学位審査結果報告書

学位申請者: 森 竜樹 (学籍番号 T13D003)
学位の種類: 博士 (理学)
論文題目: All global bifurcation curves for a cell polarization model

1. 論文内容の要旨

本論文はS.Ishihara, et al. (Phys. Rev. E 75 015203(R), 2007) とM.Otsuji, et al. (PLoS Compt. Biol. 3: e108, 2007) に由来を持った，Y.Mori, A.Jilkine and L.Edelstein-Keshet (SIAM J.Appl Math, 2011) による，細胞極性モデルの定常極限方程式に対するすべての大域的分岐曲線を数学的に調べたものである．

上記の細胞極性モデルはタンパク質の活性化・不活性化のダイナミクスを反応拡散方程式で記述した時間発展問題である．活性タンパク質の濃度を $W(x,t)$，不活性タンパク質の濃度を $V(x,t)$，それぞれに対応する拡散係数は ε と D とする．$W(x,t)+V(x,t)$ の x に関する積分量であるタンパク質の総量は, 初期時刻のタンパク質の総量である $W(x,0)+V(x,0)$ の積分量に一致し，タンパク質の総量 m が保存されるという特徴を持つ．

実際の現象において，不活性タンパク質の拡散係数 D は活性タンパク質の拡散係数 ε と比べて十分大きいと考えられている．D を無限大とすると，不活性タンパク質の濃度は時間のみによる未知関数 $V(t)$ となる．さらに, この問題の定常問題を考えると，$V(t)$ は未知定数 $\tilde{V}$ となり, $(W(x),\tilde{V})$ を未知とする定常極限方程式が得られる．

上記で述べたタンパク質の総量保存から，$W(x)+\tilde{V}$ の積分量は, 初期時刻のタンパク質の総量 m に一致するという拘束を受ける．これにより積分制約条件つきの非線形境界値問題となる．最も基本的な単調増加な $W(x)$ に焦点をあてると, 本論文の数学的研究対象である，m を既知とし，$(W(x),\tilde{V})$ を未知とする，定常極限方程式 (SLP) を得る．

上記 Y.Mori, A.Jilkine and L.Edelstein-Keshet の論文中で，(SLP) の分岐曲線が数値的に得られている．K.Kuto and T.Tsujikawa (DCDS suppl., 2013) により, この問題の数学的解析が始められた．彼らは, ほとんどすべての $m>1$ に対して，分岐曲線が存在することを示した．この結果は，証明の技術的制約からくるものであり，きっちりとした存在・非存在定理，さらには，分岐点での方向、大域的なつながり方の解明が待たれていた．

本論文では，定常極限方程式に対する，次のことを数学的に明らかにした:

- すべての m に対する分岐曲線の存在・非存在.
- 1 次分岐の方向，接続の様子.
- 非自明定常解からの分岐点の一意存在とその点からの分岐曲線の挙動.

さらに，時間発展の極限方程式の解の安定性を数値的に調べた．

本論文の構成は次のようになっている．第 1 章では，Y.Mori，A.Jilkineand, L.Edelstein-Keshet の論文の結果の紹介を行った後，(SLP) に対する数学的な主結果である Theorem 1.1 ～1.5 を述べている．第 2 章では準備的な章で，ヤコビの楕円関数および完全楕円積分の定義と後の章で用いる基本性質を列挙している．第 3 章では，Theorem 1.1～1.5 の証明に用いる Proposition 3.1 と Theorem 3.1～3.10 を述べて，Theorem 1.1～1.5 の証明を与えている．Proposition 3.1 は，総質量 $m(\tilde{V},\varepsilon^2)$ の $\varepsilon^2\to 0$ での極限値を求めたものである．特に，Theorem 3.1 は，$m(\tilde{V},\varepsilon^2)$ が ε について単調であることを示している．第 4 章では，Theorem 4.1～4.2 を示している．それらは，$(AP;\tilde{V})$ の解と $m(\tilde{V},\varepsilon^2)$ の表示式を与えている．第 5 章では，Proposition 3.1 の証明を与えている．第 6 章では，Proposition 6.1～6.6 を用いて，Theorem 3.1 の証明を与えている．Proposition 6.1～6.2 は, パラメータ h,s を用いた $\partial m(\tilde{V},\varepsilon^2)/\partial\varepsilon$ の表現式を与えている．Proposition 6.3～6.4 は，その符号が $\partial m(\tilde{V},\varepsilon^2)/\partial\varepsilon$ の符号を決定する $\mathcal{J}(h,s)$ の性質を示している．Proposition 6.5～6.6 は，$\partial\mathcal{J}(h,s)/\partial s$ が唯一つの零点を持つことを示している．第 7 章では，Proposition 6.6 の証明

を与えている．第8章では，Theorem 3.8 で述べた，2次分岐点の存在と一意性について説明している．第9章では，(SLP) の解の安定性について，数値的に調べた結果について説明している．最後に第10章では，論文全体をまとめ，今後の課題について述べている．

2. 論文審査結果の要旨

以下の論文内容に関して次の点について審査した．

2-1. 研究の新規性と独創性

既存の分岐理論では積分制約条件が課された設定は未整備で，一般論の建設が待たれている状況である．分岐曲線の局所存在さえも自明なことではなく，1次分岐曲線の大域的存在・挙動を調べることは容易ではない．さらに，2次以上の分岐曲線の局所存在，大域的存在・挙動を数学的に解明することは困難な問題となる．加えて，分岐曲線の大域的非存在に関する問題は極めて困難な問題である．

このことを踏まえれば，質量保存則に由来する積分制約条件があるにもかかわらず，上記の数学的結果を得たことは，驚くべきことであり，新規性に富むものである．

分岐曲線の様子を調べるため，分岐曲線を積み重ねたものを考えてみる．これは曲面になることは直観的には想像できる．この曲面（大域的分岐シート）の等高線として分岐曲線が得られる．しかし，従来，シートを考えることはできても表示式を求めることは不可能で非現実的と考えられてきた．ところが，シートの具体的な表示式を発見し，それを用いてシートの等高線を調べ，分岐曲線の数学的な解析に成功した．

この方向での例外的な先行研究として，S.Kosugi，Y.Morita and S.Yotsutani (DCDS **19** 2007) による Cahn-Hilliard 方程式の定常解の解析がある．彼らは，すべての解の表示式と大域的分岐シートの表示式を発見し分岐曲線の様子の解明に成功している．(SLP) はこの問題に似ているが，さらに難しくなっている．この点に着目し，本論文では Kosugi-Morita-Yotsutani の結果を基礎にして，大域的分岐シートの具体的な表示式を求めた．

大域的分岐シートから，等高線の状況や解の形状を解明することは，ヤコビの楕円関数や完全楕円積分が複雑な形で組み合わさっているため，容易なことではない．しかしながら，本論文では，古典解析の華である楕円関数論，古典的な代数学の手法を現代的に発展させ，現代代数学の強力な道具であるグレブナー基底を有機的に融合させ，最新の数式処理ソフトを巧妙に用いている．これにより，一見処理が不可能とさえ思われる数式を，膨大な厳密計算を行いつつ，より簡単な複数の問題に帰着し，それらを一つずつ粘り強く解き，最後に設定したゴールに到着している．

以上のように，本論文の分岐曲線解明の方法は，極めて独創性なものである．

2-2. 研究の貢献度と将来の発展性

この論文中の証明で特筆すべきは，Theorem 3.1 で示している，1次元閉区間での Allen-Cahn 方程式において，非線形項をきめるパラメータを固定して，拡散係数のみを変化させたとき，解の積分量は単調に変化するという美しい事実を発見し，その証明を与えたことである．この事実が (SLP) の分岐曲線の解明に本質的な役割を果たしている．この結果は，今後のさまざまな積分制約条件付の非線形境界値問題の研究発展の基礎となると思われる．

従来，積分制約条件をもつ問題に対しては，積分制約条件を除いた補助的問題の解の数値計算を行いつつ，試行錯誤的に積分制約条件を満たすものを探していく方法が一般的である．この方法では試行錯誤の過程で膨大な計算時間を必要とし，分岐曲線の全体像を知ることは容易ではない．しかし，(SLP) の分岐曲線の解析のために発見された本論文の手法は，大域的分岐シートの数学的解析を可能にするのみではなく，既存の数値計算の方法と比較して，はるかに高速で分岐曲線の全体像も一挙に求めることができる，(SLP) の全く新しい数値計算法の提案にもなっている．この手法のさらなる発展が期待される．

本論文に記載された成果の一部は2編の査読付き英語共著論文として掲載・採択されている．さらに，学会等での3件の英語口頭発表, 18件の日本語口頭発表, 2件のポスター発表として報告され，優秀ポスター賞も受賞している．

以上の審査結果により, 本論文は 博士 (理学) の学位を授与されるにふさわしいものと認められる．

3. 口述試験結果の要旨

2016年2月19日に審査員および口述試験委員全員出席の元で, 学位申請者に対して論文の内容およびこれに関する学識について試問を行い, 合格と判断した．

4. 学位授与の可否

以上の結果, 学位申請者 森 竜樹は, 博士 (理学) の学位を授与される資格があるものと認める．

2016年2月22日

審査員 (主査)　理工学部教授　四ツ谷 晶二

審査員 (副査)　理工学部教授　松本 和一郎

審査員 (副査)　理工学部教授　森田 善久

口述試験委員　理工学部教授　宇土 顕彦

口述試験委員　理工学部教授　國府 宏枝