-1) > 0$ の場合で曲線が存在するのは，$2a-1 < 0$ かつ $2b-1 < 0$ のときである。このとき，(58)の左側の不等式はつねに成り立つ。そして，右側の不等式が意味をもつためには $b < \frac{3}{10}$ でなければならない。従って，右側の不等式が成り立つ領域は $b < \frac{3}{10}$ の範囲で，上に凸の 2 つの曲線のうち，

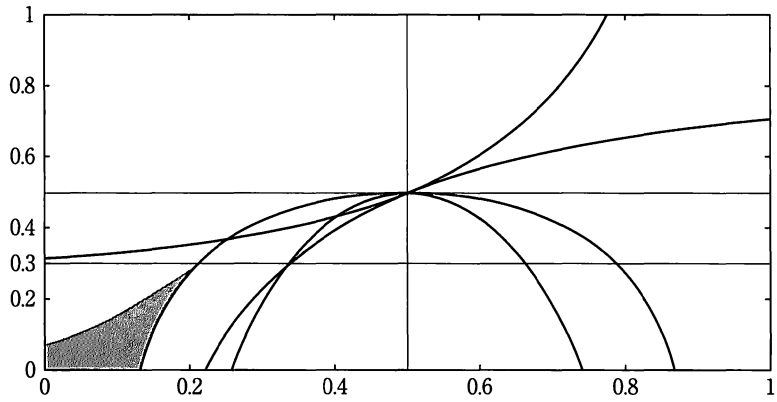


図 4: $0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1$ であるパラメタの領域

外側の曲線の左側の領域である。ただし，この場合は実数解の領域を考慮に入れなければならない。

- $(2a-1)(2b-1) < 0$ の場合においても，図 4 より，曲線の存在する場合があるが，図 3 で $0 < x_3 < 1$ を満たす領域の外にあるから考慮する必要はない。

最後に，(26) が開区間 (0, 1) に入る条件を考察する。これもその条件は $(2a-1)(2b-1)$ が正である場合を考察すれば十分である。

- $(2a-1)(2b-1) > 0$ の場合，(26) が開区間 (0, 1) に入る条件は，次の不等式が成り立つことである。

$$-3(2a-1)(10b-3) < \sqrt{3M} < 3(2a-1)(10b-7) \tag{62}$$

(62) は $2a-1 < 0$ かつ $2b-1 < 0$ の領域においては，図 4 の内側の曲線と外側の曲線に挟まれた領域に対応するが，$b < \frac{3}{10}$ のときは，(62) の左側の不等式はつねに成り立つので，このときは内側の曲線の外側の部分の領域が $0 < x_2 < 1$ を満たす領域である。

最後に，(29) を満たす (a, b) は $0 < x_i < 1, (i = 1, 2, 3)$ を満たす領域に含まれないことが確かめられる。

以上の考察によって，(25), (26), (27) が開区間 (0, 1) に入るためのパラメタの領域は本文中の影を付けた領域となる。

（受理　2008年 3 月18日）