

数学理論に対する個別超準化法 I

西山 龍 吉

► Key Words

超準解析 (nonstandard analysis)
アブラハム・ロビンソン (Abraham Robinson)
超準化 (nonstandardization)
超フィルター (ultrafilter)
内集合 (internal set)

▼要 旨

超準解析 (Nonstandard Analysis) は Abraham Robinson の考案になる画期的な解析法であるが、一面、かなりの程度わかりにくい理論でもあると見なされてきた。事実、創始以来ほぼ半世紀を迎えようとする今日なお、この理論が広く普及しているようには見えない。本論において我々は、‘数学理論の記述に関する新たな枠組み’を用いることによって、超準解析の分かりやすい導入を試みた。

ここで述べる個別超準化法の特徴は、つぎのような点にある。(1) それぞれの数学理論を、定義・公理・命題・条件その他さまざまな種類の記述の集まりととらえる。(2) これらの記述を、おのおの“数学的対象”と“記述形式”とに分解する。(3) そこで用いられている数学的対象のそれぞれを一せいに超準化し、そのあと、それに合わせて各記述形式を超準化する。

なお、ここで“記述形式”と呼ぶのは、それを記述するのに用いられた不定の数学的対象のそれぞれに具体的な対象を代入したとき、何らかの意味をもつ命題へと変わり、その真偽が定まるような記述のことである。その際、記述形式の構成のしかたや記述された命題の具体的な意味、さらにその真偽などは、それぞれの数学理論に属することがらであり、超準化法はそこに立ち入らない。

個別超準化法が前提とするのは、自然数や実数についての通常の知識のほかは、無限集合

における超フィルターの存在だけである。それも、Zorn の補題を用いて簡単に証明されるので、本論が述べるのは、予備知識を必要としない超準解析導入の方法といえよう。このように、ZFC (Zermelo-Fraenkel の集合論に選択公理をあわせたもの) の知識を求められない点は、個別超準化法の学びやすさにつながるものと思われる。

目 次

第1章 数学的記述における“対象と記述形式”

§1. 2つの超準化法

§2. さまざまな対象と“対象空間”

— $\mathfrak{P}$ と $\mathfrak{F}$ による組み立て (超準化の準備) —

第2章 数学理論の“超準化”

§3. 超実数導入のアイデアと超フィルターの働き

§4. 対象空間の超準化

— ${}^*\mathfrak{P}$ と ${}^*\mathfrak{F}$ と $\times$ による組み立て (超準化の実行) —

§5. 超基底空間 ${}^*\mathbf{N}$ および ${}^*\mathbf{R}$

§6. 内的対象と内的定義

なお、この数学理論に対する個別超準化法 I には、以下のような内容の II、III がつづく。

第3章 超準解析における“内的理論”

§7. 超準解析における内的諸定理

第4章 超準解析における“外的理論”

§8. 超準解析における外的諸定理

第5章 実数空間 $\mathbf{R}$ における位相と微積分

§9. $\mathbf{R}$ における位相

§10. $\mathbf{R}$ における微積分

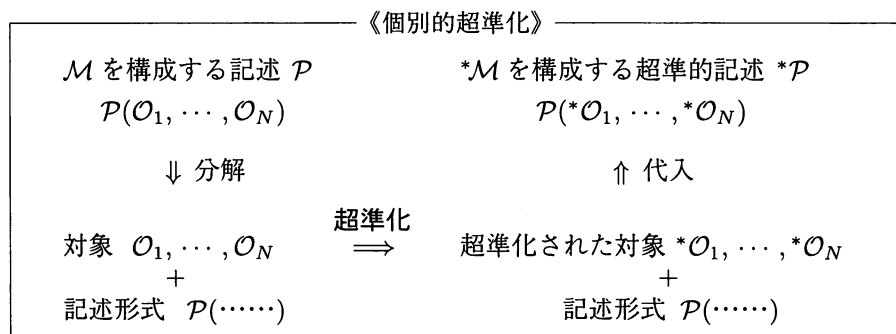
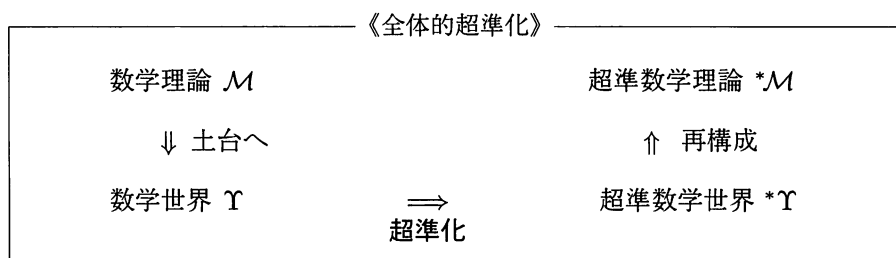
第1章 数学的記述における“対象と記述形式”

§1. 2つの超準化法

(1) 超準化の2つのコース

それぞれの数学理論に超準解析の枠組みを導入するとき、2通りの方法が考えられる。一つは、あらゆる数学理論を記述する枠組みとしての数学世界を、そのまま全体として超準化する方法である。これによれば、超準化されたあらゆる数学理論を記述する巨大な超準的数学世界が構築される。

もう一つは、そのような普遍的な数学世界への拡張を行なう代わりに、数学理論ごとに、その理論の超準化に必要となる範囲において、概念や記述手段を用意する方法である。これによれば、すでに存在する理論をもとに、その理論に沿って限られた超準化を実行することになる。



我々はこれより、後のコースを行く。すなわち、数学理論 $\mathcal{M}$ が与えられたとき、その理論に沿って限られた超準化を進める。

(2) 数学的記述における“対象”と“記述形式”

数学理論を超準化するため、まず、超準化の対象となる数学理論の構成を整理しておく。数学理論をさまざまな記述の集まりと見て、各記述、すなわち各種の命題や条件、定義や公理などを分解していくと、数、点、元、集合、写像、集合族、写像族、その他さまざまな“数学的对象”に行き着く。同時に、つぎの例に見るように、それらが有する性質、あるいはそれらの間に存在する関連、その他代数演算、ブール演算など対象内、対象間に存在するさまざまな数学的関連、さらには論理的関連が、記述には用いられている。

諸対象間のこうした関連を、全体として“記述形式”と呼ぶことにする。つまり、一つの命題があるとき、そこから具体的な対象をすべてとり去ったのこりが、その命題にとっての記述形式である。これら記述形式の内容を具体的に表示しようと思えば、命題中の数学的对象のそれぞれを、それと同じ種類の変数に置き換えてやればよい。その他、記述形式をどう記述するかや、記述内容をどう理解するか、またその真偽をどう判定するかなどは、それぞれの数学理論に属することがらであって、この超準化法とは独立したことがらである。

単一の関係式 $x = y$ や $x \in Y$ などは最も簡単な記述形式であり、それ自体では特定の具体的な意味をもたない。しかし、そこに何らかの具体的な数学的对象を代入すると、それは一つの命題に変わり新たな意味をもつ。

□ 例 つぎの命題 P

$$P: \forall l \in \mathbf{N} \quad \forall m \in \mathbf{N} \quad \exists n \in \mathbf{N} \quad [m < n \text{ かつ } ln + 1 \in \mathbf{P}]$$

がある。このとき、

P が用いた数学的对象は

自然数 1 $\mathbf{N}$: すべての自然数 $\mathbf{P}$: すべての素数、

P が用いた記述形式は

$$R(w, X, Y): \forall x \in X \quad \forall y \in X \quad \exists z \in X \quad [y < z \text{ かつ } xz + w \in Y]$$

ここで x, y, z, w : 個体変数 X, Y : 集合変数

であり、これらを合わせて

$$P := R(1, \mathbf{N}, \mathbf{P})$$

を得る。これと同値なもう一つの命題 Q

Q : 各自然数 l に対し、いくらでも大きな別の自然数 n が存在して、
 $ln + 1$ は素数となる

の場合、‘自然数 l ’、‘自然数 n ’を‘ $l \in \mathbf{N}$ ’、‘ $n \in \mathbf{N}$ ’、‘ $ln + 1$ が素数’を
‘ $ln + 1 \in \mathbf{P}$ ’と書き換えると、 Q の記述形式は

$S(z, X, Y)$: 各 $x \in X$ に対し、いくらでも大きな別の $y \in X$ が存在
して、 $xy + z \in Y$ となる

ここで x, y, z : 個体変数 X, Y : 集合変数

となる。そして、

$$Q := S(1, N, P)$$

という Q の分解を得る。このように、同じ意味をもつ命題はいろいろあり得、それらが用いる記述形式はさらに多様である。

今、一歩進めて、 N, P の代わりに、それらを超準化した数学的対象 $*N, *P$ をはじめの記述形式に代入すると、超準世界における 1 つの記述を得る。これを、はじめの命題 P に対する“超準解釈”と呼び、 $*P$ と書く。

$$*P := R(1, *N, *P)$$

と定義されているから、超準化された命題 $*P$ は

$$*P : \forall \lambda \in *N \quad \forall \mu \in *N \quad \exists \nu \in *N \quad [\mu < \nu \text{ かつ } \lambda\nu + 1 \in *P]$$

ここで、 $*N$: すべての超自然数の集合

$*P$: すべての超素数の集合

と記述される。

□

ところで、 P から $*P$ へと命題が超準化された際、対象だけでなく、対象を相互に結びつける記述形式 $R(w, X, Y)$ のはたらきもまた拡張されている。しかし、 $R(w, X, Y)$ が対象間の関係として $=, \in, \subseteq, \leq, \cap, \cup, \overline{}, \emptyset, +, -, \times, \div$ だけを用いて記述されている限り、これらの記号自体がそうであったように、超準化前と超準化後で、記述形式を記号的に区別する必要は生じない²。

また、命題中の束縛変数 $\forall x, \exists y$ などは、記述形式自体を記述するために用いられているので、超準化の前後で必ずしも記号を区別しなくてよい³。

(3) 数学理論超準化の段どり

先の命題の例で数学的対象として用いられていたのは、自然数 1 のほかは集合 N と集合 P だけであり、理論の超準化もこの 2 集合の超準化で終わった。しかし、一般に数学的記述に用いられる数学的対象はさまざまであって、数、ベクトル、幾何学的な点、代数系の元など各種の個体から始まり、その後、これら個体の集合に対して冪集合をとる操作 $\wp$ 、写像空間をとる操作 $\mathfrak{F}$ 、さらには各種の一般的集合に対して冪集合をとる操作 $\wp$ 、写像空間をとる操作 $\mathfrak{F}$ を、ある回数、ある手順でどこすことによって組み立てられている。したがって、理論の叙述に必要な範囲の数学的対象を超準化するにも、まず個体の集合を超準化し、そのあと、これらに、超準化された操作 $*\wp$ (すでに超準化された集合から超準化された冪集合をつくる)、超準化された操作 $*\mathfrak{F}$ (すでに超準化された集合の間に超準化された写像空間をつくる) を、その対象を組み立てる際に用いた $\wp$ と $\mathfrak{F}$ に代え、そのときの手順の通りにほどこせばよい。

たとえば、実数集合列の全体 $\mathfrak{F}(\mathbf{N}, \mathfrak{P}(\mathbf{R}))$ を超準化するには、 $\mathfrak{F}(\mathbf{N}, \mathfrak{P}(\mathbf{R}))$ が

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \xrightarrow{\mathfrak{F}} & \mathfrak{F}(\mathbf{N}, \mathfrak{P}(\mathbf{R})) \\ \mathbf{R} \Rightarrow \mathfrak{P}(\mathbf{R}) & \xrightarrow{\mathfrak{F}} & \mathfrak{F}(\mathbf{N}, \mathfrak{P}(\mathbf{R})) \end{array}$$

と組み立てられているのにならって、 $*\mathfrak{F}(*\mathbf{N}, *\mathfrak{P}(*\mathbf{R}))$ も、

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{N} \Rightarrow *\mathbf{N} & \xrightarrow{*\mathfrak{F}} & *\mathfrak{F}(*\mathbf{N}, *\mathfrak{P}(*\mathbf{R})) \\ \mathbf{R} \Rightarrow *\mathbf{R} \Rightarrow *\mathfrak{P}(*\mathbf{R}) & \xrightarrow{*\mathfrak{F}} & *\mathfrak{F}(*\mathbf{N}, *\mathfrak{P}(*\mathbf{R})) \end{array}$$

ここで $*\mathfrak{P}(*\mathbf{R}) := *(\mathfrak{P}(\mathbf{R}))$,
 $*\mathfrak{F}(*\mathbf{N}, *\mathfrak{P}(*\mathbf{R})) := *(\mathfrak{F}(\mathbf{N}, \mathfrak{P}(\mathbf{R})))$

と組み立てればよい。

理論 $\mathcal{M}$ で用いられるすべての対象をこの要領で超準化し終われば、あとは $\mathcal{M}$ で用いられるさまざまな記述形式を用いて、超準化された理論 $*\mathcal{M}$ を叙述することができる。

§ 2. さまざまな対象と“対象空間”

— $\mathfrak{P}$ と $\mathfrak{F}$ による組み立て（超準化の準備） —

(1) 3 タイプの対象と“基底空間”

1) はじめに、数学理論 $\mathcal{M}$ で使われる数学的対象のすべてを、大きく“集合”のタイプ、“写像”のタイプ、およびそれ以外のタイプの3つに分ける。そして、最後のものを“個体”のタイプと呼ぶ。

2) このうち個体のすべてを、個々の性質やその他相互のちがいによって、いくつかの種類に分ける。たとえば、集合として

$$\{\text{いくつかのスカラール, いくつかのベクトル, いくつかの幾何学的点}\}$$

というようなものを考えることは、余りない。同じく個体ではあっても、個体としての“種類”が異なるからである。具体的には、すべての個体 a, b に対し

$$a, b: \text{同じ種類の個体} \Leftrightarrow \exists S: \text{理論 } \mathcal{M} \text{ における集合 } [a, b \in S]$$

と定義する。したがって、個体の種類の分け方は理論 $\mathcal{M}$ ごとに異なる。もし、自然かつ可能であれば、さらにそれらを整理統合して、その一つ一つを“基底空間”と呼ぶ。

3) ここで、理論 $\mathcal{M}$ に対する最初の仮定を、

$\mathcal{M}$ の基底空間は $H_1, \dots, H_M$ の有限個にまとめられる —— 仮定 <1>

とおく。基底空間のなかに、 $H_1 := \mathbf{R}$, $H_2 := \mathbf{R}^2$, $H_3 := \mathbf{R}^3$, $\dots$ (‘各次元の実ベクトル’) のような形式的な無限系が含まれている場合、基底空間を新たに $H' := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{R}^n$ (‘有限次元の実ベクトル’) ととりなおすことによって、この仮定をみたすことができる。

なお、 $a \in H_i$ のとき、“個体 a の種類は H_i ” ということにする。仮定 <1> によれば、理論 $\mathcal{M}$ の記述に用いられる個体の種類は有限通りである。

(2) “対象空間”

1) 集合 Ψ, Σ, Θ に対する操作 $\mathfrak{P}$ と $\mathfrak{F}$ を

$$(\mathfrak{P}) \quad A \in \mathfrak{P}(\Psi) \Leftrightarrow A \subseteq \Psi$$

$$(\mathfrak{F}) \quad f \in \mathfrak{F}(\Sigma, \Theta) \Leftrightarrow \exists \Sigma' \in \mathfrak{P}(\Sigma), \exists \Theta' \in \mathfrak{P}(\Theta) \quad f: \Sigma' \rightarrow \Theta' \text{ 全射}$$

‘ f は Σ を始集合、 Θ を終集合とする写像’

により定義する。

2) 基底空間 $H_1, \dots, H_M$ から出発し、冪集合をとる操作 $\mathfrak{P}$ と写像空間をとる操作 $\mathfrak{F}$ を有限回用いて得られる集合を、“対象空間” $\mathcal{O}$ と呼ぶことにする。すなわち、

(i) 各基底空間 $H_1, \dots, H_M$ は対象空間である

(ii) Ψ が対象空間であるとき、 $\mathfrak{P}(\Psi)$ もまた対象空間である

(iii) Σ と Θ が対象空間であるとき、 $\mathfrak{F}(\Sigma, \Theta)$ もまた対象空間である

(iv) 以上の対象空間だけが、対象空間である

と帰納的に定義⁴する。

3) 対象空間のうち、最後にほどこした操作が“ $\mathfrak{P}$ ”であるものを“集合空間”、“ $\mathfrak{F}$ ”であるものを“写像空間”と呼ぶ。“基底空間”の場合は、 $\mathfrak{P}$ も $\mathfrak{F}$ もほどこされていない。こうして、対象空間の全体は

$$\text{対象空間} = \begin{cases} \text{基底空間} \\ \text{集合空間} \\ \text{写像空間} \end{cases}$$

の3タイプに分かれる。今後、それぞれに属する対象を、“個体”、“一般集合”、“一般写像”と呼んで区別する。たとえば、個体の集まりも冪集合も写像空間も、みな一般集合の名で括られる。

ここで、理論 $\mathcal{M}$ に対する第2の仮定を、

$\mathcal{M}$ 中の数学的対象のすべては、それぞれ、いずれかの対象空間に属する

とおく。この仮定により、理論中に現われるすべての数学的対象は、それが属する対象空間によって分類される。

(3) $\mathfrak{P}\mathfrak{F}$ カテゴリー

具体的な対象空間 $\mathcal{O}$ は、定義 (i) ~ (iv) に見られる通り、基底空間 $H_1, \dots, H_M$ を土台に、 $\mathfrak{P}$ と $\mathfrak{F}$ を有限回用いて組み立てられている。そして、その構成手順は、 $M + 2$ 文字 $H_1, \dots, H_M, \mathfrak{P}, \mathfrak{F}$ がつくる列として表示される。この文字列を一般に $C(H_1, \dots, H_M; \mathfrak{P}, \mathfrak{F})$ と書くことにすると、そこには、この対象空間 $\mathcal{O}$ の元に共通する、いわば “ $\mathfrak{P}\mathfrak{F}$ カテゴリー” が表示されている。

たとえば、 $\mathcal{O}$ の元 $\tilde{o}$ が実数集合列の集まりであるとき、 $\tilde{o}$ の $\mathfrak{P}\mathfrak{F}$ カテゴリーは $C(\mathbf{N}, \mathbf{R}; \mathfrak{P}, \mathfrak{F}) := \mathfrak{P}(\mathfrak{F}(\mathbf{N}, \mathfrak{P}(\mathbf{R})))$ と表示される。

(4) 有限カテゴリー型理論

$\mathcal{M}$ で用いられる対象空間のすべてについて、その構成に用いられた $\mathfrak{P}$ と $\mathfrak{F}$ の回数に上限があるとき、 $\mathcal{M}$ を仮に “有界カテゴリー型理論” と呼ぶことにする。たとえば、 $\Phi, \mathfrak{P}(\Phi), \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\Phi)), \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\Phi))), \dots$ などをあつかう理論は有界カテゴリー型理論でない。また、 $\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathfrak{P}^n(\Phi)$ も定義に照らして対象空間でない。ZFC や 超準解析理論 (NSA) は非有界カテゴリー型理論であり、これらいわば ‘一般理論’ を、以下に述べる個別超準化法によって超準化することはできない。そこで、理論 $\mathcal{M}$ に対する最後の仮定を、

$\mathcal{M}$ は有界カテゴリー型理論である —— 仮定 < 3 >

とおく。仮定 < 1 > ~ 仮定 < 3 > を総合すると、理論 $\mathcal{M}$ で用いられるすべての数学的対象はそれぞれ、有限個の対象空間のいずれか一つに属することになる。このような理論を、“有限カテゴリー型理論” と呼ぶことにする。

以下、数学理論 $\mathcal{M}$ は有限カテゴリー型理論であるものと仮定して、 $^*\mathcal{M}$ を構成する。

第2章 数学理論の“超準化”

§3. 超実数導入のアイディアと超フィルターのはたらき

(1) “超実数”と“定義列”

これより、数直線上を動く点、すなわち実数列を1つの超実数と考える。その際、動かない点、すなわち定数列は、これまで通りの実数と考える。すると、0から限りなく遠ざかる点はいかなる実数より大きく、したがって無限大の超実数をつくる。逆に、0へ限りなく近づいていく点は0以外のいかなる実数より小さくなるので、無限小の超実数をつくる。こうして、ある実数に限りなく近い超実数とは、その点へ近づいていく実数列のことである。

とはいっても、単なる数列の全体は、そのままでは数としての性質をもたない。たとえば、数列 $-1, 0, 1, -1, 0, 1, -1, 0, 1, \dots$ などは、数としてもつべき符号すら定まらない。そこで、単なる数列を1つの数に変えるため、列の番号に関する超フィルターの働きが必要となる。今、列の番号の全体 $\mathbf{N}$ 上に超フィルターを1つ選び、 $\mathcal{U}$ と書く。この $\mathcal{U}$ は、どのような集合が“ $\mathbf{N}$ の根幹を占める重要な集合”であるかを指定している。たとえば、3の倍数の集合が $\mathcal{U}$ に属するとすれば、十分たくさんの番号で -1 と一致する上の数は、 -1 である。以下、このような発想のもとに、超実数の理論を組み立てる。

まずはじめに、異なる実数列 $a_1, a_2, a_3, \dots$ と $b_1, b_2, b_3, \dots$ であっても“多少の”番号におけるちがいは無視して、“十分たくさんの”番号で一致するならば、すなわち、“ $\mathbf{N}$ の根幹を占めるほどの番号において”2つの数列が一致するならば、これらは同じ超実数を指定するものとする。こうした同一視を通してはじめて、実数列間の大小の比較なども可能となる⁵。超実数をこう考えたとき、もとの実数列を、この超実数に対する“定義実数列”と呼ぶ⁶ことにする。

(2) 超フィルターの働き

個別超準化の方法では、ことがらの定義およびことがらの真偽の判定を、しばしば超フィルターにまでさかのぼって行なう。そのため、ここで超フィルターに関する基本的事項を確認しておく。

すべての自然数がつくる集合 $\mathbf{N} := \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ 上の集合族 $\mathcal{U}$ がフィルター (filter) であるというのは、つぎの3条件

- (i) $\emptyset \notin \mathcal{U}, \mathbf{N} \in \mathcal{U}$
- (ii) $A \in \mathcal{U}$ かつ $A \subseteq B \Rightarrow B \in \mathcal{U}$

$$(iii) A, B \in \mathcal{U} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{U}$$

をみたすことである。(ii) に見るように‘大きな集合ほどフィルターの目にかかりやすく’、(i) と合わせれば‘大規模なフィルターほど目が細かい’。(iii) と (i) を合わせれば、重なりをもたない2集合が同一のフィルターに属することはない。これと同じ理由で、フィルターの元は“有限交叉性”

$$A_1, \dots, A_n \in \mathcal{U} \Rightarrow A_1 \cap \dots \cap A_n \neq \phi$$

を有する。

$\mathbf{N}$ のすべての部分集合の集まり、すなわち $\mathbf{N}$ の冪集合 $\mathfrak{P}(\mathbf{N})$ に対し、(ii) のはたらきのもとでは、(i) を

$$\phi \subsetneq \mathcal{U} \subsetneq \mathfrak{P}(\mathbf{N})$$

と書き換えることができる。したがって、フィルターの細かさには限度がある。目の細かさの限界にあるこのようなフィルター⁷を 極大フィルター (maximal filter) と呼ぶ。

極大フィルター $\mathcal{U}$ がもつ著しい性質は、つぎの補題に述べられる。

□□ 補題〔超フィルターの排中性〕

$\mathbf{N} = A \cup \bar{A}$ ($\bar{A}$ は A の補集合を表わす) と $\mathbf{N}$ を分割したとき、 $\mathcal{U}$ は必ず $A, \bar{A}$ のいずれか一方を、しかも一方だけをその元として有する

この性質を極大フィルターの“排中性”と呼ぶことにすると、これは論理学における排中律『いかなる命題も真か偽かのいずれかに定まる』とかかわって、超準解析の構成上不可欠の役割をになう。たとえば、 $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} = -1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots$ が指定する超実数は1か-1でしかありえないが、 $K = \{k \in \mathbf{N} \mid a_k = -1\}$, $L = \{k \in \mathbf{N} \mid a_k = 1\}$ とおくと、 $\mathbf{N} = K \cup L$ および $K \cap L = \phi$ が成り立つ。そこで極大フィルターの排中性を用いると、 $K \in \mathcal{U}$ か $L \in \mathcal{U}$ のいずれか一方が定まり、 $\alpha = -1$ か $\alpha = 1$ かの結論が得られる。

ところで、フィルターの有限個の元はかならず交わるが、無限個の元が交わるとは限らない。極大フィルター $\mathcal{U}$ が、さらに

$$(iv) \bigcap_{A \in \mathcal{U}} A = \phi \quad (\text{不交叉性})$$

をみたすとき、超フィルター (ultra filter) と呼ぶことにする⁸。

超フィルター $\mathcal{U}$ について重要なのは、つぎの事実である。

□□ 補題〔超フィルターの無限性〕

超フィルター $\mathcal{U}$ の元はすべて無限集合である

この補題を超フィルターがもつ排中性と結びつけると、どの超フィルターにも補有限集合⁹のすべてが属することがわかる。補有限集合は $\mathbf{N}$ の圧倒的多数にあたるが、分割された A と $\bar{A}$ とがともに無限集合であれば、どちらが $\mathcal{U}$ に属すかは自明でない。 $\mathcal{U}$ に属する側

を“ N の根幹をなす部分”と呼んだが、定義 (iii) によれば、 N の根幹をなす部分どうしの交わりは、ひきつづき N の根幹をなす。

(3) 超フィルターの排中性に関する補題

超フィルター $\mathcal{U}$ の排中性は、つぎの事実を導く。すなわち、

□□ 補題 [超フィルターの排中性の系 1]

$L = A_1 \cup \cdots \cup A_n$ かつ $A_i \cap A_j = \emptyset$ ($i \neq j$) のとき、つぎが成り立つ。

$$L \in \mathcal{U} \Rightarrow 1 \leq \exists h \leq n \quad A_h \in \mathcal{U}$$

証明: $\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_n} \notin \mathcal{U}$ が成り立つことになるから、ド・モルガンの法則を用いて $\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_n} \notin \mathcal{U}$ を得る。フィルターの定義 (iii) によると、これは $1 \leq \exists h \leq n \quad \overline{A_h} \notin \mathcal{U}$ を導く。ゆえに、 $1 \leq \exists h \leq n \quad A_h \in \mathcal{U}$ を得るが、この h が一意的であることは、 $\{A_i\}_{i=1}^n$ が互いに交わらないとの仮定からわかる。□

§4. “対象空間”の超準化

— $\ast \wp$ と $\ast \mathfrak{F}$ と $\times$ による組み立て (超準化の実行) —

(1) 対象空間の一律超準化

仮定 $\langle 2 \rangle$ により、数学理論 $\mathcal{M}$ 中の数学的对象を超準化するには、それが属する対象空間、すなわち基底空間の一つ、集合空間の一つ、あるいは写像空間の一つ、を超準化すればよい。 $\mathcal{M}$ は有限カテゴリー型であったから、必要な超準化は有限個の対象空間を超準化することで終わる。

その際、個々の対象空間の超準化は、実数を超実数へ拡張したときと同じしかたを用いて、各対象空間一律に行なう。すなわち、対象空間 $\mathcal{O}$ 内のすべての列 $\{o_k\}_{k=1}^\infty$ が、それぞれ超対象 $\tilde{o}$ を指定するものとする。ただし、同じ $\mathcal{O}$ 内の別の列 $\{o'_k\}_{k=1}^\infty$ が N の根幹を占める番号において $\{o_k\}_{k=1}^\infty$ と一致するならば、この列もまた同じ超対象 $\tilde{o}$ を指定する。つまり、対象列 $\{o_k\}_{k=1}^\infty$ と $\{o'_k\}_{k=1}^\infty$ が指定する超対象が、それぞれ $\tilde{o}$ と $\tilde{o}'$ であるとき、

$$\tilde{o} = \tilde{o}' \Leftrightarrow \{k \in N \mid o_k = o'_k\} \in \mathcal{U}$$

と定義する。

これ以後、 $\{k \in N \mid \mathcal{P}(k): \text{真}\} \in \mathcal{U}$ を短く $\langle \mathcal{P}(k) \rangle_k$ と書き、“ $\mathcal{P}(k)$ が番号 k の究極において成り立つ”ということにする。すると、上の定義は

$$(=\mathcal{O}) \quad \tilde{o} = \tilde{o}' \Leftrightarrow \langle o_k = o'_k \rangle_k$$

と、簡明かつ自然に書かれる。つまり、“2つの対象列が番号 k の究極において一致するならば、これらが定める超対象は同じもの¹⁰である。”

このとき超対象 $\bar{o}$ の側から見て、列 $\{o_k\}_{k=1}^\infty$ を定義列と呼ぶ。同時に、超対象を単なる列と区別するため、 $\{ \}$ の代りに $()$ を用いて、 $\bar{o} = (o_k)_{k=1}^\infty$ と書くことにする。なお、定義列が定列 $\{o\}_{k=1}^\infty$ であるような特別な超対象を対象 o の超準化と呼び、単に左肩に $*$ を付して $*o$ と書く。すなわち、

$$*o := (o)_{k=1}^\infty = (o, o, o, \dots)$$

と定義する。こうして得られた超対象 $\bar{o}$ の全体を対象空間 $\mathcal{O}$ の超準化 $*\mathcal{O}$ 、あるいは簡単に超対象空間 $*\mathcal{O}$ と書く。すると、

$$(\in)_{\mathcal{O}} \quad \bar{o} \in *\mathcal{O} \Leftrightarrow \langle o_k \in \mathcal{O} \rangle_k$$

という関連がある。

ところで、番号 k に関する複数のことがら $\mathcal{P}_1(k), \dots, \mathcal{P}_n(k)$ があるとき、つぎの事実が導かれる。すなわち、

□□ 補題〔超フィルターの排中性の系 2〕

$\mathcal{P}_1(k), \dots, \mathcal{P}_n(k) : k$ に関する条件 ($k \in \mathbf{N}$)

とする。このとき、つぎの書き換えが許される。

$$(1) \langle \mathcal{P}_1(k) \text{ かつ } \dots \text{ かつ } \mathcal{P}_n(k) \rangle_k \Leftrightarrow \langle \mathcal{P}_1(k) \rangle_k \text{ かつ } \dots \text{ かつ } \langle \mathcal{P}_n(k) \rangle_k$$

$$(2) \langle \mathcal{P}_1(k) \text{ または } \dots \text{ または } \mathcal{P}_n(k) \rangle_k \Leftrightarrow \langle \mathcal{P}_1(k) \rangle_k \text{ または } \dots \text{ または } \langle \mathcal{P}_n(k) \rangle_k$$

証明: (1) の $\Rightarrow$ と (2) の $\Leftarrow$ は、フィルターの性質 (ii) から得られる。(1) の $\Leftarrow$ にはフィルターの性質 (iii) を、(2) の $\Rightarrow$ には超フィルターの排中性の系の補題 1 を、それぞれ用いる。

□

(2) 超対象空間の $\mathfrak{P}\mathfrak{F}$ カテゴリー復活

対象空間 $\mathcal{O}$ に対する超準化 $*\mathcal{O}$ が、定義列を用いて、各対象空間一律に定義された。ただし、それは超対象の集合 $*\mathcal{O}$ を定義しただけであり、つづいて各対象 $\bar{o}$ に、それぞれ個体としての、あるいは部分集合としての、あるいは写像としての特性や働き、すなわち他の対象との間のあるべき連関を定義してやらねばならない。こうした連関は §2 (2) の $(\mathfrak{P}), (\mathfrak{F})$ に定義されているが、各対象空間 $\mathcal{O}$ は、その定義にしたがい、いくつかの基底空間に操作 $\mathfrak{P}$, 操作 $\mathfrak{F}$ を有限回ほどこすことによって、特性や働きを付与されている。また、それを付与される過程は、 $\mathcal{O}$ が属する $\mathfrak{P}\mathfrak{F}$ カテゴリーに表示されている。

したがって $\mathcal{O}$ の超準化も、まず基底空間を超準化したあと、超準化された操作 $*\mathfrak{P}$ と $*\mathfrak{F}$ を、 $\mathcal{O}$ を組み立てたときの $\mathfrak{P}, \mathfrak{F}$ と同じ手順にしたがって、同じようにほどこせばよい。こうした一連の操作を通して、超対象空間 $*\mathcal{O}$ に、理論 $*\mathcal{M}$ 中の個体としての、あるいは

部分集合としての、あるいは写像としての特性や働きが付与される。そうした結果として、各超対象にも ‘ $\mathfrak{P}\mathfrak{F}$ カテゴリーの復活’ が果たされる。

(3) 超個体

$\mathcal{O} := H$ (H : 基底空間) の超準化 ———

すでに基底空間 H の超準化として、超基底空間 $*H$ が

$$*H := \{ \alpha = (a_k)_{k=1}^{\infty} \mid a_k \in H \ (k \in \mathbf{N}) \}$$

と定義されている。その元を 超個体 $\alpha := (a_k)_{k=1}^{\infty}$ と呼ぶが、いま両者の間には

$$\alpha \in *H \Leftrightarrow \langle a_k \in H \rangle_k$$

という関連がある。

なお、 $a \in H$ であるとき、超個体の中でも特別に、定列 $\{a\}_{k=1}^{\infty} = a, a, a, \dots$ を定義列とする超個体、すなわち個体 a の超準化 $*a$ を、はじめの個体 a と同一視する。すなわち、 $a := (a, a, a, \dots)$ と定義する。この結果、対象空間の中でも基底空間の場合に限って、対象空間とその超準化の間に包含関係

$$H \subseteq *H$$

が成り立つ。超基底空間 $*H$ は、個体の集合 H をその一部として含み、また、このあと定義される $*\mathfrak{P}$, $*\mathfrak{F}$ による操作を受けることがないので、理論 $*\mathcal{M}$ における個体の集合とみなすことができる。

(4) 一般超集合

$\mathcal{O} := \mathfrak{P}(\Psi)$ (Ψ : 対象空間) の超準化 ———

すでに Ψ の超準化 $*\Psi$ が定義されているものとする [帰納法の仮定]

今、任意に $\mathcal{A} \in *(\mathfrak{P}(\Psi))$ を $\mathcal{A} := (A_k)_{k=1}^{\infty}$ ($A_k \in \mathfrak{P}(\Psi)$ ($k \in \mathbf{N}$))、任意に $\psi \in *\Psi$ を $\psi := (q_k)_{k=1}^{\infty}$ ($q_k \in \Psi$ ($k \in \mathbf{N}$)) ととる。そして ψ と $\mathcal{A}$ の間の所属関係 $\in$ を、

$$(\in)_{\mathfrak{P}} \quad \psi \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \langle q_k \in A_k \rangle_k$$

と定義する。すると $(\in)_{\mathfrak{P}}$ に加え、 $A_k \subseteq \Psi$ ($k \in \mathbf{N}$) という事実および帰納法の仮定から、 $\psi \in \mathcal{A} \Rightarrow \langle q_k \in A_k \rangle_k \Rightarrow \langle q_k \in \Psi \rangle_k \Rightarrow \psi \in *\Psi$ という関連が成立する。こうして $\mathcal{A} \subseteq *\Psi$ が導かれるから、

$$((*\mathfrak{P})) \quad \mathcal{A} \in *(\mathfrak{P}(\Psi)) \Rightarrow \mathcal{A} \subseteq *\Psi$$

という関連が成立する。すなわち、超集合空間 $*(\mathfrak{P}(\Psi))$ の元である 一般超集合 $\mathcal{A}$ は、確

かに、 $*M$ における一般集合の一つとなる。

なお、 $A \in \mathfrak{P}(\Psi)$ であるとき、定列 $A, A, A, \dots$ を定義列とする特別な一般超集合を一般集合 A の超準化と呼び、 $*A$ と書く。すなわち $*A := (A)_{k=1}^{\infty} = (A, A, A, \dots)$ と定義する。これについては、 $(\in)_{\mathfrak{P}}$ により

$$\psi \in *A \Leftrightarrow \langle q_k \in A \rangle_k$$

が成り立つから、 $*A$ とはつまり、‘ A 内を動く対象がつくる超対象の全体’である。

さらに、一般集合の超準化の中でも、特に個体集合の超準化の場合に限っては、つぎの事実が成り立つ。すなわち、

□□ 補題〔個体集合の超準化〕

H : 基底空間 かつ $H \supseteq A$: 個体集合 とすると、

- (1) $*A = A \Leftrightarrow A$: 有限集合
- (2) $*A \supsetneq A \Leftrightarrow A$: 無限集合
- (3) $*A \cap H = A$

が成り立つ

証明 (1) $\Leftarrow$: $\rho = (r_k)_{k=1}^{\infty}$ と $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ に関し、 $\rho \in *A$ が成り立つものと仮定する。 $\langle r_k \in A \rangle_k$ したがって $\langle r_k = a_1 \text{ または } \dots \text{ または } r_k = a_n \rangle_k$ が成り立つことになるから、超フィルターの排中性の系の補題 2¹¹ により、 $\langle r_k = a_1 \rangle_k$ または $\dots$ または $\langle r_k = a_n \rangle_k$ を得る。このこと ‘ $\rho = a_1$ または $\dots$ または $\rho = a_n$ ’ より、 $\rho \in A$ が導かれる。

(2) $\Leftarrow$: A の元の列 $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ を、すべて互いに異なる r_k を選んでとることができる。超個体 $\rho := (r_k)_{k=1}^{\infty}$ は $(\in)_{\mathfrak{P}}$ により $\rho \in *A$ をみたすが、仮に、これが $\rho \in A$ をもみたすとする。すると、 $\exists a \in A$ $\rho = a$ が成り立つことになるから、 $\langle r_k = a \rangle_k$ を得る。ところが、 $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ のとり方から見て $\{k \in \mathbb{N} \mid r_k = a\}$ は高々 1 点でしかなく、超フィルターの無限性に反する結果となる。

(3) $\Leftarrow$: 略。

□

有限集合 $S := \{A_1, \dots, A_n\}$ が一般集合である場合、その超準化 $*S = \{*A_1, \dots, *A_n\}$ はひきつづき有限集合である。しかし、個体集合の場合とちがって、 $S \subseteq *S$ は成り立たない。

(5) 一般超写像

$\mathcal{O} := \mathfrak{F}(\Sigma, \Theta)$ (Σ, Θ : 対象空間) の超準化 ——

すでに Σ, Θ の超準化 $*\Sigma, *\Theta$ 、および $\mathfrak{P}(\Sigma), \mathfrak{P}(\Theta)$ の超準化 $*(\mathfrak{P}(\Sigma)), *(\mathfrak{P}(\Theta))$ が定義されているものとする〔帰納法の仮定〕

今、任意に $\varphi \in {}^*(\mathfrak{F}(\Sigma, \Theta))$ を、 $\varphi := (f_k)_{k=1}^\infty$ ととる(ここで $f_k \in \mathfrak{F}(\Sigma, \Theta)$ とする。それゆえ $\exists S_k \in \mathfrak{P}(\Sigma) \exists T_k \in \mathfrak{P}(\Theta) f_k: S_k \rightarrow T_k$ 全射 ($k \in \mathbb{N}$) が成り立つ)。まず、 $\tilde{\Sigma} := (S_k)_{k=1}^\infty, \tilde{\Theta} := (T_k)_{k=1}^\infty$ とおくと、帰納法の仮定により $\tilde{\Sigma} \in {}^*(\mathfrak{P}(\Sigma)), \tilde{\Theta} \in {}^*(\mathfrak{P}(\Theta))$ が成り立つ。したがって、 $({}^*\mathfrak{P})$ により $\tilde{\Sigma} \subseteq {}^*\Sigma, \tilde{\Theta} \subseteq {}^*\Theta$ を得る。

そこで、任意の対象 $\sigma := (s_k)_{k=1}^\infty \in \tilde{\Sigma}$ と $\theta := (t_k)_{k=1}^\infty \in \tilde{\Theta}$ に関する写像 φ の作用を、
 $(: \rightarrow)_{\mathfrak{F}} \quad \varphi(\sigma) = \theta \Leftrightarrow \langle f_k(s_k) = t_k \rangle_k$

と定義する。この φ については、 f_k ($k \in \mathbb{N}$) の性質をうけ継いで

$$\varphi: \tilde{\Sigma} \rightarrow \tilde{\Theta} \text{ 全射}$$

が成り立つ。それゆえ、

$$({}^*\mathfrak{F}) \quad \varphi \in {}^*(\mathfrak{F}(\Sigma, \Theta)) \Rightarrow \exists \tilde{\Sigma} \subseteq {}^*\Sigma, \exists \tilde{\Theta} \subseteq {}^*\Theta \quad \varphi: \tilde{\Sigma} \rightarrow \tilde{\Theta} \text{ 全射}$$

という関連が成立する。こうして 超写像空間 ${}^*(\mathfrak{F}(\Sigma, \Theta))$ の元である 一般超写像 φ は確かに、 ${}^*\Sigma$ を始集合、 ${}^*\Theta$ を終集合とする写像、すなわち ${}^*\mathcal{M}$ における一般写像の一つとなる。

なお、 $f \in \mathfrak{F}(\Sigma, \Theta)$ であるとき、定列 $f, f, f, \dots$ を定義列とする特別な一般超写像を、一般写像 f の超準化と呼んで $*f$ と書く。すなわち $*f := (f)_{k=1}^\infty = (f, f, f, \dots)$ と定義する。

さらに、一般写像の超準化の中でも特に個体写像 f の超準化 $*f$ の場合に限っては、つぎの事実が成り立つ。すなわち、

□□ 補題〔個体間の写像の超準化〕

H_i, H_j : 基底空間 かつ $A \subseteq H_i, B \subseteq H_j \quad f: A \rightarrow B$ 全射

とするとき、 $*f: {}^*A \rightarrow {}^*B$ 全射 について

$$\left\{ \begin{array}{ll} (1) & *f|_A = f \\ (2) & \text{Domain } *f = {}^*(\text{Domain } f) \\ (3) & \text{Image } *f = {}^*(\text{Image } f) \\ (4) & \text{Graph } *f = {}^*(\text{Graph } f) \end{array} \right.$$

が成り立つ

(6) 混合カテゴリー型理論の場合

1) 数学理論 $\mathcal{M}$ によっては、

$$L := \{ (f, A) \in \mathfrak{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \times \mathfrak{P}(\mathbf{R}) \mid f(A): \text{コンパクトな集合} \}$$

のような集合をあつかう。ここで、集合 Σ, Θ に対する操作 $\times$ は

$$(x) \quad r \in \Sigma \times \Theta \Leftrightarrow \exists s \in \Sigma \exists t \in \Theta \quad r = (s, t) \quad 's \text{ と } t \text{ の対}'$$

と定義されている。L のような対象は、基底空間、集合空間、写像空間のどれにもおさまらないので、新たな対象空間として、これら対象空間相互の直積を加える必要がある。このような数学理論を仮に“混合カテゴリー型理論”と呼び、その他の、基底空間、集合空間、写像空間相互の直積を含まない理論を“単純カテゴリー型理論”と呼ぶことにする。

なお、その際、基底空間どうしの直積であれば、はじめにそれを基底空間の一つに追加しておくことができる。さらに、集合空間どうしの直積、写像空間どうしの直積の場合も、

$$\mathfrak{P}(\Psi_1) \times \mathfrak{P}(\Psi_2) \subset \mathfrak{P}(\Psi_1 \times \Psi_2)$$

$$\mathfrak{F}(\Sigma_1, \Theta_1) \times \mathfrak{F}(\Sigma_2, \Theta_2) \subset \mathfrak{F}(\Sigma_1 \times \Sigma_2, \Theta_1 \times \Theta_2)$$

という同一視が可能であるから、対象空間の直積を考えるのは、基底空間、集合空間、写像空間というタイプが異なる対象空間どうしの直積に限定することもできる。

以上のことから、基底空間、集合空間、写像空間相互の直積を、新たなタイプの対象空間と考える。具体的には、対象空間の定義として、これまでの (i), (ii), (iii), (iv) に、つぎの (iii)' を加える¹²。

(iii)' Σ と Θ が対象空間であるとき、 $\Sigma \times \Theta$ もまた対象空間である

今後、対象空間のうち最後にほどこした操作が直積 $\times$ であるものを“積対象空間”と呼び、その元を“対対象”と呼ぶ。こうして、拡張された定義により、混合カテゴリー型理論における対象空間は、

$$\text{対象空間} = \left\{ \begin{array}{l} \text{基底空間} \\ \text{集合空間} \\ \text{写像空間} \\ \text{積対象空間} \end{array} \right.$$

の4種類に分かれる。また、それぞれに属する対象を“個体”，“一般集合”，“一般写像”，さらに“対対象”と呼ぶことにする。

先の一般集合 L の場合、L が属する“ $\mathfrak{P}\mathfrak{F}\times$ カテゴリー”は

$$C(\mathbf{R}, \mathbf{R}, \mathbf{R}; \mathfrak{P}, \mathfrak{F}, \times) := \mathfrak{P}(\mathfrak{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \times \mathfrak{P}(\mathbf{R}))$$

となる。

2) 積対象空間の超準化における‘ $\mathfrak{P}\mathfrak{F}\times$ カテゴリーの復活’は、つぎのように行われる。

$\Theta := \Sigma \times \Theta$ (Σ, Θ : 対象空間) の超準化 ——

すでに Σ, Θ の超準化 $*\Sigma, *\Theta$ が定義されているものとする〔帰納法の仮定〕

今、任意に $\rho \in {}^*(\Sigma \times \Theta)$ を、 $\rho := (r_k)_{k=1}^\infty$ ($r_k \in \Sigma \times \Theta$ ($k \in \mathbf{N}$)) ととる。すると $\exists s_k \in \Sigma \exists t_k \in \Theta$ $r_k = (s_k, t_k)$ ($k \in \mathbf{N}$) が成り立つが、 $\sigma := (s_k)_{k=1}^\infty$, $\theta := (t_k)_{k=1}^\infty$ とおくと、帰納法の仮定から $\sigma \in {}^*\Sigma$, $\theta \in {}^*\Theta$ が導かれる。そこで、 σ と θ の対対象 ρ を

$$((,))_{\times} \quad \rho = (\sigma, \theta) \Leftrightarrow \langle r_k = (s_k, t_k) \rangle_k$$

と定義する。この結果、

$$((\times)) \quad \rho \in {}^*(\Sigma \times \Theta) \Rightarrow \exists \sigma \in {}^*\Sigma \exists \theta \in {}^*\Theta \quad \rho = (\sigma, \theta)$$

という関連を得る。したがって、超積対象空間 ${}^*(\Sigma \times \Theta)$ の元である超対対象 ρ は、確かに、混合カテゴリー型超準数学理論 ${}^*\mathcal{M}$ における対対象の一つとなる。

ところで、 $((\times))$ は ${}^*(\Sigma \times \Theta) \subseteq {}^*\Sigma \times {}^*\Theta$ を意味するが、この逆も $\rho = (\sigma, \theta)$ ($\sigma \in {}^*\Sigma$, $\theta \in {}^*\Theta$) を仮定として、つぎのように証明される。まず、それぞれの定義列に関して $\langle r_k = (s_k, t_k) \rangle_k$ ($s_k \in \Sigma$, $t_k \in \Theta$) が成り立つが、それは $\langle r_k \in \Sigma \times \Theta \rangle_k$ 、したがって $\rho \in {}^*(\Sigma \times \Theta)$ を導く。

こうして $((\times))$ を、簡単に

$$((\times))' \quad {}^*(\Sigma \times \Theta) = {}^*\Sigma \times {}^*\Theta$$

と書くことができる。 $((\times))'$ に見るように、直積空間の超準化は超準化された空間どうしの通常の意味での直積であるから、操作 $\times$ の超準化 ${}^*\times$ も、 $*$ を省略して単に $\times$ と書くことにする。たとえば $\mathfrak{F}(\mathbf{N}, \mathfrak{P}(\mathbf{R})) \times \mathbf{N}$ の超準化は、つぎの通り行なわれる。

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{N} \Rightarrow {}^*\mathbf{N} & \xrightarrow{{}^*\mathfrak{F}} & {}^*\mathfrak{F}({}^*\mathbf{N}, {}^*\mathfrak{P}({}^*\mathbf{R})) \xrightarrow{\times} {}^*\mathfrak{F}({}^*\mathbf{N}, {}^*\mathfrak{P}({}^*\mathbf{R})) \times {}^*\mathbf{N} \\ \mathbf{R} \Rightarrow {}^*\mathbf{R} \Rightarrow {}^*\mathfrak{P}({}^*\mathbf{R}) & \xrightarrow{{}^*\mathfrak{F}} & \\ \mathbf{N} \Rightarrow {}^*\mathbf{N} & \xrightarrow{\times} & \end{array}$$

ここで ${}^*\mathfrak{P}({}^*\mathbf{R}) := {}^*(\mathfrak{P}(\mathbf{R}))$,
 ${}^*\mathfrak{F}({}^*\mathbf{N}, {}^*\mathfrak{P}({}^*\mathbf{R})) := {}^*(\mathfrak{F}(\mathbf{N}, \mathfrak{P}(\mathbf{R})))$,
 ${}^*\mathfrak{F}({}^*\mathbf{N}, {}^*\mathfrak{P}({}^*\mathbf{R})) \times {}^*\mathbf{N} := {}^*(\mathfrak{F}(\mathbf{N}, \mathfrak{P}(\mathbf{R})) \times \mathbf{N})$.

§ 5. 超基底空間 ${}^*\mathbf{N}$ および ${}^*\mathbf{R}$

(1) 超実数体系 ${}^*\mathbf{R}$

各実数列が、それぞれに超実数を定めている。ただし、 $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ が定める超実数を α 、 $\{b_k\}_{k=1}^\infty$ が定める超実数を β と書くとき、

$$(=\mathbf{R}) \quad \alpha = \beta \Leftrightarrow \langle a_k = b_k \rangle_k$$

により等号 $=$ が定まっている。有限集合は超フィルターに属さないから、有限個の番号でちがっていても他のすべての番号で一致する2つの実数列は、同じ超実数を定める。このとき、超実数 $(r, r, r, \dots)$ はもとの実数と同一視し、単に r と書く。また、超自然数 $(1, 2, 3, \dots)$ は新たな記号を採用して ω と書く。

すると、他の超実数もみな ω と実数あるいは実数関数を用いて表示することができ、たとえば $3\omega + 1 = (4, 7, 10, 13, \dots)$, $\frac{1}{\omega} = \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right)$, $\sin 2\pi\omega = (\sin 2\pi, \sin 4\pi, \sin 6\pi, \sin 8\pi, \dots)$ などと書かれる。

こうして定義されたすべての超実数の集合が ${}^*\mathbf{R}$ であるが、超実数間の $=$ の定義にしたがい、 ω といかなる実数 r の間にも $\omega = r$ は成立しない。それゆえ $\omega \notin \mathbf{R}$ 、したがって $\mathbf{R} \subset {}^*\mathbf{R}$ が導かれる。

ところで、超実数間の順序関係 $\leq$ 、代数演算 $+$, $-$, $\times$, $\div$ などは、定義実数列を用いることによって、

$$\begin{aligned} (\leq)_{\mathbf{R}} \quad \alpha \leq \beta &\Leftrightarrow \langle a_k \leq b_k \rangle_k \\ (+)_{\mathbf{R}} \quad \alpha + \beta = \gamma &\Leftrightarrow \langle a_k + b_k = c_k \rangle_k \\ (-)_{\mathbf{R}} \quad \alpha - \beta = \gamma &\Leftrightarrow \langle a_k - b_k = c_k \rangle_k \\ (\times)_{\mathbf{R}} \quad \alpha \times \beta = \gamma &\Leftrightarrow \langle a_k \times b_k = c_k \rangle_k \\ (\div)_{\mathbf{R}} \quad \alpha \div \beta = \gamma &\Leftrightarrow \langle a_k \div b_k = c_k \rangle_k \end{aligned}$$

と簡明に定義することができる。ここで、 $\alpha := (a_k)_{k=1}^\infty$, $\beta := (b_k)_{k=1}^\infty$, $\gamma := (c_k)_{k=1}^\infty$ とする。すぐにわかる通り、これら ${}^*\mathbf{R}$ における関係ならびに演算は、 $\mathbf{R}$ におけるそれら関係ならびに演算の ${}^*\mathbf{R}$ への拡張となっている。つまり、 $\mathbf{R}$ 上に限れば、これまで通りである。

□□ 命題 ${}^*\mathbf{R}$ は全順序集合である

証明 $\alpha := (a_k)_{k=1}^\infty$, $\beta := (b_k)_{k=1}^\infty$ に対し、 $H := \{k \in \mathbf{N} \mid a_k < b_k\}$, $L := \{k \in \mathbf{N} \mid a_k = b_k\}$, $M := \{k \in \mathbf{N} \mid a_k > b_k\}$ とおくと、 $\mathbf{R}$ が全順序集合であることから $H \cup L \cup M = \mathbf{N}$ が、同時にまた $H \cap L = \emptyset$, $L \cap M = \emptyset$, $M \cap H = \emptyset$ が、それぞれ成り立つ。そこで超フィルターの排中性の系の補題 1¹³を用いると、 $H \in \mathcal{U}$ または $L \in \mathcal{U}$ または $M \in \mathcal{U}$ を得る。すなわち、 $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$, $\alpha > \beta$ のいずれか一つを得る。 □

(2) “無限大” と “無限小”

$\mathbf{R}$ 上の順序関係を ${}^*\mathbf{R}$ 上へ拡張した結果、すべての超実数は大きさにより3つに分かれる。まず、超実数 α が無限大である ($\alpha < -\infty$ もしくは $\infty < \alpha$) というのは、

$$\begin{aligned} \alpha < -\infty &\Leftrightarrow \forall m \in \mathbf{N} \quad \alpha < -m \\ \infty < \alpha &\Leftrightarrow \forall m \in \mathbf{N} \quad m < \alpha \end{aligned}$$

と定義される。定義 $(\leq)_{\mathbf{R}}$ に照らしてわかるように、 ω は無限大自然数の一例である。これと反対に、超実数 α が無限小である $(\alpha \approx 0)$ というのは、

$$\alpha \approx 0 \Leftrightarrow \forall m \in \mathbf{N} \left[-\frac{1}{m} < \alpha < \frac{1}{m} \right]$$

と定義される。のこり、無限大でも無限小でもない超実数 α を有限大であるといい、それを

$$-\infty < \alpha << 0 \quad \text{あるいは} \quad 0 << \alpha < \infty$$

と表わす。 $<<$ は無限小的ではなく、目に見えて、つまり有限大的に $<$ であることを示す。0 以外の実数は超実数の一員と見たときすべて有限大であり、有限大の数の逆数は再び有限大である。さらに、0 以外の無限小超実数は、無限大超実数と互いに逆数の関係にある。

なお、 $\alpha - \beta \approx 0$ のとき $\alpha \approx \beta$ と書いて、 α と β は“無限小的に近い”という。そして、超実数 ρ に対し

$$\begin{aligned} \text{halo}(\rho) &:= \{ \alpha \in {}^*\mathbf{R} \mid \alpha - \rho \approx 0 \} \\ \text{galaxy}(\rho) &:= \{ \alpha \in {}^*\mathbf{R} \mid -\infty < \alpha - \rho < \infty \} \end{aligned}$$

と定義し、さらに

$$\begin{aligned} \text{monad} &:= \text{halo}(0) \\ \text{galaxy} &:= \text{galaxy}(0) \end{aligned}$$

と書く。

また、特に超実数 ρ と実数 r の間に $\rho \approx r$ が成り立つとき、 r を ρ の“実数部”と呼び $(\rho)_0 = r$ と書く。すると、つぎの基本的事実が成り立つ。

□□ 命題 [実数部定理]

有限超実数は、必ずその実数部をもつ。すなわち、 $\rho \in {}^*\mathbf{R}$ とするとき、

$$-\infty < \rho < \infty \Leftrightarrow \exists r \in \mathbf{R} \quad (\rho)_0 = r$$

が成り立つ

実数部定理は、

$$\begin{cases} \text{galaxy} = \bigcup_{r \in \mathbf{R}} \text{halo}(r) \\ \text{halo}(r) \cap \text{halo}(s) = \phi \quad (r \neq s \text{ のとき}). \end{cases}$$

すなわち

『ギャラクシー内のすべてのハローが、1つずつその実数部をもつ』

といい換えられる。なお、

$$\text{halo}(r) = r + \text{monad} \quad (r \in \mathbf{R})$$

と書くことができるから、

galaxy $\cong \mathbf{R} \times \text{monad}$ ‘実数部と無限小部への分解’

が成立する。

実数部定理を用いると、超準世界で得られた命題が、ふつうの命題として通常の数学世界に投影される。具体的にいえば、 ${}^*\mathbf{R}$ における命題 $\tilde{Q}$ の記述中の超実数がすべて有限である場合、それらに対する実数部をとり、記述中の $\approx$ を $=$ に置き換えることによって、 $\mathbf{R}$ 上の新たな命題 Q を得る。

(3) 超自然数体系 ${}^*\mathbf{N}$ と超列

実数の部分集合 $\mathbf{N}$ の超準化である超自然数体系 ${}^*\mathbf{N}$ について、つぎの事実が成り立つ。

□□ 命題 ${}^*\mathbf{N} - \mathbf{N} = \{\nu \in {}^*\mathbf{N} \mid \infty < \nu\}$

証明: $\nu \in {}^*\mathbf{N} - \mathbf{N}$ とする。仮に ν が有限、すなわち $\nu \leq m$ ($\exists m \in \mathbf{N}$) だとすると、 $\langle n_k \leq m \rangle_k$ が成り立つことになる。それは $\langle n_k = 1$ または $\dots$ または $n_k = m \rangle_k$ を意味するが、超フィルターの排中性の系の補題 2¹⁴ によれば、これより $\nu = 1$ または $\dots$ または $\nu = m$ が得られる。そして、このことは $\nu \in \mathbf{N}$ を導き、矛盾となる。 □

超自然数の全体は、これまでの有限自然数につづいて、大きさの順に

1, 2, 3, 4, 5, ……………, $\omega - 1$, ω , $\omega + 1$, ……………, 2ω ,
……………, 3ω , ……………, ω^2 , ……………

と並んでいる。

${}^*\mathbf{N} - \mathbf{N} \neq \emptyset$ であったが、‘無限大の数’ということから考えて、 ${}^*\mathbf{N} - \mathbf{N}$ に最小数は存在しない。それゆえ、 ${}^*\mathbf{N}$ はもはや整列集合でない。そこで今後、超自然数の全体、あるいはそれによって番号付けられた集合のことを、“超列”と呼ぶことにする。

たとえば、写像 $\tilde{\sigma}: {}^*\mathbf{N} \rightarrow {}^*\mathbf{R}$ が与えられたとき、 $\alpha_\nu := \tilde{\sigma}(\nu)$ ($\nu \in {}^*\mathbf{N}$) とおけば、つぎのような超実数の超列を得る。

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \dots, \alpha_{\omega-1}, \alpha_\omega, \alpha_{\omega+1}, \dots, \alpha_{2\omega},$
 $\dots, \alpha_{3\omega}, \dots, \alpha_{\omega^2}, \dots$

はじめに実数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ があるとき、 $\sigma(n) := a_n$ とおくと、写像 $\sigma: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$ が定義される。そこで σ の超準化 ${}^*\sigma: {}^*\mathbf{N} \rightarrow {}^*\mathbf{R}$ を用いれば、超実数の超列を、すなわち超準化された実数列を、

$$\begin{aligned} \{a_\nu\}_{\nu \in {}^*\mathbf{N}} &:= *(\{a_n\}_{n=1}^\infty) & \text{ここで } \nu &:= (n_k)_{k=1}^\infty \\ & & \text{かつ } a_\nu &:= {}^*\sigma(\nu) = (\sigma(n_k))_{k=1}^\infty = (a_{n_k})_{k=1}^\infty \end{aligned}$$

と定義することができる。

なお、 $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ を定義列とする超実数が ρ であるとき、超列 $\{r_\nu\}_{\nu \in {}^*\mathbf{N}} = {}^*(\{r_k\}_{k=1}^{\infty})$ の ω 番目には、 ρ 自身が並んでいる。すなわち、

$$\rho := (r_k)_{k=1}^{\infty} \Rightarrow r_\omega = \rho$$

という関連がある。このことは、他の一般の超対象 $\bar{o} \in {}^*\mathcal{O}$ に関してもいえる。すなわち、

□□補題 いかなる超対象とその定義列の間にも、一般に、つぎの関連が成立する

$$\bar{o} := (o_k)_{k=1}^{\infty} \ (o_k \in \mathcal{O}) \Rightarrow o_\omega = \bar{o} \in {}^*\mathcal{O}$$

この補題によれば、すべての超対象 $\bar{o}$ は自然数変数関数 $\sigma(k) := o_k \ (k \in \mathbf{N})$ と ω とを用いて、 ${}^*\sigma(\omega)$ と表記される¹⁵。

(4) $\mathbf{R}$ 上の記述に対する超準的解釈

実数集合 A に対し、 A 上の点列がつくる超実数の全体を *A と書いて A の超準化と呼んだ。また、実数関数 $f: A \rightarrow B$ に対し、超実数関数 ${}^*f: {}^*A \rightarrow {}^*B$ を、

$${}^*f(\alpha) = \beta \Leftrightarrow \langle f(a_k) = b_k \rangle_k \quad \text{ここで } \beta = (b_k)_{k=1}^{\infty} \text{ とする}$$

と定義し、 f の超準化と呼んだ。このとき、集合 *A は A の、関数 ${}^*f: {}^*A \rightarrow {}^*B$ は $f: A \rightarrow B$ の、それぞれ拡張となっている¹⁶。

ところで、 $\mathbf{R}$ における命題 $\mathcal{P}$ が実数 $a_1, \dots, a_l$ と実数集合 $A_1, \dots, A_m$ 、さらに実数関数 $f_1, \dots, f_n$ を用いて記述されているとき、 $\mathcal{P}$ の記述形式を Q として

$$\mathcal{P} := Q(a_1, \dots, a_l; A_1, \dots, A_m; f_1, \dots, f_n)$$

と書くことができる。そこで、この命題 $\mathcal{P}$ を ${}^*\mathbf{R}$ における命題として理解するには、個体はそのままにして、記述中のすべての集合と関数を、それらの超準化に置き換えて読めばよい。そのように拡張解釈して読みとられた命題を、“命題 $\mathcal{P}$ の超準解釈 ${}^*\mathcal{P}$ ” と呼び、 $\mathcal{P}$ と同じ記述形式 Q を用いて

$${}^*\mathcal{P} := Q(a_1, \dots, a_l; {}^*A_1, \dots, {}^*A_m; {}^*f_1, \dots, {}^*f_n)$$

と書く。なお、実数については ${}^*a_1 = a_1, \dots, {}^*a_l = a_l$ が成り立っている。

超準解釈された命題 ${}^*\mathcal{P}$ の意味は、定義 $(=)_{\mathcal{O}}, (\in)_{\mathcal{O}}, (\in)_{\mathfrak{P}}, (: \rightarrow)_{\mathfrak{F}}, ((,))_{\times}, (=)_{\mathbf{R}}, (\leq)_{\mathbf{R}}, (+)_{\mathbf{R}}, (-)_{\mathbf{R}}, (\times)_{\mathbf{R}}, (\div)_{\mathbf{R}}$ を見ればわかるように、命題 $\mathcal{P}$ が $\mathbf{R}$ においてもつ意味と同じ意味に理解することができる。

つぎに、命題ではなく、実数変数 y に関する記述

$$\mathcal{R}(y) := \mathcal{S}(y: a_1, \dots, a_l; A_1, \dots, A_m; f_1, \dots, f_n) \quad \text{変数 } y \in \mathbf{R}$$

が与えられた場合も、記述形式 $\mathcal{S}$ をそのまま用いて、 $\mathcal{R}(y)$ の超準解釈 ${}^*\mathcal{R}(\eta)$ を記述することができる。具体的には、超実数変数 η に関する記述として

$${}^*\mathcal{R}(\eta) := \mathcal{S}(\eta : a_1, \dots, a_l; {}^*A_1, \dots, {}^*A_m; {}^*f_1, \dots, {}^*f_n) \quad \text{変数 } \eta \in {}^*\mathbf{R}$$

と定義すればよい。

□ 例 すべての素数の集合 $\mathbf{P} := \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$ と自然数 l に関し、

$$\mathcal{P} : l \in \{1\} \cup \mathbf{P} \Leftrightarrow \forall m \in \mathbf{N} \forall n \in \mathbf{N} [l = m \times n \Rightarrow m = 1 \text{ または } n = 1]$$

は $\mathbf{R}$ において真なる命題である。いい換えれば、この命題は $\mathbf{R}$ において集合 $\mathbf{P}$ を定義している。この命題を超準的に解釈すると、

$${}^*\mathcal{P} : \lambda \in \{1\} \cup {}^*\mathbf{P} \Leftrightarrow \forall \mu \in {}^*\mathbf{N} \forall \nu \in {}^*\mathbf{N} [\lambda = \mu \times \nu \Rightarrow \mu = 1 \text{ または } \nu = 1]$$

に変わる。この超準的命題はひきつづき ${}^*\mathbf{R}$ においても真である。いい換えれば、この命題は ${}^*\mathbf{R}$ において集合 ${}^*\mathbf{P}$ を定義している。

また、

$$\mathcal{R}(y) : \left[1 + 2 + 3 + \dots + y = \frac{y(y+1)}{2} \right] \quad (y \in \mathbf{N})$$

という記述の場合、その超準的解釈は、

$${}^*\mathcal{R}(\eta) : \left[1 + 2 + 3 + \dots \dots + \eta = \frac{\eta(\eta+1)}{2} \right] \quad (\eta \in {}^*\mathbf{N})$$

であり、命題 $\forall y \in \mathbf{N} \mathcal{R}(y)$ が $\mathbf{N}$ において真であるのと同じく、 $\forall \eta \in {}^*\mathbf{N} {}^*\mathcal{R}(\eta)$ もまた ${}^*\mathbf{N}$ において真である¹⁷。 □

§ 6. 内的対象と内的定義

(1) 内的な対象と外的な対象

超準解析の本質的な特徴はその二重性にある。超準的な対象、すなわち超準的数学世界における個体、一般集合、一般写像、対対象のうち超対象空間に属するもの $\bar{o}$ を、内的な対象 (internal object) と呼ぶ。これ以外の超対象、すなわち超準世界における対象ではあるが超対象空間に属さないものを、外的な対象 (external object) と呼ぶ。

すると、超対象空間の定義¹⁸からわかる通り、

内的な対象 $\Leftrightarrow$ 定義列をもつ超準的対象

外的な対象 $\Leftrightarrow$ 定義列をもたない超準的対象

と特徴づけられる。すべての超個体ははじめに個体列によって定義されたから、超個体の場合、内的でない個体というものは存在しない。これに対し、超準世界における集合や写像の

なかには、つぎの例に見るように、集合列や写像列を用いて指定することのできないものも存在し、それらは外的な対象となる。

最も簡単な内的集合（内集合）および内的写像（内写像）の例は、有限な個体集合および有限な個体集合間の写像である¹⁹。

□例 $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ はいかなる集合列によっても定義できず、外的な集合となる²⁰。また、増大集合列 $\{1, 2, 3, \dots, k\} (k \in \mathbf{N})$ によって定義される内的な集合は無限集合 $\{1, 2, 3, \dots, \omega\}$ であり、 ω 以下の連続した超自然数の全体で構成される。

これら、内的な集合と外的な集合の間に、包含関係 $\{1, 2, 3, \dots, k\} \subset \{1, 2, 3, \dots\} \subset \{1, 2, 3, \dots, \omega\}$ が成り立つ。□

□例 ${}^*\mathbf{R}$ において、不等式 $\omega < \xi \leq 2\omega + 1$ や $\infty < \xi \leq \omega$ は半開区間 $(\omega, 2\omega + 1]$ や $(\infty, \omega]$ を定義する。しかし、 $(\infty, k]$ という形の集合が $\mathbf{R}$ 内には存在しないため、 $(\infty, \omega]$ を $\mathbf{R}$ 上の集合列によってとらえることはできない。つまり、 $(\infty, \omega]$ は外的な集合である。他方、集合列 $(k, 2k + 1] (k \in \mathbf{N})$ によって定義される $(\omega, 2\omega + 1]$ は、ふつうの数をまったく含まない内的集合となる。□

(2) 内的な定義

1) 内的な対象間には、これまで定義してきた $(=)_{\mathcal{O}}, (\in)_{\mathcal{O}}, (\in)_{\mathfrak{P}}, (:\rightarrow)_{\mathfrak{F}}, ((,))_{\times}$ さらに $(=)_{\mathbf{R}}, (\leq)_{\mathbf{R}}, (+)_{\mathbf{R}}, (-)_{\mathbf{R}}, (\times)_{\mathbf{R}}, (\div)_{\mathbf{R}}$ を見ればわかるように、定義列を用いる定義、いわば“内的な定義”が可能である。これらと同じように、数学的对象がもつ性質、数学的对象間の関連などといったものが、いずれも内的な定義によって、内的対象がもつ性質、内的対象間の関連へと拡張される。その際、内的に拡張された性質や関連の意味は、拡張前と同じ意味に理解することができる。

2) ここで、超集合空間 ${}^*(\mathfrak{P}(\Psi))$ におけるブール演算を、やはり内的に

$$(=)_{\mathfrak{P}} \quad \mathcal{A} = \mathcal{B} \Leftrightarrow \langle A_k = B_k \rangle_k$$

$$(\subseteq)_{\mathfrak{P}} \quad \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \Leftrightarrow \langle A_k \subseteq B_k \rangle_k$$

$$(\cap)_{\mathfrak{P}} \quad \psi \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \Leftrightarrow \langle q_k \in A_k \cap B_k \rangle_k$$

$$(\cup)_{\mathfrak{P}} \quad \psi \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \Leftrightarrow \langle q_k \in A_k \cup B_k \rangle_k$$

$$(\overline{})_{\mathfrak{P}} \quad \psi \in \overline{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \langle q_k \in \overline{A_k} \rangle_k$$

$$(\phi)_{\mathfrak{P}} \quad {}^*\phi = \phi$$

と定義する。ここで、 $\mathcal{A} := (A_k)_{k=1}^{\infty}$, $\mathcal{B} := (B_k)_{k=1}^{\infty}$, $\psi := (q_k)_{k=1}^{\infty}$ とする。すると、一般超集合 $\mathcal{A} \subseteq {}^*\Psi$, $\mathcal{B} \subseteq {}^*\Psi$ 間に定義された記号 $=, \subseteq, \cap, \cup, \overline{}$ 、さらに空集合 ϕ の意味は、超準化以前と変わらない。たとえば、

$$\begin{aligned}\psi \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B} &\Leftrightarrow \langle q_k \in A_k \cap B_k \rangle_k \Leftrightarrow \langle q_k \in A_k \text{ かつ } q_k \in B_k \rangle_k \\ &\Leftrightarrow \langle q_k \in A_k \rangle_k \text{ かつ } \langle q_k \in B_k \rangle_k \Leftrightarrow \psi \in \mathcal{A} \text{ かつ } \psi \in \mathcal{B}\end{aligned}$$

という連関をたどることができる。なお、3 番目の $\Leftrightarrow$ では超フィルターの排中性の系の 2 を用いた。

3) つづいて、一般超写像 $\varphi(\xi) := (f_k(x))_{k=1}^\infty$ と $\psi(\xi) := (g_k(x))_{k=1}^\infty$ の合成 $\circ$ を、

$$(\circ)_{\mathfrak{F}} \quad \eta = \psi \circ \varphi \Leftrightarrow \langle h_k = g_k \circ f_k \rangle_k \quad \text{ここで } \eta := (h_k)_{k=1}^\infty \text{ とする}$$

と、これまた内的に定義する。

一般超写像については、

$$\begin{aligned}\varphi: \Sigma \rightarrow \Theta \text{ 全射} &\Leftrightarrow \langle f_k: S_k \rightarrow T_k \text{ 全射} \rangle_k \\ \varphi: \Sigma \rightarrow \Theta \text{ 単射} &\Leftrightarrow \langle f_k: S_k \rightarrow T_k \text{ 単射} \rangle_k\end{aligned}$$

が成り立つ。つまり、写像にとっての全射や単射という性質は、超準化の前後で意味が変わらない。

4) 内的、外的の概念を用いると、 $(\langle * \mathfrak{P} \rangle), (\langle * \mathfrak{F} \rangle)$ は、必要十分条件の形に書きなおすことができる。すなわち、

$$\begin{aligned}\langle * \mathfrak{P} \rangle \quad \mathcal{A} \in (* \mathfrak{P}(\Psi)) &\Leftrightarrow \mathcal{A} \subseteq * \Psi \text{ かつ } \mathcal{A}: \text{内集合} \\ \langle * \mathfrak{F} \rangle \quad \varphi \in (* \mathfrak{F}(\Sigma, \Theta)) &\Leftrightarrow \exists \tilde{\Sigma} \subseteq * \Sigma, \exists \tilde{\Theta} \subseteq * \Theta \quad \varphi: \tilde{\Sigma} \rightarrow \tilde{\Theta} \text{ 全射} \\ &\text{かつ } \varphi: \text{内写像}\end{aligned}$$

が成立する。ここで、 $\langle * \mathfrak{P} \rangle, \langle * \mathfrak{F} \rangle$ とも $\Rightarrow$ は、 $(\langle * \mathfrak{P} \rangle), (\langle * \mathfrak{F} \rangle)$ に内的対象の定義を合わせて得られる。また $\Leftarrow$ は、 $\mathcal{A}$ や φ に定義列をとることによって確かめられる。

(3) 操作 $* \mathfrak{P}, * \mathfrak{F}, \times$ と $* \mathfrak{P} * \mathfrak{F} \times$ カテゴリー

すでに、これまで超積対象空間 $*(\mathcal{O}' \times \mathcal{O}'')$ を $*\mathcal{O}' \times *\mathcal{O}''$ と書いてきたが、これより超集合空間 $*(\mathfrak{P}(\mathcal{O}))$ を $* \mathfrak{P}(*\mathcal{O})$ 、超写像空間 $*(\mathfrak{F}(\mathcal{O}', \mathcal{O}''))$ を $* \mathfrak{F}(*\mathcal{O}', *\mathcal{O}'')$ と書くことにする。こうして定義された操作 $* \mathfrak{P}, * \mathfrak{F}$ を用いると、 $\langle * \mathfrak{P} \rangle, \langle * \mathfrak{F} \rangle$ は

$$\begin{aligned}\langle * \mathfrak{P} \rangle \quad \mathcal{A} \in * \mathfrak{P}(*\mathcal{O}) &\Leftrightarrow \mathcal{A} \in \mathfrak{P}(*\mathcal{O}) \text{ かつ } \mathcal{A}: \text{内集合} \\ \langle * \mathfrak{F} \rangle \quad \varphi \in * \mathfrak{F}(*\mathcal{O}', *\mathcal{O}'') &\Leftrightarrow \varphi \in \mathfrak{F}(*\mathcal{O}', *\mathcal{O}'') \text{ かつ } \varphi: \text{内写像}\end{aligned}$$

と書き換えることができる。

ただし、ここで $\mathfrak{P}(*\mathcal{O})$ は、 $*\mathcal{O}$ に対する通常の意味での冪集合 (したがって外的な部分集合をも含む) を表す。また、 $\mathfrak{F}(*\mathcal{O}', *\mathcal{O}'')$ は、 $*\mathcal{O}'$ から $*\mathcal{O}''$ への通常の意味での写像空間 (したがって外的な写像をも含む) を表す。

《 $\ast\mathfrak{P}$ 》, 《 $\ast\mathfrak{F}$ 》が示すように、 $\ast\mathfrak{P}$, $\ast\mathfrak{F}$ という操作は内的対象である $\ast\mathcal{O}$, $\ast\mathcal{O}'$, $\ast\mathcal{O}''$ から、内的対象である $\ast(\mathfrak{P}(\mathcal{O}))$, $\ast(\mathfrak{F}(\mathcal{O}', \mathcal{O}''))$ を生み出す。また、直積をとる操作 $\times$ も、内的対象である $\ast\mathcal{O}$, $\ast\mathcal{O}'$ から内的対象である $\ast\mathcal{O} \times \ast\mathcal{O}'$ をつくり出す。こうした操作を通して得られた各超対象空間 $\ast\mathcal{O}$ の組み立て方は、 $M+3$ 文字 $\ast H_1, \dots, \ast H_M, \ast\mathfrak{P}, \ast\mathfrak{F}, \times$ がつくる文字列として表示される。この文字列を一般に $C(\ast H_1, \dots, \ast H_M; \ast\mathfrak{P}, \ast\mathfrak{F}, \times)$ と書くことにすると、これは内的対象がそれぞれに属する “ $\ast\mathfrak{P} \ast\mathfrak{F} \times$ カテゴリー” を表示している。

重要なことは、操作 $\ast\mathfrak{P}, \ast\mathfrak{F}, \times$ の定義 $\ast\mathfrak{P}(\ast\mathcal{O}) := \ast(\mathfrak{P}(\mathcal{O}))$, $\ast\mathfrak{F}(\ast\mathcal{O}', \ast\mathcal{O}'') := \ast(\mathfrak{F}(\mathcal{O}', \mathcal{O}''))$, $\ast\mathcal{O}' \times \ast\mathcal{O}'' := \ast(\mathcal{O}' \times \mathcal{O}'')$ に見るように、

$$\begin{aligned} \text{対象空間 } \mathcal{O} \text{ の } \mathfrak{P}\mathfrak{F}\times \text{ カテゴリー} &= C(H_1, \dots, H_M; \mathfrak{P}, \mathfrak{F}, \times) \\ &\quad \updownarrow \\ \text{超対象空間 } \ast\mathcal{O} \text{ の } \ast\mathfrak{P} \ast\mathfrak{F} \times \text{ カテゴリー} &= C(\ast H_1, \dots, \ast H_M; \ast\mathfrak{P}, \ast\mathfrak{F}, \times) \end{aligned}$$

が成り立つことである。

注

- 1 具体的には、§ 4.(4) において定義される。
- 2 § 7.(1) 参照。
- 3 ここでは、おおむね、自然数や実数を表すにはアルファベット小文字を用い、超自然数や超実数を表すにはギリシャ文字小文字を用いる。
- 4 二重帰納法による構成。
- 5 § 5.(1) の命題を参照。
- 6 “実数列が指定する超実数とは何か？”をいえば、実数列の $\mathcal{U}$ に関する同値類、すなわち $\mathbf{R}$ の超冪の元のことである。こう見たとき、“定義列”とは超実数の代表元の一つのことである。
- 7 その存在は、Zornの補題を用いて証明される。
- 8 一般には、ここでの極大フィルターを超フィルター、ここでの超フィルターを非単項超フィルターと呼ぶことが多い。超フィルターとならない極大フィルターとは、ある自然数 l を含む集合の全体のことである。
- 9 有限集合の補集合のこと。その全体は1つのフィルターをなし、Fréchet フィルターと呼ばれる。超フィルターとは、Fréchet フィルターの極大化のことである。
- 10 このとき定義列 $\{o_k\}_{k=1}^\infty$ が “具体的に定義可能” でなければ、つまり各 o_k が番号 k に関して明示的に記述され、かつ、数値として一意的に求まる場合でなければ、同一の超実数に対する表示の多重性は、超実数の直観的理解の上での難点とはならない。
- 11 § 4.(1) における補題。
- 12 すべての対象空間は、 $\mathfrak{P}, \mathfrak{F}, \times$ による三重帰納法を用いて構成されることになる。
- 13 § 3.(3) における補題。
- 14 § 4.(1) における補題。
- 15 したがって、個別超準化法による超準化は、通常の数学的記号に2文字 $\ast$ と ω を付加した記号体系である。
- 16 § 4.(4) における補題および § 4.(5) における補題参照。なお、今後 $\ast\sigma(\omega)$ のように、変数が超実数とわかる場合には、しばしば $\ast$ を省略して $\sigma(\omega)$ などと書く。
- 17 § 8.(6) 数学的超帰納法参照。
- 18 § 4.(1) の $(\epsilon)_\mathcal{O}$ 参照。

- 19 § 4.(4) における補題の (1) 参照。
- 20 § 8.(1) において定理として証明される。