

非線形微分方程式系と不安定なリミットサイクル

——複雑系経済学のために——

寺 田 宏 洲

目 次

I. はじめに	(1) R. F. ハロッドのアンチノミー理論
II. 解析的分析	(2) アンチノミー理論とポアンカレ動学
III. トポロジカルな分析	モデル
IV. R. F. ハロッドのアンチノミー理論と	V. 結びに代えて
H. ポアンカレの動学モデル	

I. は じ め に

H. ポアンカレは、1882年の『数学論集』において、非線形微分方程式系の重要な性質を表す典型例をいくつか与えている。その内、3番目の例が系の不安定な運動を示し、今日いうところのカオスの概念をも含むものである。ただし、彼は、モデルとなる非線形微分方程式系を提示し、途中の論証はほぼ完全に省略して解の運動を示す結論的図を掲げているだけである。

従って、本稿の目的は、3番目の例を素材にして、H. ポアンカレが省略した途中の論証を埋めることにある。即わち、次のII章では解析的分析によって、さらにIII章ではH. ポアンカレが好んで用いたトポロジカルな分析手法によって途中の論証が埋められるであろう。続くIV章では、「資本主義動態経済は、本来不安定なものである」というR. F. ハロッドのアンチノミー理論と本稿での重要な結論的意味を示す(図2)との論理的関係が一つのシステム動学論としてアナロジカルに比較・吟味される。言うまでもなく、数式と図との整合性には留意して議論は展開される。最後のIV章では若干の結論が導かれるであろう¹⁾。

II. 解 析 的 分 析

H. ポアンカレが提示した非線形微分方程式系²⁾は、次のような形をしている。

$$\frac{dx}{x(x^2+y^2-1)-y(x^2+y^2+1)} = \frac{dy}{y(x^2+y^2-1)+x(x^2+y^2+1)}$$

1) 本稿執筆の動機および問題意識は、寺田宏洲著「ロジスティックカーブとカオス」『龍谷大学経済学論集』第41巻第3号(2001年12月)の「I. はじめに」の延長線上にある。

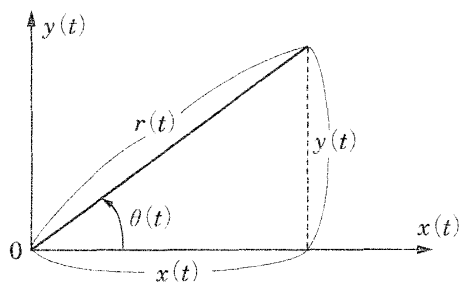
2) H. Poincare 'Courbes Definies par une Equation Differentielle' *Journal Mathematiques pures et Appliquees*, Annee 1882. PARIS. pp. 278-279.

これをわれわれが見慣れた形に書き換えたものが次の(1), (2)式である³⁾。

$$(I) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(x^2 + y^2 - 1) - y(x^2 + y^2 + 1) \\ \frac{dy}{dt} = x(x^2 + y^2 + 1) + y(x^2 + y^2 - 1) \end{cases} \quad (1)$$

半径 r も、左回りに回転するときの角度 θ も、時間 t の関数であると考え、(図1)を考慮して $x(t)$, $y(t)$ を極座標表示にする。

図 1



$$\begin{cases} x(t) = r(t) \cos \theta(t) \\ y(t) = r(t) \sin \theta(t) \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x(t) = r(t) \cos \theta(t) \\ y(t) = r(t) \sin \theta(t) \end{cases} \quad (4)$$

(3), (4)各式の両辺を時間 t で全微分する。

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt} \cos \theta + r(-\sin \theta) \frac{d\theta}{dt} \\ \frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt} \sin \theta + r(\cos \theta) \frac{d\theta}{dt} \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt} \cos \theta + r(-\sin \theta) \frac{d\theta}{dt} \\ \frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt} \sin \theta + r(\cos \theta) \frac{d\theta}{dt} \end{cases} \quad (6)$$

(5), (6)式を行列表示する。

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dr}{dt} \\ \frac{d\theta}{dt} \end{pmatrix} \quad (7)$$

一方、(1), (2)式の右辺を、(3), (4)式および $x^2 + y^2 = r^2$ を考慮して、 r と θ で行列表示してみる。

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta (r^2 - 1) - r \sin \theta (r^2 + 1) \\ r \sin \theta (r^2 - 1) + r \cos \theta (r^2 + 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r(r^2 - 1) \\ r(r^2 + 1) \end{pmatrix} \quad (8)$$

(7) = (8) より (9) 式が成立する。

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dr}{dt} \\ \frac{d\theta}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r(r^2 - 1) \\ r(r^2 + 1) \end{pmatrix} \quad (9)$$

$\begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} = A$ と定義し、行列 A の行列式 $|A|$ の値を求めると r となる。よって、(9)式は、 $|A| = r$ と (行列 A の余因子行列から生まれる) 転置行列で表すと (10) 式となる。

3) 与えられた式イコール $\frac{dt}{1}$ と考えて変形する。

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \frac{dr}{dt} \\ \frac{d\theta}{dt} \end{pmatrix} &= \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}_4 \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r(r^2-1) \\ r(r^2+1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r^2-1 \\ r^2+1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} r(r^2-1) \\ r^2+1 \end{pmatrix}^{5)}
\end{aligned} \tag{10}$$

よって,

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = r(r^2-1) \\ \frac{d\theta}{dt} = r^2+1 \end{cases} \quad \text{ただし } r > 0 \tag{11}$$

(12)式については, 常に $\frac{d\theta}{dt} > 0$ なので, 時間 t に関して θ は左回りで回転していくことが分かる。

(11)式については, $\frac{dr}{dt} = 0$ を満たす $r=1$ (ただし $r > 0$) を境にして次の3つのケースに分けて考えられる。即わち,

- (i) $r > 1$ なら, $\frac{dr}{dt} > 0$ なので, 半径 r を増加させながら左回りで回転していくような動きをする。
- (ii) $r = 1$ なら $\frac{dr}{dt} = 0$ なので, 半径 r を1に保ったままのリミットサイクル上を左回りで回転する。
- (iii) $0 < r < 1$ なら $\frac{dr}{dt} < 0$ なので, 半径 r を小さくさせながら左回りで特異点の原点に向かって吸い込まれるように動く。従って, 原点が sink point になる。

以上のことを総合的に考慮すると, (図2) になる。

ただし, ポアンカレは原論文で (図3) を与えている。

- 4) $\begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} = A$ と置いて, 余因子行列を求める。

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1} r \cos \theta = (-1)^2 r \cos \theta = r \cos \theta$$

$$\Delta_{12} = (-1)^{1+2} \sin \theta = -\sin \theta$$

$$\Delta_{21} = (-1)^{2+1} (-r \sin \theta) = r \sin \theta$$

$$\Delta_{22} = (-1)^{2+2} \cos \theta = \cos \theta$$

よって行列 A の余因子行列 Δ は次のように表される。

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta & -\sin \theta \\ r \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

ここで転置行列 ${}^t\Delta = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} \end{pmatrix}$ であり $|A| = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r$ であるので,

$$\frac{1}{A} = A^{-1} = \frac{1}{|A|} {}^t\Delta = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

- 5) $\begin{pmatrix} \frac{dr}{dt} \\ \frac{d\theta}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \theta + r \sin \theta \sin \theta & r \cos \theta (-\sin \theta) + r \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta + \cos \theta \sin \theta & (-\sin \theta)(-\sin \theta) + \cos \theta \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r^2-1 \\ r^2+1 \end{pmatrix}$
- $$= \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r^2-1 \\ r^2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(r^2-1) \\ r^2+1 \end{pmatrix}$$

図 2

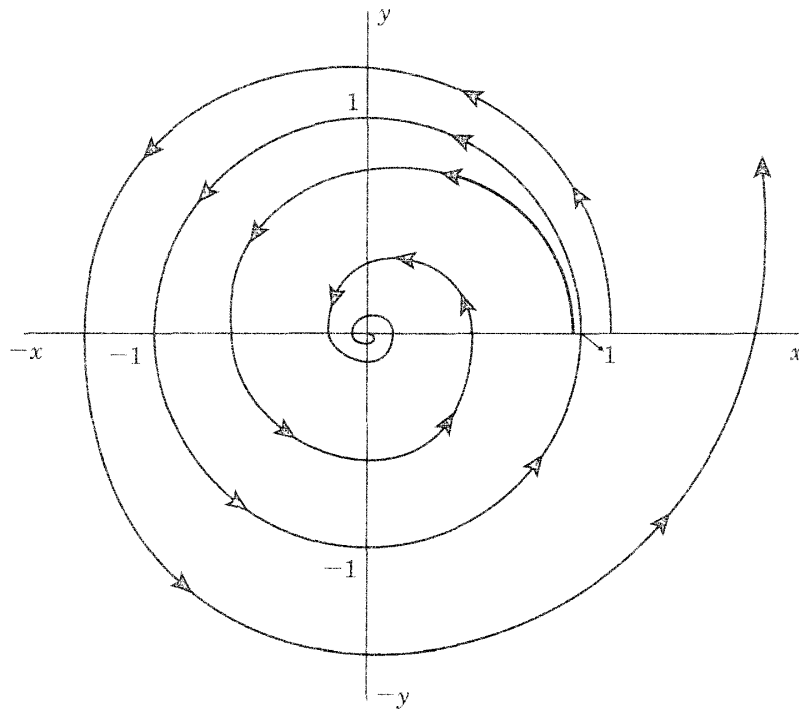
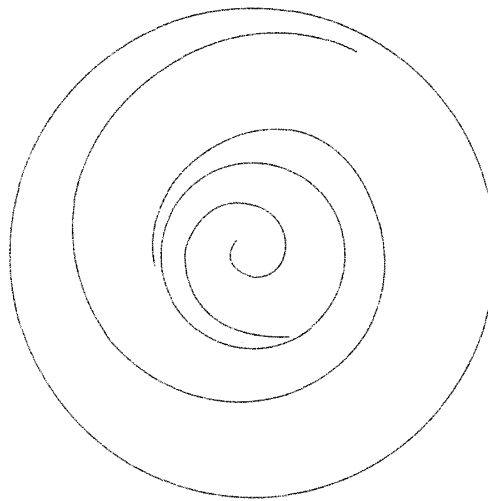


図 3 H. ポアンカレの描いた図 (1882年, p. 279, Fig. 26)



III. トポロジカルな分析

再度, H. ポアンカレ (1882) の 3 番目の例を提示する。

$$(I) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(x^2 + y^2 - 1) - y(x^2 + y^2 + 1) \\ \frac{dy}{dt} = x(x^2 + y^2 + 1) + y(x^2 + y^2 - 1) \end{cases} \quad (1)$$

この体系の特異点, つまり, $\frac{dx}{dt} = 0$ と $\frac{dy}{dt} = 0$ を満たす点を探してみよう。

$$x(x^2 + y^2 - 1) - y(x^2 + y^2 + 1) = 0 \quad (1)'$$

$$x(x^2+y^2+1)+y(x^2+y^2-1)=0 \quad (2)'$$

(1)' $\times(-y)+(2)'\times x$ より

$$(x^2+y^2)(x^2+y^2+1)=0$$

x, y は実数であるから $x^2+y^2+1 \neq 0$, よって, $x^2+y^2=0$ つまり, $x=0, y=0$

よって, 特異点は, 原点のみであることが理解される。原点の近傍における非線形微分方程式系 (I) の解の振る舞いを調べるために, 原点の近傍でテーラー展開したときの線形項は次のようになる。

$$(II) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x-y \\ \frac{dy}{dt} = x-y \end{cases}$$

(II) の係数行列は (13) となる。

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

この固有値 λ を調べたい。そのために次の固有方程式を解く。

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (14)$$

$(-1-\lambda)^2+1=0$ より固有値 λ は,

$$\lambda = -1 \pm i \quad (15)$$

λ の実数部は, マイナスなので, 縮小すること, あるいは, 沈み込むことを意味しているし, λ の虚数部は, 回転することを意味している。

[解曲線と半径 r の円との横断性]

原点を中心点とした半径 r の円 C を考える。即ち,

$$C: x^2+y^2=r^2 \quad \text{ただし } r>0 \quad (16)$$

ここで, 与えられた微分方程式系 (I) の解曲線が円 C をどのように横断するのかを調べてみよう。

円 C 上に点 $p=(a, b)$ をとった場合の, 点 p における円 C の接ベクトル $\vec{Z}$ を次のように定義する。

$$\vec{Z} = (-b, a) \quad (17)$$

他方, 円 C 上の点 $p=(a, b)$ における非線形微分方程式系 (I) の解曲線の接ベクトル $\vec{X}$ は, 次のようになる。

$$\vec{X} = (a(a^2+b^2-1)-b(a^2+b^2+1), a(a^2+b^2+1)+b(a^2+b^2-1)) \quad (18)$$

$\vec{Z}$ と $\vec{X}$ のノルム (ベクトルの大きさ) $\|\vec{Z}\|$ と $\|\vec{X}\|$ は, $\|\vec{Z}\|=r, \|\vec{X}\|=r\sqrt{2(r^4+1)}$ となる⁶⁾。

6) $\|\vec{Z}\|^2 = (-b)^2 + a^2 = b^2 + a^2 = r^2$ よって, $\|\vec{Z}\|=r, \|\vec{X}\|^2 = (a(r^2-1)-b(r^2+1))^2 + (a(r^2+1)+b(r^2-1))^2$
 $= (a^2+b^2)(r^2-1)^2 + (a^2+b^2)(r^2+1)^2$
 $= r^2(2r^4+2) = 2r^2(r^4+1)$

図 4

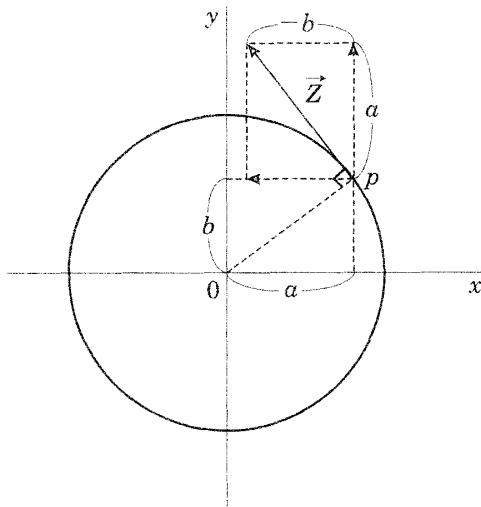
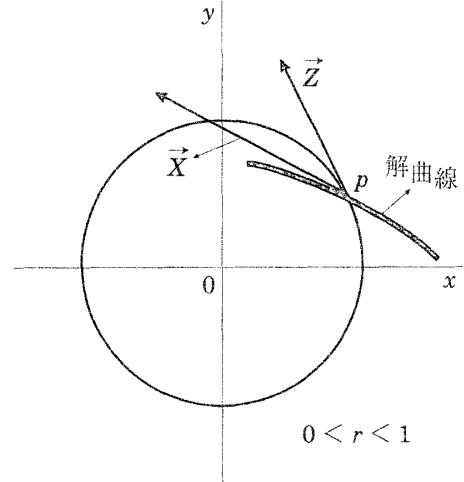


図 5



ここで、円周上の点 p における接ベクトル $\vec{Z}$ と、同じく点 p における解の接ベクトル $\vec{X}$ の (上下の) 位置関係を調べてみることによって、非線形微分方程式系 (I) の解の回転方向を確定したい。

$$\begin{aligned} \left| \frac{\vec{Z}}{\vec{X}} \right| &= \left| \begin{array}{cc} -b & -a \\ a(a^2+b^2-1)-b(a^2+b^2+1) & a(a^2+b^2+1)+b(a^2+b^2-1) \end{array} \right| \\ &= -ab(a^2+b^2+1)-b^2(a^2+b^2-1)-a^2(a^2+b^2-1)+ab(a^2+b^2+1) \\ &= -(a^2+b^2)(a^2+b^2-1) \end{aligned} \quad (19)$$

(19) 式の正、0 負の条件より回転の方向を確定したい。即わち、

$$(i) \quad 0 < r < 1 \text{ ならば, } \left| \frac{\vec{Z}}{\vec{X}} \right| > 0 \text{ となる。}$$

よって、(I) の系の解は、(図 5) に示されているように、円 C の外側から内側へ向けて横断することになる。

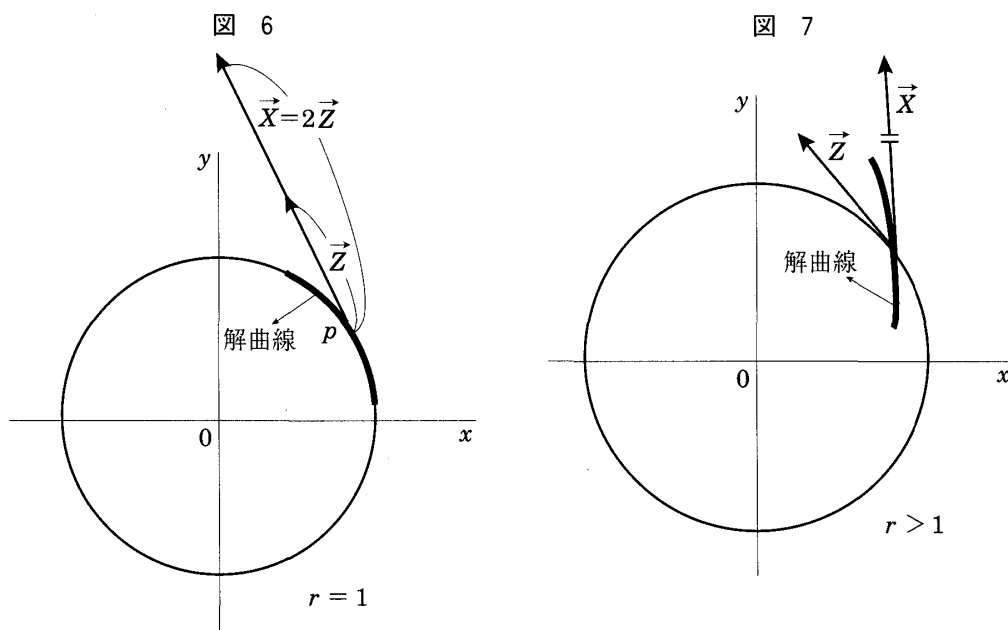
$$(ii) \quad r = 1 \text{ ならば, } \left| \frac{\vec{Z}}{\vec{X}} \right| = 0 \text{ となる。}$$

よって、(I) の系の解は、(図 6) に示されているように、同方向で $\vec{X} = 2\vec{Z}$ の関係を保持しつつ、円 C 上を左回りに回転することになる。

$$(iii) \quad r > 1 \text{ ならば, } \left| \frac{\vec{Z}}{\vec{X}} \right| < 0 \text{ となる。}$$

よって、(I) の系の解は、(図 7) に示されているように、円 C の内側から外側へ横切ることになる。

よって、 $\|\vec{X}\| = r\sqrt{2(r^2+1)}$



(図5), (図6), (図7)を1つの図にまとめると(図8)が得られる。言うまでもなく(図8)の意味するところは, ポアンカレの論文(1882)の例3 (p. 278)を解析的に解いて得られ

図 8⁷⁾

た(図2)と一致している。

つまり、出発点になる系の解が、たまたま、半径1の円周上にあった時にのみ、左回りの安定的な動きをとることになるが、一般的にはきわめて不安定な動きをとることになる。なぜなら、出発点になる解が、半径1のリミットサイクルのほんの少し内側から出発すれば、原点であるsinkの点に沈み込むような左回りの運動をすることになるし、逆に出発点になる解が、半径1のリミットサイクルのほんの少し外側から出発すれば、時間経過とともに、ますます半径1のリミットサイクルより遠ざかるように左回りで拡大するような運動をすることになるからである。

(図5)―(図8)における $\vec{Z}$ と $\vec{X}$ の上下関係は⁸⁾において証明を与える。

IV. R. F. ハロッドのアンチノミー理論と H. ポアンカレの動学モデル

或る系やシステムの動学的安定／不安定性に関する経済学での議論の一つに、R. F. ハロッドのアンチノミー理論がある。われわれは、その概要をまずレビューして、これまでのポアンカレ

ゝれらベクトルのノルム(の大小関係)は正しくは描けていない。正しくは6)を参照のこと。

8) [(図5)のように $\vec{X}$ が $\vec{Z}$ より常に下にくることの証明]

$p=(a, b)$ を第1象限にとる。よって、 $a>0, b>0$

$a^2+b^2=r^2$ で $0<r<1$ のケース つまり(図5)のケースを想定する。

$$\vec{Z}=(-b, a) \quad (17)$$

$$\vec{Z} \text{の傾きは} -\frac{a}{b} \quad (17)'$$

$$\begin{aligned} \vec{X} &= \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) \\ &= (a(a^2+b^2-1)-b(a^2+b^2+1), a(a^2+b^2+1)+b(a^2+b^2-1)) \\ &= (a(r^2-1)-b(r^2+1), a(r^2+1)+b(r^2-1)) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\vec{X} \text{の傾きは} \frac{a(r^2+1)+b(r^2-1)}{a(r^2-1)-b(r^2+1)} \quad \text{分子・分母を}(r^2+1)\text{で割る}$$

$$= \frac{a+b \frac{r^2-1}{r^2+1}}{-b+a \frac{r^2-1}{r^2+1}} \quad (18)'$$

(17)'―(18)'の値の正負でもって $\vec{Z}$ と $\vec{X}$ との上下関係を確定したい。

$$\begin{aligned} \frac{-a}{b} - \frac{a+b \frac{r^2-1}{r^2+1}}{-b+a \frac{r^2-1}{r^2+1}} &= \frac{ab - a^2 \frac{r^2-1}{r^2+1} - ab - b^2 \frac{r^2-1}{r^2+1}}{b(-b+a \frac{r^2-1}{r^2+1})} \\ &= \frac{-(a^2+b^2) \frac{r^2-1}{r^2+1}}{-b^2+ab \frac{r^2-1}{r^2+1}} < 0 \end{aligned} \quad (A)$$

ここで、 $a>0, b>0, 0<r<1$ を考慮すれば、分子 >0 、分母 <0 で $\vec{Z}$ の傾きと $\vec{X}$ の傾きとの差は負となる。

よって、 $\vec{Z}$ は $\vec{X}$ より(図5)のように上位に位置しなくてはならない。

また、(A)式において、

$r=1$ なら、(A)=0となり $\vec{Z}$ と $\vec{X}$ は(図6)のように重なるし、(18)式より $\vec{X}=2\vec{Z}$ である。

$r>1$ なら、(A) >0 となり $\vec{Z}$ は $\vec{X}$ より(図7)のように下位に位置しなくてはならない。

(非線形微分方程式) モデルとのシステム動学としての理論的関連をアナログカルに検討してみよう。

(1) R. F. ハロッドのアンチノミー理論⁹⁾

資本主義動態経済は、本質的には不安定なものであるという主張を R. F. ハロッドは以下のようなノーマティブな仮定の下で説明する。

(仮定)

- ① 利子率の不変性, ② 技術的進歩の中立性, ③ 平均 (= 限界) 資本係数は定数,
- ④ 平均 (= 限界) 貯蓄率 s は定数

(記号)

G : 現実成長率, G_w : 適正成長率 (資本の完全利用成長率), C : 現実資本係数,

Cr : 必要資本係数, G_n : 自然成長率 (労働の完全雇用成長率)。

[短期]

$$GC = G_w Cr = \bar{s} \quad \text{基本方程式}$$

(i) 初期経済状態が $G > G_w$ なら;

基本方程式を満たすには, $Cr > C$ とならなくてはならない。つまり, 投資が (投資を呼んで) 増々促進される。そのことは, この基本式を適切に満たす以上に $Cr > C$ の状態をつくり出す可能性が極めて高い¹⁰⁾。そのことが結果的には, 初期の $G > G_w$ のギャップを (埋めるところか逆に) 増々拡大してインフレ経済に突入するメカニズムをつくり出すことになるだろう。

(ii) 初期経済状態が $G < G_w$ なら;

基本方程式を満たすには, $Cr < C$ となるように投資が抑制される。そのことは, 必要以上に $Cr < C$ の状態をつくり出す可能性がきわめて高い。そのことが結果的には, 初期の $G < G_w$ のギャップを (埋めるところか逆に) 増々拡大してデフレ経済に突入するメカニズムをつくり出すことになるだろう。

かくして, 資本主義動態経済は, $G = G_w$ の時のみインフレもデフレもなく安定であるが, その状態は knife edge の上を綱渡りする程に稀有なことである。むしろ, 現実の資本主義動態経済は, 初期時点での現実成長率 G と適正成長率 G_w とのギャップが如何に小さかろうとも, それらの乖離は増々増幅されるメカニズムが働いて, インフレ経済かデフレ経済を常態とする程に不安定なものであるという主張である。

9) R. F. Harrod (1939) "An Essay in Dynamic Theory" *Economic Journal*, 49 (June), pp. 14-33.

R. F. Harrod (1942) *Toward a Dynamic Economics: Some Recent Development of Economic Theory and their Application to Policy*, London, Macmillan.

10) 投資を行う個々の企業家は, 事後的はいざ知らず, 事前的には, マクロ経済全体の Cr や C の値を知らないからである。また, 家計が決めるであろう s の値を事前的に知る由もないからである。

[長期]

$$G_n C_r = G_n C_r = \bar{s}$$

資本主義動態経済の長期的不安定性の根拠を、自然成長率 Gn と適正成長率 Gw との乖離の拡大メカニズムに求める。しかしながら基本的には、その理論的メカニズムも、 G と Gw との乖離が拡大していくメカニズムが働くことで説明される。従って長期的にも資本主義動態経済はきわめて不安定であることが主張される。

(2) アンチノミー理論とポアンカレ動学モデル

R. F. ハロッドのアンチノミー理論と H. ポアンカレの（非線形微分方程式）モデルとのシステム動学論としてのアナロジカルな関係は、きわめて明白である。われわれは、H. ポアンカレの帰結を明解に伝えている（図 2）に即してアンチノミー理論を適用してみよう。

議論の出発点を点 $(1, 0)$ にとる。適正成長率 Gw の経路は半径 1 の円であるとする。

- (i) 現実成長率 G の出発点が点 $(1, 0)$ で、常に $G=Gw$ の関係を維持して推移する時にのみ、半径 1 の円周は、理想的にして安定した成長経路であると同時に安定したリミットサイクルでもある。しかしながら、この半径 1 の円上を $G=Gw$ の関係を維持したまま運動することは、knife edge の上を綱渡りするほどに至難なことである。
- (ii) ほんの少し、 G が Gw の経路からずれてでもしまえば、——むしろ、現実経済は G と Gw とが一致していないことが常態であるが—— G と Gw との乖離の大きさは拡大していくメカニズムが働くということであった。 G が点 $(1, 0)$ のごくわずか内側か、或いは、ごくわずか外側から出発したとすれば、 G と Gw との径時的乖離の大きさは飛躍的に拡大して、系は不安定なものになっていく様子を（図 2）は雄弁に物語っている。

即わち、われわれがⅢ章までに分析・検討してきたポアンカレ動学モデルは、資本主義動態経済は本来不安定なものであるというハロッドのアンチノミー理論をアナロジカルな意味で有効に支持していることが理解できた。

V. 結びに代えて

本稿を閉じるにあたり、大きく次の 2 点を結論として指摘しておきたい。

第 1 点目は、H. ポアンカレの非線形動学システムの径時的インプリケーションを示す図についてである。われわれの分析から得られた最終的図は、（図 2）——或いは（図 8）——である。それ対応して H. ポアンカレが掲げた図は、（図 3）である。H. ポアンカレの図でのリミットサイクルの内外のうず巻き方向は誤りである。われわれの（図 2）のように左巻きのうず巻きが正しいことを指摘しておきたい。

第 2 点目は、H. ポアンカレの動学モデルと R. F. ハロッドの資本主義動態経済との関連につい

てである。すでに前章でシステム動学論として両者をアナログカルに議論してきたが、事柄の重要性に鑑み、ここではこの点に関して次の4つのポイントを再度、確認しておきたい。

- ① 安定的にして理想的な動的経路がないわけではない。しかし、現実の経済なり或るシステムがその経路上を運動することは、knife edge 上の綱渡りほどに困難にして 稀有なことである。
- ② むしろ、現実の経済なりシステムの動態は、その理想的経路からの乖離の幅を拡大させるメカニズムを内含していると考えべきである。
- ③ 従って、初期状態での、ごくわずかのギャップが時間の経過と共に想像もつかぬ大きな誤差として結果することになる。即わち、或る動学システムないし、系は、本質的には不安定なものであると考えざるを得ない。
- ④ これら3点を、H. ポアンカレの動学モデルは有効に支持しているということが本稿の分析・検討によって明らかとなった。

参 考 文 献

1. L. Brand (1996): *Differential and Difference Equation*, John Wiley & Sons, Inc., New York.
2. R. M. Goodwin (1990): *Chaotic Economic Dynamics*. Oxford Chareon Press. (グッドウィン著, 有賀祐二訳『カオス経済動学』多賀出版, 1992年)
3. S. Lefschetz (1962): *Differential Equation: Geometric Theory*, Second Edition, Interscience, New York.
4. H. W. Lorenz (1989, 93): *Nonlinear Dynamic Economics and Chaotic Motion*, Springer-Verlag Berlin, Heiderberg (H. W. ローレンツ著, 小野崎保, 笹倉和幸訳『非線形経済学とカオス』日本経済評論社, 2000年。)
5. ——— (1994) "Analytical and Numerical Methods in the Study of Nonlinear Dynamical Systems in Keynesian Macromonics," In: Semmler, W. (ed): *Business Cycles: Theory and Emypirical Methods* Dorrecht: Kluwer.
6. 丹羽敏雄著『微分方程式と力学型の理論入門——非線形現象の解析にむけて——』遊星社, 1990年。
7. Pierre. N. V. Tu (1992): *Dynamical Systems: An Introduction with Applications in Economics and Bilogy*, Springer-Verlag-Berlin (ピエール N. V. チュー著, 永田, 堂谷, 笹倉, 大阿久共訳『経済分析ダイナミカルシステム』文化書房博文社, 1997年。)
8. H. Poincare' (1882), 'Courbes De'finies par une E'quation Diffe'rentielle' *Journal de Mathe'matiques pures et Applique'es*, Annee. Paris, pp. 278~9.
9. 高橋陽一郎著『力学と微分方程式』岩波書店, 1996年。
10. S. Wiggins (1990): *Introduction to Applied Nonlinear Dynamic Systems and Chaos*, Springer-Verlargo, New York (S. ウィギンス著, 丹羽敏雄監訳『非線形の力学的とカオス 上』シュプリンガー・フェアラーク東京, 1993年。)

* この研究は、4年前に始めた本学部、伊藤敏和教授との「複雑系」研究会の成果の一部である。記して感謝したい。言うまでもなく、あり得べき誤りは、すべて筆者の責任である。

(受付 2003年2月3日)