葉序的な螺旋タイリングの幾何学

T11D001 須志田 隆道

学位論文の要旨

植物の葉や種などの原基 (Primordia) の配置を葉序 (Phyllotaxis) という. ひまわりや松笠などの典型的な植物の葉序がもつ特徴は, 黄金比 $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ や Fibonacci 数 $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \cdots$ で記述される螺旋構造を形成することである. 本論文の主題は, 円板上の問題であるボロノイ螺旋タイリングおよび三角形螺旋タイリングを包括的に記述することである.

研究の背景

葉序の数学的な理論の研究は, 19 世紀前半の Bravais brothers らの研究から始まった. 非常に複雑な構造をもつ葉序の数学的な構造を解明するために, 単純化された円筒上モデル (線形モデル) および円板モデル (非線形モデル) がそれぞれ研究された. 円筒モデルの研究では, 加法群が推移的に作用する点列を母点集合とするボロノイタイリングの組合せ的構造が回転角の連分数近似によって説明され, その分岐過程が力学系の観点から記述された. 一方, 円板モデルの研究では, 1979 年に物理学者 Vogel によって提案されたひまわりの頭状花にある筒状花の螺旋模様に対応する点列 $V = \{\phi_j(r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot j\theta}\}_{j\in\mathbb{N}}$, $\phi_j(r) = r\sqrt{j}$, $r > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ を母点集合とするボロノイタイリングについて, 準結晶構造の観点からからその組合せ的構造を説明した研究がある. さらに, 葉序の幾何学モデルの研究に加え, 生物学的な根拠を考慮したモデル方程式の研究がある. 最近では, 生物学的な研究の進展により, 細胞間における植物ホルモン「オーキシン」の輸送が黄金比やフィボナッチ数で記述される生物学的機構の一つであることが発見され, 対応するモデル方程式が提案されている.

一方で, 造形作家 日詰明男氏によって考案されたひまわりの葉序の数学的エッセンスを抽出した幾何学的造形物がある. 1987 年に日詰氏は, フィボナッチ・タワーと呼ばれる幾何学的建築物を考案した. これは, 擬球面上にひまわりの頭状花にある筒状花の螺旋模様を模したものである. 日詰氏はさまざまなワークショップなどで竹を用いた巨大なフィボナッチ・タワーを建造した. 2005 年に日詰氏は, フィボナッチ・タワーの土台として, フィボナッチ・トルネードと呼ばれる三角形螺旋タイリングを考案した. これは, 原点を除いた平面 $\mathbb{C}^*$ において, 黄金比 τ で記述される相似変換群が推移的に作用するタイリングであり, 原点を除いた円板モデルとして捉えることができる. さらに, フィボナッチ・トルネードに関するもう一つの話題として, 折り紙による造形物がある. 日詰氏は折紙作家 布施知子氏によって考案されたねじれ多重塔と呼ばれる折り紙の作品を参考にして, 2005 年にフィボナッチ・トルネードを 1 枚の紙で製作することに成功した.

研究の内容

本論文では, 単位円板 $\mathbb{D}$ 内の一つの複素数 $\zeta = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \in \mathbb{D}\backslash\mathbb{R}$ で生成される平面 $\mathbb{C}^* := \mathbb{C}\backslash\{0\}$ の相似変換群 $S = \{\zeta^j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ が推移的に作用するボロノイ螺旋タイリングおよび三角形螺旋タイリングを位相幾何学的な観点から考える.

本論文は次の 5 章から構成されている. 各章ごとに, 独立した記号を用いる.

第 1 章では, 研究の背景および論文の構成が述べられている.

第 2 章では, 円板上の問題を考えるための準備として, 葉序の分野でよく知られている円筒 $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ のボロノイ図として得られるタイリングの分岐構造を記述する. ここで, タイリングの理論に従い, 二次元多様体 X のタイリングは, topological disk $T_j \subset X$ の族 $\mathcal{T} = \{T_j\}_j$ であり, かつ $X = \bigcup_j T_j$ and $\mathrm{int}(T_j) \cap \mathrm{int}(T_k) = \emptyset$, $j \neq k$ を満たすものと定める. 平面 $\mathbb{C}$ 上の格子 $\Lambda(z) := z\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$, $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}(z) > 0$ を母点集合とするボロノイ図 $\mathcal{V}(z) := \{V(\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda(z)}$,

$$V(\lambda) = V(\lambda; z) := \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - \lambda| \leq |\zeta - \lambda'|,\ \forall\lambda' \in \Lambda(z)\}$$

が $\mathbb{C}$ のタイリングであることは容易に示される. $\mathbb{C}$ のボロノイタイリング $\mathcal{V}(z)$ は, 射影 $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\mathbb{Z}$ によって, $\pi(z)$ で生成される加法群 $\pi(z\mathbb{Z} + \mathbb{Z}) = \pi(z)\mathbb{Z}$ が推移的に作用する族 $\mathcal{T}(z) := \{T(\lambda) := \pi(V(\lambda))\}_{\lambda\in\Lambda(z)}$,

$$T(\lambda) := \{\zeta \in \mathbb{C}/\mathbb{Z} : \mathrm{dist}(\zeta, \pi(\lambda)) \leq \mathrm{dist}(\zeta, \pi(\lambda')),\ \forall\lambda' \in \Lambda(z)\},\ \lambda \in \Lambda(z).$$

である．$E := \{z \in \mathbb{C} : |z - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}\}$, $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ とする．もし $z \notin \mathbb{Z} + \mathbb{H} \cap E$ ならば $\mathcal{T}(z)$ は円筒 $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ のタイリングでなく, もし $z \in \mathbb{Z} + \mathbb{H} \cap E$ ならば $\mathcal{T}(z)$ は円筒 $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ のタイリングである．円筒 $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ 上のボロノイタイリング $\mathcal{T}(z)$ について, 以下が成り立つ．

- $\mathcal{T}(z)$ のタイル $T(\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda(z))$ の形状は六角形もしくは長方形である．
- $\mathrm{Re}(z)$ を固定したとき, $\mathrm{Im}(z)$ の単調減少による $\mathcal{T}(z)$ の組合せ的構造の分岐過程は, $\mathrm{Re}(z)$ の連分数展開で説明される．
- 長方形タイリングを作る $z \in \mathbb{C}$ の集合は円弧の和集合である．
- 長方形タイルの形状パラメータ (縦横比) は $\mathrm{Re}(z)$ の連分数展開によって記述される．さらに, $\mathrm{Re}(z)$ が二次無理数とし, $\mathrm{Im}(z) \to 0$ とするとき, 長方形タイルにおける形状パラメータの極限集合は二次無理数で記述される有限集合であることが示される．特に, $\mathrm{Re}(z)$ が黄金比 τ に対等な無理数ならば長方形タイルの極限形状は正方形であることが示される．長方形タイルの極限形状に関する結論は, Rothen と Koch による the shape invariance under compression に数学的な拡張を与える．

第 3 章では, 平面 $\mathbb{C}^*$ の被覆空間である開リーマン面 M_v 上の $\zeta = re^{i\theta} \in M_v$, $0 < r < 1$ で生成される螺旋点列 $S = \{\zeta^j\}_{j\in\mathbb{Z}} \subset M_v$ を母点集合とするボロノイ螺旋多重タイリング $\mathcal{T} := \{T_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ を考える．ここで, $v \neq 0$ は整数である．M_v のボロノイ螺旋多重タイリング $\mathcal{T}$ について, 以下が成り立つ．

- $\mathcal{T}$ のタイル T_j $(j \in \mathbb{Z})$ の形状は六角形もしくは四角形である．
- $\theta/2\pi v$ を固定したとき, $0 < r < 1$ の単調増加による $\mathcal{T}$ の組合せ的構造の分岐過程は, $\theta/2\pi v$ の連分数展開で説明される．
- 四角形ボロノイ螺旋多重タイリングを作る $\zeta \in M_v$ の集合は, 単位円板 $\mathbb{D}$ 内において, θ をパラメータとする実代数曲線の枝の和集合 B_v である．さらに, 和集合 $\bigcup_{v>0} B_v$ は単位円板 $\mathbb{D}$ の稠密部分集合を与える．
- $\theta/2\pi v$ を固定された二次無理数とし, $r \to 1$ とするとき, 四角形タイルの形状パラメータ (縦横比) の近似式は $\theta/2\pi v$ の連分数展開によって記述され, その極限集合は二次無理数で記述される有限集合であることが示される．特に, $\theta/2\pi v$ が黄金比 τ に対等な無理数ならば四角形タイルの極限形状は正方形であることが示される．

数学的な結論は円筒 $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ 上のボロノイタイリングに似ているが, ボロノイ螺旋多重タイリングは円板上の問題であるため, 数学的な議論の展開が複雑である．

第 4 章では, 螺旋点列 S を頂点集合とする三角形螺旋タイリングを考える．はじめに, 平面 $\mathbb{C}^*$ の被覆空間 $C_v = \mathbb{C}/2\pi v i\mathbb{Z}$ のタイリングとして螺旋多重タイリングを定義する．ここで, $v \neq 0$ は整数である．次に, $T_0 := \square(1, \zeta^m, \zeta^{m+n}, \zeta^n)$ がこの順番で頂点が並ぶ $\mathbb{C}^*$ の四角形であるならば, 四角形の族 $\mathcal{T} = \{T_j := \square(\zeta^j, \zeta^{j+m}, \zeta^{j+m+n}, \zeta^{j+n})\}_{j\in\mathbb{Z}}$ は, 多重度 $v := |n\mathrm{Arg}(\zeta^m) - m\mathrm{Arg}(\zeta^n)|$ をもつ平面 $\mathbb{C}^*$ の螺旋多重タイリングであることが示される．ここで, $-\pi < \mathrm{Arg}(z) \leq \pi$ は $z \in \mathbb{C}^*$ の偏角の主値を表す．葉序の分野では, 四角形螺旋多重タイリング $\mathcal{T}$ の組合せ的指標 $\{m, n\}$ において, $\mathrm{Arg}(\zeta^m)\mathrm{Arg}(\zeta^n) < 0$ となるとき, $\{m, n\}$ を opposed parastichy pair といい, $\mathrm{Arg}(\zeta^m)\mathrm{Arg}(\zeta^n) > 0$ となるとき, $\{m, n\}$ を non-opposed parastichy pair という．次に, 四角形螺旋多重タイリング $\mathcal{T}$ の opposed parastichy pair$\{m, n\}$ が $\theta/2\pi v$ の連分数展開における主近似分数およびその次の主近似分数までの中間近似分数の分母の対であることが示される．

四角形 $T_0 := \square(1, \zeta^m, \zeta^{m+n}, \zeta^n)$ の 4 頂点のうち 3 頂点が同一直線上にあるとき, 四角形螺旋多重タイリング $\mathcal{T}$ は三角形螺旋多重タイリングになる．円筒 $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ 上のボロノイタイリングおよびボロノイ螺旋多重タイリングでは, ボロノイ図が退化した特殊な場合として non-opposed parastichy pairs をもつタイリングは得られないが, 三角形螺旋多重タイリングには, non-opposed parastichy pairs をもつタイリングが存在する．三角形螺旋多重タイリングについて, 以下が成り立つ．

- 三角形タイルはすべて相似であるから，三角形タイルの形状は２つの角度に依存する．従って，三角形タイルの形状の自由度は実二次元である．$I = (-\pi, \pi]$ とし，三角形タイルの２つの角度に関するパラメータ空間を $\Delta := \{(\theta_1, \theta_2) \in I^2 : 0 < \theta_1 < \theta_2 + \pi < \pi\}$, $\Delta' := \{(\theta_1, \theta_2) \in I^2 : \theta_1, \theta_2 > 0, \theta_1 + \theta_2 < \pi\}$ とする．$v > 0$ を整数とし，parastichy pair$\{m, n\}$ をもつ多重度 v の螺旋多重タイリングを作る三角形の形状の集合 $\ell_{m,n,v}$ とする．このとき，以下が成り立つ．

    (i) $L_v := \bigcup_{(m,n)\in R} \ell_{m,n,v}$ は $\Delta \cup \Delta'$ 内において全疎である．位相空間 X の集合 A が全疎であるとは，A の閉包の内部が空集合である．

    (ii) $L := \bigcup_{v>0} L_v$ は $\Delta \cup \Delta'$ 内の稠密部分集合である．

- opposed parastichy pair$\{m, n\}$ をもつ多重度 v の三角形螺旋多重タイリングを生成する $\zeta \in \mathbb{D}\backslash\mathbb{R}$ の集合 $P_{m,n,v}$ は $\theta = \mathrm{Arg}(\zeta)$ をパラメータとする実代数曲線の枝である．さらに，和集合 $\bigcup_{v>0} \bigcup_{(m,n)\in R} P_{m,n,v}$ は単位円板 $\mathbb{D}$ の稠密部分集合である．

- non-opposed parastichy pair$\{m, n\}$ をもつ多重度 v の三角形螺旋多重タイリングを生成する $\zeta \in \mathbb{D}\backslash\mathbb{R}$ の集合 $Q_{m,n,v}$ は絶対値 $r = |\zeta|$ をパラメータとする実代数曲線の枝であり，和集合 $\bigcup_{(m,n)\in R} Q_{m,n,v}$ は単位円板 $\mathbb{D}$ の稠密部分集合である．

- $\theta/2\pi v$ を固定された二次無理数とし，$r \to 1$ とするとき，opposed parastichy pairs をもつ三角形螺旋多重タイリングの三角形タイルの形状パラメータ (線分比) の近似式は $\theta/2\pi v$ の連分数展開によって記述され，その極限集合は二次無理数で記述される有限集合であることが示される．特に，$\theta/2\pi v$ が黄金比 τ に対等な無理数ならば形状パラメータの極限集合は黄金比 τ で記述されることが示される．

第 5 章では，本論文のまとめおよび展望が述べられている．

Geometry of Phyllotactic Spiral Tilings

T11D001 Takamichi Sushida

Abstract

Phyllotaxis is the regular arrangements of primordia of leaves and other organs of plants. Typical phyllotactic patterns form the spiral structures described by the golden section $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ and the Fibonacci numbers $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \cdots$. In early half of the 19th century, the classical subject of geometrical phyllotactic patterns was started from the study of the cylindrical model (the linear model) by Bravais brothers. Moreover, it has studied as a multidisciplinary subject which contains the study of the disk model (the non-linear model) based on the mathematical model by Vogel. The main subject of the thesis is to describe comprehensively Voronoi spiral tilings and triangular spiral tilings.

First, we consider a tiling given as a Voronoi diagram with the spiral lattice $\Lambda(\xi) = \xi\mathbb{Z}(\text{mod } 1)$, $\xi = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$, $y > 0$ of the cylinder $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$. We show that a bifurcation process of combinatorial structures by monotone decreasing of $y > 0$ as x is fixed, is explained by the continued fraction of x. A bifurcation diagram of combinatorial structures is the union of arcs. A complex number ξ on each arc produces a rectangle tiling. Moreover, we consider limit sets of aspect ratios of rectangular tiles. If x is a fixed quadratic irrational, then the limit set given by $y \to 0$ is a finite set written by quadratic irrationals. In the phyllotaxis theory, an irrational number which is linearity equivalent of τ plays a vital role, and it is called the noble number. In particular, if x is a noble number, then the limit shape is the square. This is an extended result to the shape invariance under compression by Rothen and Koch.

By the complex exponential function $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $\Lambda(\xi)$ of $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ is mapped as the spiral lattice $S = \{\zeta^j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ of the punctured plane $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ generated by $\zeta = \mathrm{e}^{\xi}$. Second, we consider the Voronoi spiral tilings with S of $\mathbb{C}^*$. We show that a bifurcation process of combinatorial structures by monotone increasing of $0 < r < 1$ as $\mathrm{Arg}(\zeta)/2\pi$ is fixed, is explained by the continued fraction of $\mathrm{Arg}(\zeta)/2\pi$, where $-\pi < \mathrm{Arg}(z) \leq \pi$ denotes the principal argument of $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. A bifurcation diagram of combinatorial structures for Voronoi spiral tilings is the union of branches of real algebraic curves parameterized by $\mathrm{Arg}(\zeta)$. A complex number ζ on each branch produces a quadrilateral tiling. Moreover, we consider limit sets of aspect ratios of quadrilateral tiles. If $\mathrm{Arg}(\zeta)/2\pi$ is a fixed quadratic irrational, then the aspect ratios are written by the linear approximation, and we obtain the same results as Voronoi tilings on $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$.

Finally, we consider the triangular spiral tilings with S of $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. The triangular spiral tilings was devised as geometrical architectures with phyllotactic patterns by Akio Hizume. The set of generators ζ which produce triangular spiral tilings with opposed parastichy pairs, is the union of branches of real algebraic curves parameterized by $\mathrm{Arg}(\zeta)$. On the other hand, a set of generators ζ which produce triangular spiral tilings with non-opposed parastichy pairs, is the union of branches of real algebraic curves parameterized by $|\zeta|$, and it gives a dense subset of $\mathbb{D}$. Next we consider limit sets of line segment ratios of tiles for triangular spiral tilings with opposed parastichy pairs. In the same way as the Voronoi spiral tilings, if $\mathrm{Arg}(\zeta)/2\pi$ is a fixed quadratic irrational, then the line segment ratios are written by the linear approximation, and we obtain the same results as Voronoi tilings on $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$. In particular, if $\mathrm{Arg}(\zeta)/2\pi$ is a noble number, then the limit set is written by τ.

Throughout the thesis, the proofs of the Voronoi spiral tilings and the triangular spiral tilings are given under multiple tilings defined as a tiling of a covering space of the punctured plane $\mathbb{C}^*$.

葉序的な螺旋タイリングの幾何学

T11D001 須志田 隆道

概要

植物の葉や種などの原基 (Primordia) の配置を葉序 (Phyllotaxis) という. ひまわりや松笠などの典型的な植物に現れる螺旋葉序の特徴は, 黄金比 $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ や Fibonacci 数 $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \cdots$ で記述されることである. 葉序の数学的な理論の研究は, 19 世紀前半の Bravais 兄弟らによる円筒モデル (線形モデル) の研究から始められ, 物理学者 Vogel によって提案されたモデルを基盤とする円板モデル (非線形モデル) の研究が展開されている. 本論文の主題は, 円板モデルの問題であるボロノイ螺旋タイリングおよび三角形螺旋タイリングを包括的に記述することである.

はじめに, 円筒 $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ 上の螺旋格子 $\Lambda(\xi) = \xi\mathbb{Z} \pmod 1$, $\xi = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$, $y > 0$ を母点集合とするボロノイ図として得られるタイリングを考える. x を固定したとき, y の単調減少とともに変化する組合せ的構造の分岐過程は x の連分数近似によって説明される. その分岐図はボロノイ図が退化した長方形タイリングを作る複素数 ξ が属する円弧の和集合である. さらに, 分岐過程の各分岐点で得られる長方形タイリングのタイルの極限形状を考える. もし x が固定された二次無理数ならば, $y \to 0$ としたとき, 長方形タイルの縦横比の極限集合は二次無理数で記述される有限集合である. 葉序の分野では, 黄金比 τ に対等な無理数を noble number という. もし x が noble number ならば, 長方形タイルの形状は正方形に収束することが示される. 長方形タイルの極限形状に関する結論は, Rothen と Koch による the shape invariance under compression に数学的な拡張を与える.

複素指数函数 $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ によって, 円筒 $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ の格子 $\Lambda(\xi)$ は一つの複素数 $\zeta = \mathrm{e}^{\xi}$ で生成される平面 $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ の螺旋格子 $S = \{\zeta^j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ に移る. 次に, 平面 $\mathbb{C}^*$ の螺旋格子 S を母点集合とするボロノイ螺旋タイリングを考える. $\mathrm{Arg}(\zeta)$ を固定したとき, $0 < r < 1$ の単調増加とともに変化する組合せ的構造の分岐過程は $\mathrm{Arg}(\zeta)/2\pi$ の連分数近似によって説明される. ここで, $-\pi < \mathrm{Arg}(z) \leq \pi$ は $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ の偏角の主値を表す. 円筒 $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ のボロノイタイリングでは, 組合せ的構造の分岐図が円弧の和集合であったが, ボロノイ螺旋タイリングの組合せ的構造の分岐図は, $\mathrm{Arg}(\zeta)$ をパラメータとする実代数曲線の枝の和集合であり, 各枝に属する複素数 ζ は, ボロノイ図が退化した四角形タイリングを作る. さらに, 分岐過程の各分岐点で得られる四角形タイリングのタイルの極限形状を考える. $\mathrm{Arg}(\zeta)/2\pi$ を固定された二次無理数ならば, 縦横比が線形に近似され, 円筒 $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ のボロノイタイリングの場合と同様の結論が得られる.

最後に, 平面 $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ の螺旋格子 S を頂点集合とする三角形螺旋タイリングを考える. 三角形螺旋タイリングは, 2005 年に日詰明男氏 (造形作家) によって, ひまわりの葉序がもつ数学的エッセンスを抽出した幾何学的造形物として考案された. 三角形螺旋タイリングには, $\mathrm{Arg}(\zeta)/2\pi$ の連分数近似によって説明される opposed parastichy pairs をもつタイリングとそうでないものがある. opposed parastichy pairs をもつ三角形螺旋タイリングを作る生成元 ζ の集合は $\mathrm{Arg}(\zeta)$ をパラメータとする実代数曲線の枝の和集合である. 一方, non-opposed parastichy pairs をもつ三角形螺旋タイリングを作る生成元 ζ の集合は $|\zeta|$ をパラメータとする実代数曲線の枝の和集合であり, それは単位円板 $\mathbb{D}$ の稠密部分集合を与える. さらに, opposed parastichy pairs をもつ三角形螺旋タイリングについて, 三角形タイルの極限形状を考える. ボロノイ螺旋タイリングの場合と同様に, $\mathrm{Arg}(\zeta)/2\pi$ が固定された二次無理数ならば, 三角形タイルの線分比は線形に近似され, 円筒 $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ のボロノイタイリングの場合と同様の結論が得られる. 特に, $\mathrm{Arg}(\zeta)/2\pi$ が noble number ならば, 極限集合は黄金比 τ で記述される.

本論文のボロノイ螺旋タイリングおよび三角形螺旋タイリングに関する各証明は, 平面 $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ の被覆空間のタイリングとして定義される多重タイリングのもとで与えられる.