学位審査結果報告書

学位申請者: 須志田 隆道（学籍番号 T11D001）
学位の種類: 博士(理学)
論文題目: 葉序的な螺旋タイリングの幾何学（Geometry of Phyllotactic Spiral Tilings）

## 1. 論文内容の要旨

ひまわりの種や松笠などの植物の螺旋葉序が数理的な美しさを持つことは、古代ギリシアの時代から認識されていた。その数理的性質の本格的研究は、19 世紀前半の Bravais 兄弟を始めとする。地球上の植物の葉序螺旋の 90%以上は、螺旋(parastichy)の本数がフィボナッチ数となっている。フィボナッチ数は、黄金比と呼ばれる無理数 $(1+\sqrt{5})/2$ と深い関係を持ち、フィボナッチ数以外の葉序螺旋のほとんども、リュカ数列など、黄金比に由来する数列に属している。螺旋葉序の理論に無理数の回転角(divergence angle)の概念が導入されたのは 20 世紀のことであった。

葉序の数理を巡る最近の進展としては、まず幾何学的な記述の研究があり、次に、螺旋を生成する生物物理学的機構の研究がある。さらに、工学への応用および造形芸術への展開がある。

本研究の成果は、できる限り単純化された幾何学的モデルを構築して、葉序螺旋の組み合わせ的構造をパラメータ空間上で包括的に記述したことであり、それによって、植物学を始めとして各方面で利用されてきた葉序の分岐図に対して数学的な基礎理論を整備したことである。まず、葉序のパターンを、平面のタイル貼り(タイリング)の一般化として扱う。タイリングを記述する代数方程式のすべての解曲線を包括的に扱うために、相空間としては通常の平面に限らず、一点穴空き平面の被覆空間に一般化し、またその線形化として円筒モデルを扱う。螺旋については、最も対称性の高いものとして、円筒の場合は平行移動の対称性をもつ格子点列を扱い、平面の被覆空間の場合は相似変換の対称性をもつ対数螺旋格子点列を扱う。円筒格子ないし対数螺旋格子を母点集合とするボロノイ分割は、一般的には六角形タイリングであり、とくに退化形として四角形タイリングが得られる。また、対数螺旋格子を頂点集合とする四角形タイリングの退化形として三角形タイリングが得られる。本研究において、退化形のタイリングに対応するパラメータ集合が決定された。

三角形螺旋タイリングは、葉序的(opposed)タイリングと非葉序的(non-opposed)タイリングに分類される。円筒格子および螺旋格子に対するボロノイ四角形タイリングや葉序的三角形タイリングは、それぞれ異なる定義方程式をもつが、螺旋の本数はいずれの場合も回転角(divergence angle)の近似連分数で表され、パラメータ集合は互いに類似した組み合わせ構造をもっていることが示された。

ひまわりの種の数を増やすときの螺旋の本数の変化を考える問題は、まず回転角を固定

したうえで、対数螺旋タイリングであれば葉間比(plastochrone ratio)を 1 に近づける極限操作であり、円筒タイリングであれば葉間隔(葉間比の対数)を 0 に近づける極限操作であると考えられる。ボロノイ四角形タイリングにおいて回転角が有理数の場合は、この極限操作によってタイルが扁平となる。二次無理数はディオファンタス近似の意味で有理数から十分離れているため、二次無理数を回転角とするボロノイ四角形タイリングは、この極限操作によってタイルは扁平にならない。とくに、ほとんどの植物が採用しているように、最も有理数から離れている黄金比を回転角とする場合、ボロノイ四角形タイルの極限形状は正方形であることが示された。

位相空間論的な考察として、対数螺旋格子に対するボロノイ四角形タイリングおよび葉序的三角形タイリングを生成するパラメータ集合は、被覆空間の多重度を任意とすれば、全パラメータ空間の中で稠密部分集合であることが示された。一方で、非葉序的三角形タイリングのパラメータ集合は、多重度をひとつ指定しても、すでに全パラメータ空間の中で稠密部分集合である。このような一見奇妙な結果は、位相空間論においては珍しいことではない。

最後に、三角形螺旋タイリングの多くが折り紙で実現できることを示した。これにより、造形作家日詰明男氏の作品であるフィボナッチトルネードおよび折り紙フィボナッチトルネードを任意の回転角の三角形タイリングに一般化し、その理論的基礎を与えることができた。

本論文は、次の 5 章から構成されている。第 1 章では、研究の背景および本論文の構成が述べられている。

第 2 章では、数学的に最も簡明なモデルとして、円筒格子を母点集合とするボロノイ分割のタイリングについて記述している。この場合、一般的には六角形タイリングであり、退化形として長方形タイリングが得られる。複素平面の幾何学を利用することにより、簡明な一次分数関数によって分岐を説明することに成功し、さらに、回転角(divergence angle)の連分数近似によって螺旋の組み合わせ構造が記述されることも容易に示すことができた。また、循環連分数に対するガロアの定理を応用して、回転角を二次無理数に固定した場合の長方形タイリングの極限形状の周期性を示した。

第 3 章では、平面上の対数螺旋点列を母点集合とするボロノイタイリング(六角形および四角形)の分岐を記述している。ボロノイ四角形タイリングにおいては、タイルの四頂点が同一円周上にあるという性質により、これを生成するパラメータの集合は、実代数曲線の可算和として表される。回転角が二次無理数の場合は、葉間比を 1 に近づける極限操作によって議論が線形化され、円筒モデルと同様の結果を導くことができる。

第 4 章では、平面上の対数螺旋点列を頂点集合とする三角形タイリングおよび四角形タイリングの分岐を記述している。葉序的三角形タイリングにおいては、タイルの三頂点と原点が同一円周上にあるという性質により、これを生成するパラメータ集合は、ボロノイ四角形タイリングと類似で次数の低い有理関数で定義されている。パラメータ集合に関す

る議論の技術的方法は前章と異なるが、得られる結果はほぼ類似している。葉序的三角形タイリングにおいて葉間比を 1 に近づける極限操作を考える場合、三角形が扁平となることは避けられないが、回転角が二次無理数であれば、三辺の長さの比率が有界性をもつ。さらに、非葉序的三角形タイリングのパラメータ集合の稠密性に関する位相空間論的結果が得られている。また、多くの三角形タイリングに対して折り紙展開図が製作できることが示されている。

第 5 章では、得られた結果のまとめと展望が述べられている。

## 2. 論文審査結果の要旨

以上の論文内容に関して次の点について審査した。

### 2-1. 研究の新規性と独創性

本研究では、元来、植物学ないし生物物理学の研究対象であった螺旋葉序の数理について、数理結晶学(タイリング)およびトポロジー(被覆空間と変換群)の概念を導入することによって、実代数曲線としてパラメータ空間を記述し、数学的に整備された基礎理論を構築することに成功した。さらに、連分数およびディオファンタス近似を利用して、黄金比の解析数論的性質と植物の螺旋葉序の育種学的性質を結びつけることに成功している。また、日詰明男氏の造形作品であるフィボナッチトルネードを一般理論として整備し、一般的な回転角に対する螺旋折り紙の製作を可能とした。このように、独創的発想によって多様な分野を結びつけ、これによって新規性をもつ研究結果を得ることに成功している。

### 2-2. 研究の貢献度と将来の発展性

本研究は、数学理論と数値計算と実物製作の三つの側面が相補って成立している。すべての面において一定以上の水準を保ちながら、総合的に研究結果をまとめあげた申請者の貢献は大きい。本研究では、さまざまな分野の技術を駆使して、多様な問題意識を取り込んだ研究結果を得ているため、それぞれの分野の発展を促す契機となっている。今後の発展としては、二次無理数以外の一般的な代数的数を回転角とする場合のディオファンタス近似に基づく解析数論的研究、相似変換群の対称性をもたない一般的な螺旋タイリングにおける組み合わせ的性質の分岐の研究、剛体折り紙による三角形螺旋タイリングの製作と自動展開に関する工学的研究など、多様な研究の方向が考えられる。

なお、本論文に記載された成果の一部は、2 編の査読付き英語共著論文、1 編の日本語単著論文(査読なし)、1 編の日本語共著論文(査読なし)、1 編の日本語共著会議録(査読なし)や学会、研究集会での 6 件の英語講演(口頭発表)、24 件の日本語講演(口頭発表)、7 件のポスター発表として公開されている。

以上の審査結果により、本論文は 博士(理学) の学位を授与されるにふさわしいものと認

められる。

### 3. 口述試験結果の要旨

2014 年 2 月 21 日に審査員および口述試験委員全員出席のもとで、学位申請者に対して論文の内容およびこれに関連する学識について試問を行い、合格と判断した。

### 4. 学位授与の可否

以上の結果、学位申請者 須志田 隆道 は、 博士(理学) の学位を授与される資格があるものと認める。

2014 年 2 月 21 日

審査員（主査） 理工学部教授 國府 宏枝

審査員（副査） 理工学部教授 四ツ谷 晶二

審査員（副査） 理工学部教授 松木平 淳太

口述試験委員 理工学部教授 松本 和一郎

口述試験委員 理工学部教授 森田 善久