要　旨

S.Ishihara, et al. (Phys. Rev. E 75 015203(R), 2007), M.Otsuji, et al. (PLoS Compt. Biol. 3: e108, 2007) に由来を持った，Y.Mori，A.Jilkine and L.Edelstein-Keshet (SIAM J.Appl Math, 2011) による細胞極性モデル

$$
\text{(TP)}\begin{cases}
\varepsilon W_t = \varepsilon^2 W_{xx} + W(W-1)(V+1-W), & x \in (0,1), t \in (0,\infty),\\
\varepsilon V_t = D V_{xx} - W(W-1)(V+1-W), & x \in (0,1), t \in (0,\infty),\\
W_x(0,t) = W_x(1,t) = V_x(0,t) = V_x(1,t) = 0,\\
W(x,0) = W_0(x), V(x,0) = V_0(x)
\end{cases}
$$

の定常極限方程式の分岐曲線を数学的に調べたものである．ここで，$W(x,t)$ は活性タンパク質の濃度，$V(x,t)$ は不活性タンパク質の濃度，$\varepsilon > 0$，$D > 0$ は拡散係数である．

方程式より，タンパク質の総量は初期の総量 m に一致し保存される．実際の現象では D は ε に比べて十分大きいと考えられている．

(TP) の定常問題において $D \to \infty$ とすると，$V(x)$ は定数となる．この未知定数を $\tilde{V}$ とかく．単調増加な解を元にして他の解はその折り返しで得ることができるので，簡単のため単調増加な解に着目する．よって，定常極限方程式 (stationary limiting problem)

$$
\text{(SLP)}\begin{cases}
\varepsilon^2 W_{xx} + W(W-1)(\tilde{V}+1-W) = 0, & x \in (0,1),\\
W_x(0) = W_x(1) = 0,\\
W(x) > 0,\ W_x(x) > 0,\ x \in (0,1),\quad \tilde{V} > 0,\\
\displaystyle\int_0^1 W dx + \tilde{V} = m
\end{cases}
$$

を得る．

上記 Y.Mori，A.Jilkine and L.Edelstein-Keshet の論文中で，(SLP) の分岐曲線が数値的に得られている．K.Kuto and T.Tsujikawa (DCDS suppl., 2013) により, この問題に変数変換を施した問題の数学的解析がはじめられた. 彼らは, ほとんどすべての m に関して分岐曲線が存在することを示した. 分岐点での方向や、大域的なつながり方については明らかになっていなかった.

Mori, Kuto, Nagayama, Tsujikawa and Yotsutani (AIMS 2015 Proc.) では (SLP) に対し，すべての解の表示式との積分制約条件の表示式をヤコビの楕円積分と完全楕円積分を用いて構成した．このすべての解の表示式を構成し解析する手法は実質的に Lou, Ni and Yotsutani (DCDS **10** 2004) によって始められた．この手法を発展させ，S.Kosugi，Y.Morita and S.Yotsutani (DCDS **19** 2007) は Cahn-Hilliard 方程式の定常解の解析の際に，すべての解の表示式と大域的分岐シートの表示式を構成し分岐曲線の様子の解明に成功した．(SLP) はこの問題に似ているがより難しくなっている．

この点に着目し，本論文では Kosugi-Morita-Yotsutani の結果を応用発展させ，定常極限方程式の分岐曲線に対して次のことを数学的に明らかにした:

- すべての m に対する分岐曲線の存在・非存在,
- 分岐の方向, 接続の様子,
- 2 次分岐点が一意に存在,
- 2 次分岐した分岐曲線の大域的存在とその行き先.

この結果は積分制約条件を持つ定常極限方程式に対して 2 次分岐点の一意存在も含めた大域的な分岐曲線の存在・非存在を明らかにした初めての結果である．

Summary

We investigate bifurcation curves of a limiting stationary problem for a cell polarization model proposed by S.Ishihara, et al. (Phys. Rev. E 75 015203(R), 2007), M.Otsuji, et al. (PLoS Compt. Biol. 3: e108, 2007) and Y.Mori, A.Jilkine and L.Edelstein-Keshet (SIAM J.Appl Math, 2011).

The cell polarization model model is

$$
\text{(TP)} \begin{cases} \varepsilon W_t = \varepsilon^2 W_{xx} + W(W-1)(V+1-W), & x \in (0,1),\, t \in (0,\infty), \\ \varepsilon V_t = D V_{xx} - W(W-1)(V+1-W), & x \in (0,1),\, t \in (0,\infty), \\ W_x(0,t) = W_x(1,t) = V_x(0,t) = V_x(1,t) = 0, & \\ W(x,0) = W_0(x),\, V(x,0) = V_0(x), & \end{cases}
$$

where $W = W(x,t)$ denotes the density of an active protein, $V = V(x,t)$ denotes the density of an inactive protein, $\varepsilon > 0$ and $D > 0$ are diffusion coefficients.

The total mass of protein m is conserved by the above equation. The total mass of protein m correspond with the initial total mass. It is thought that D is sufficiently larger than ε in a actual phenomenon.

Letting $D \to \infty$ in stationary problem for (TP), $V(x)$ become an unknown constant $\tilde{V}$. For simplicity we concentrate on monotone increasing solutions, since we can obtain other solutions by reflecting this kind of solutions. Thus, we get our stationary limiting problem

$$
\text{(SLP)} \begin{cases} \varepsilon^2 W_{xx} + W(W-1)(\tilde{V}+1-W) = 0, & x \in (0,1), \\ W_x(0) = W_x(1) = 0, & \\ W(x) > 0,\ W_x(x) > 0,\ x \in (0,1), \quad \tilde{V} > 0, & \\ \displaystyle\int_0^1 W\,dx + \tilde{V} = m. & \end{cases}
$$

Y.Mori, A.Jilkine and L.Edelstein-Keshet are obtained interesting bifurcation diagrams by numerical computations. Kuto and Tsujikawa (DCDS suppl., 2013) obtained several mathematical results for (SLP) with suitable change of variables. They show existence of bifurcation curves for almost all m. Direction, connection and global destination of bifurcation curves were not clear. We have obtained the exact expressions of all the solutions for it by using the Jacobi elliptic functions and complete elliptic integrals in Mori, Kuto, Nagayama, Tsujikawa and Yotsutani (AIMS 2015 Proc.). The method to obtain all the exact solutions essentially based on the method which started in Lou, Ni and Yotsutani (DCDS **10** 2004). It is developed by Kosugi, Morita and Yotsutani (DCDS **19** 2007) to investigate the Cahn-Hilliard equation treated in Carr, Gurtin and Semrod (Arch. Rational Mech. Anal. **86** 1984).

In this paper, we give mathematical answers to the following questions:

- Existence and nonexistence of all global bifurcation curves for all given m.
- Direction and connection of bifurcation curves.
- Existence and uniqueness of the secondary bifurcation point.
- Global existence and destination of the secondary bifurcation curves.

These results are the first ones to clarify the existence and nonexistence of all global bifurcation curves including the unique existence of the secondary bifurcation point.