

〈研究ノート〉

実ロジスティック方程式と 複素ロジスティック方程式に関する理論的再検討

寺 田 宏 洲

目 次

I. はじめに	III. 複素ロジスティック方程式
II. 実ロジスティック方程式	(1) 導 出
(1) 導 出	(2) 一般解とその振る舞い：
(2) 一般解とその振る舞い	特に発散するケース

I. は じ め に

われわれは、21世紀における社会科学、特に経済学への応用のために、従来の経済学の理論に対するアプローチを2つの方向で拡張しようと考えている。1つは、実数でしか扱われて来なかった従来のモデルを複素数のモデルに拡張すること。2つ目は、線形動学が主流であった動学理論を一般形としての非線形動学に拡張すること。この2つである。

この2つの方向を念頭において、われわれは、その第一歩として昨年、「環境分析のための複素ロジスティック方程式」([9]を見よ)を発表した。しかしながら、その論文は、B5サイズで6ページのスペースしか与えられなかった。従って、その論文のもつ重要性和議論の正確さに比べて、論の展開が必ずしも丁寧であったとは思われない。

よって、その弊害を除くために再度、ロジスティック方程式を実数と複素数に分けて取り上げることによって、解の興味深い振る舞いを理論的に且つ、丁寧に検討することが本稿の目的である。言うまでもなく、理解を促進する上で必要な議論は新たに追加されることになるし、論述は、数式一図一言の三位一体を図りつつ、きわめて説得的になされる。

II. 実ロジスティック方程式

(1) 導 出

経済変数としての N が時間 t に関してロジスティックカーブ (Sカーブ) を描くためには、

$$\frac{dN}{dt} = aN + bN^2 \quad \textcircled{1}$$

において、 $a > 0$, $b < 0$ である必要がある。実時間 t を $+\infty$ にとったときの N の最大値を $\bar{K}$ とする。最大値 $\bar{K}$ では、次式が成立する。

$$\left. \frac{dN}{dt} \right|_{N=\bar{K}} = a\bar{K} + b\bar{K}^2 = 0$$

$$\text{よって, } b = -\frac{a}{\bar{K}} \quad (2)$$

②式を①式に代入すれば

$$\frac{dN}{dt} = aN - \frac{a}{\bar{K}} N^2 = a \left(1 - \frac{N}{\bar{K}} \right) N, \text{ ただし, } \bar{K} > 0$$

が得られる ([8] pp. 158-161 を見よ)。

この式の両辺に $\frac{1}{\bar{K}}$ を掛け、 $\frac{d}{dt} \left(\frac{N}{\bar{K}} \right) = a \left(1 - \frac{N}{\bar{K}} \right) \frac{N}{\bar{K}}$ と変形し、改めて $\frac{N}{\bar{K}}$ を N として表示した次の(1)式を実ロジスティック方程式と考えることにする。或いは、ロジスティックカーブの最大値を $\bar{K}=1$ に標準化したときのロジスティック方程式を議論の出発点にとる。

$$\frac{dN}{dt} = a(1-N)N \quad \text{ただし } a > 0 \quad (1)$$

(2) 一般解とその振る舞い

(1)式について、初期値 N_0 を明示的に含む N の一般解は、次の(2)式になる。ただし、 $N_0 \neq 0, 1$ とする。

$$N(t) = \frac{\frac{N_0}{1-N_0}}{e^{-at} + \frac{N_0}{1-N_0}} \quad (2)$$

言うまでもなく $N_0=1$ のときは $N(t) \equiv 1$ であり、 $N_0=0$ のときは $N(t) \equiv 0$ となる。

なぜ、一般解が(2)式の形になるのかを、初期値 N_0 の取り得る範囲を以下の(i)~(iii)にわたる3つのケースに分けて考察したい。

まず、(1)式を次のように表示し直す。

$$\frac{dN}{(1-N)N} = a \cdot dt \quad \text{左辺を変数分離する。}$$

$$\frac{dN}{N} + \frac{dN}{1-N} = a \cdot dt \quad \text{両辺の積分をとる。}$$

(i) $0 < N_0 = N_2 < 1$ にとれば、解 $N(t)$ は、 $0 < N(t) < 1$ にとどまる。

$$\int_{N_2}^N \left(\frac{dN}{N} - \frac{d(1-N)}{1-N} \right) = \int_0^t a dt$$

$$\log_e N - \log_e N_2 - (\log_e(1-N) - \log_e(1-N_2)) = at$$

$$\log_e \frac{N}{N_2} - \log_e \frac{1-N}{1-N_2} = at$$

$$\log_e \left(\frac{N}{N_2} \times \frac{1-N_2}{1-N} \right)$$

$$\frac{N}{1-N} = \frac{N_2}{1-N_2} \cdot e^{at}$$

これを N について解くと、次式を得る。

$$N(t) = \frac{\frac{N_2}{1-N_2}}{e^{-at} + \frac{N_2}{1-N_2}} \quad (2)'$$

ここで、 $0 < N(t) < 1$ を満たす実時間 t の範囲を求めると、 $-\infty < t < +\infty$ であることが確認できる。

(ii) $1 < N_0 = N_3$ にとれば、解 $N(t)$ は、 $N(t) > 1$ の範囲にとどまる。

$$\begin{aligned} \int_{N_3}^N \left(\frac{dN}{N} - \frac{d(N-1)}{N-1} \right) &= \int_0^t a \cdot dt \\ \log_e N - \log_e N_3 - (\log_e(N-1) - \log_e(N_3-1)) &= at \\ \frac{N}{N_3} \bigg/ \frac{N-1}{N_3-1} &= e^{at} \end{aligned}$$

これを N について解くと、次式を得る。

$$N(t) = \frac{\frac{N_3}{N_3-1}}{\frac{N_3}{N_3-1} - e^{-at}} = \frac{\frac{N_3}{1-N_3}}{e^{-at} + \frac{N_3}{1-N_3}} \quad (2)''$$

ここで、 $N(t) > 1$ を満たす実時間 t の範囲を求めたい。

(2)''式の最初の形に着目する。分母が正であれば $N(t) > 1$ を満たすことになる^[注1]。

よって、分母 > 0 を満たす t が求めるものである。

$$\begin{aligned} \frac{N_3}{N_3-1} - e^{-at} &> 0 \\ e^{-at} &< \frac{N_3}{N_3-1} && \text{両辺の自然対数をとる。} \\ -at &< \log_e \left(\frac{N_3}{N_3-1} \right) && a > 0 \text{ であった。よって、} \\ t &> -\frac{1}{a} \log_e \left(\frac{N_3}{N_3-1} \right) \end{aligned}$$

(iii) $N_0 = N_1 < 0$ にとれば、解 $N(t)$ は、 $N(t) < 0$ の範囲にとどまる。

$$\begin{aligned} \int_{N_1}^N \left(\frac{d(-N)}{-N} - \frac{d(1-N)}{1-N} \right) &= \int_0^t a \cdot dt \\ \log_e(-N) - \log_e(-N_1) - (\log_e(1-N) - \log_e(1-N_1)) &= at \\ \log_e \left(\frac{-N}{-N_1} \right) - \log_e \left(\frac{1-N}{1-N_1} \right) &= at \\ \frac{N}{1-N} \times \frac{1-N_1}{N_1} &= e^{at} \\ N(t) &= \frac{\frac{N_1}{1-N_1}}{e^{-at} + \frac{N_1}{1-N_1}} \quad (2)''' \end{aligned}$$

$N(t) < 0$ となる実時間 t の範囲は、分子は常に負であるから、分母が常に正であればよい。よって、求める t の範囲は次の不等式より求まることになる。

$$e^{-at} + \frac{N_1}{1-N_1} > 0$$

$$e^{-at} > \frac{-N_1}{1-N_1} \quad \text{両辺の自然対数をとって,}$$

$$t < -\frac{1}{a} \log_e \left(\frac{-N_1}{1-N_1} \right)$$

これまでの議論から、ロジスティック方程式(1)式について、初期値 N_0 を明示的にもつ一般解は、 N_0 の取り得る範囲によって次のように整理される。

(i) $0 < N_0 = N_2 < 1$ のとき,

$$N(t) = \frac{\frac{N_2}{1-N_2}}{e^{-at} + \frac{N_2}{1-N_2}} \quad (2)'$$

(ii) $N_0 = N_3 > 1$ のとき,

$$N(t) = \frac{\frac{N_3}{1-N_3}}{e^{-at} + \frac{N_3}{1-N_3}} = \frac{\bar{C}}{e^{-at} + \bar{C}} \quad [\text{注2}] \quad (2)''$$

$$\text{ただし, } \bar{C} = \frac{N_3}{1-N_3} < 0$$

(iii) $N_0 = N_1 < 0$ のとき,

$$N(t) = \frac{\frac{N_1}{1-N_1}}{e^{-at} + \frac{N_1}{1-N_1}} = \frac{\bar{C}}{e^{-at} + \bar{C}} \quad [\text{注3}] \quad (2)'''$$

$$\text{ただし, } \bar{C} = \frac{N_1}{1-N_1} < 0$$

(iv) N_0 のとき $N(t) \equiv 0$

(v) N_1 のとき $N(t) \equiv 1$

これらを図示すると、図1が得られる。初期値 N_0 のとりうる範囲によって、ロジスティック方程式(2)式の実時間 t に関する「振る舞い」は、大きく異なることに留意すべきである。

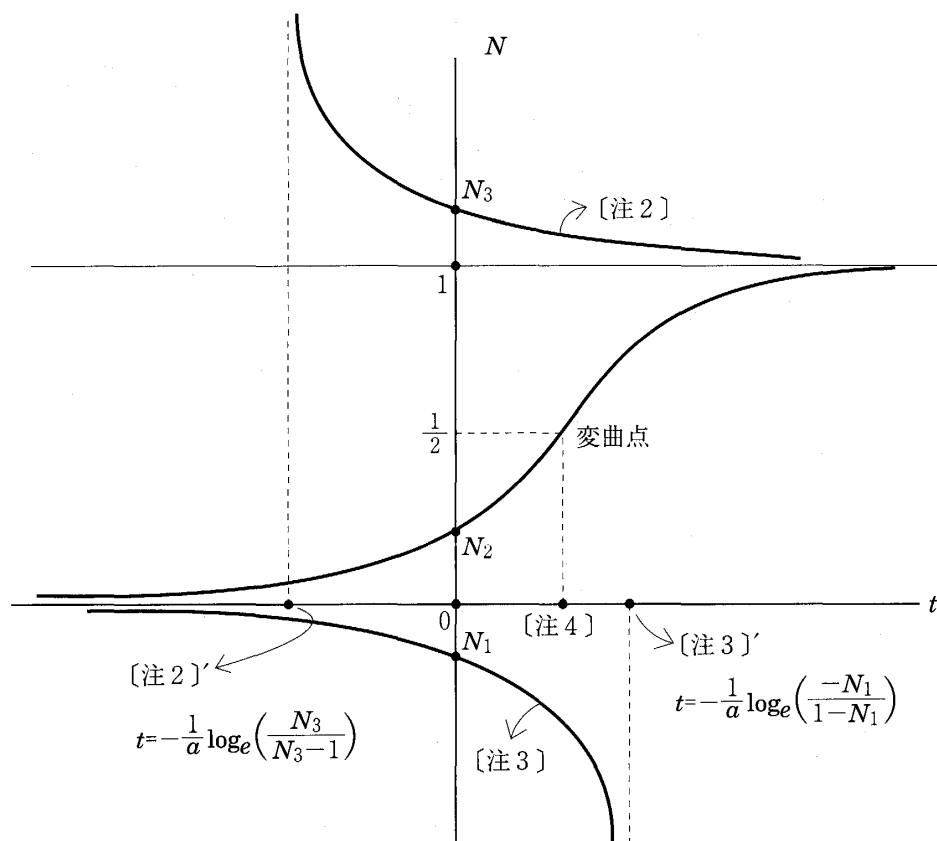


図 1

III. 複素ロジスティック方程式

(1) 導 出

ここでは、実数表示のロジスティック方程式(1)を複素数表示のロジスティック方程式に拡張して、その解の振る舞い——特に、発散するケース——を調べてみよう。

複素数 Z , T , α をそれぞれ $Z = N + \sqrt{-1}M$, $T = t + \sqrt{-1}s$, パラメタ $\alpha = a + \sqrt{-1}b$ と考える。言うまでもなく、 N , M , t , s , a , b それぞれは、実数である。すると、基本的には実数表示のロジスティック方程式(1)を導出したときと同じ考え方で、複素ロジスティック方程式も次式の形で与えられる。

$$\frac{dZ}{dT} = \alpha(1-Z)Z \quad (3)$$

(3)式の右辺である

$$\begin{aligned} \alpha(1-Z)Z &= -aZ^2 + \alpha Z = -\alpha(Z^2 - Z) = -\alpha\left\{\left(Z - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right\} \\ &= -\alpha\left(Z - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\alpha}{4} \end{aligned} \quad (3)'$$

ここで、 $Z - \frac{1}{2} = \frac{-\omega}{\alpha}$ とおき、つまり、 $Z = \frac{-\omega}{\alpha} + \frac{1}{2}$ とおき(3)'式に代入する。

$$\begin{aligned}\frac{dZ}{dT} &= -\alpha\left(Z - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\alpha}{4} \\ &= -\alpha\left(-\frac{\omega}{\alpha}\right)^2 + \frac{\alpha}{4} = -\frac{\omega^2}{\alpha} + \frac{\alpha}{4}\end{aligned}\quad \textcircled{1}$$

$$Z(T) - \frac{1}{2} = -\frac{\omega(T)}{\alpha} \quad \text{ここで } \bar{\alpha} \text{ と考える。}$$

両辺を複素時間 T で全微分する。

$$\frac{dZ}{dT} = -\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{d\omega}{dT} \quad \textcircled{2}$$

①=②なので

$$\begin{aligned}-\frac{\omega^2}{\alpha} + \frac{\alpha}{4} &= -\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{d\omega}{dT} \quad \text{より} \\ \frac{d\omega}{dT} &= \omega^2 - \frac{\alpha^2}{4}, \quad \text{ただし } \bar{\alpha}\end{aligned}\quad (4)$$

を得ることになる。

(4)式の差分方程式をつくるために、(4)式を次のように書き換える。

$$\frac{\omega_{n+1} - \omega_n}{\Delta T} = \omega_n^2 - \frac{\alpha^2}{4}, \quad \text{ただし } \bar{\alpha} \quad (4)'$$

$$\omega_{n+1} - \omega_n = \Delta T \left(\omega_n^2 - \frac{\alpha^2}{4} \right),$$

$$\omega_{n+1} = \omega_n + \Delta T \cdot \omega_n^2 - \frac{\alpha^2}{4} \cdot \Delta T, \quad \text{両辺に } \Delta T \text{ を掛ける。}$$

$$\begin{aligned}\Delta T \cdot \omega_{n+1} &= \Delta T \cdot \omega_n + (\Delta T \cdot \omega_n)^2 - \frac{\alpha^2}{4} \cdot (\Delta T)^2 \\ &= \left(\Delta T \cdot \omega_n + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} - \frac{\alpha^2}{4} \cdot (\Delta T)^2 \quad \text{両辺の形を合わせる。}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta T \cdot \omega_{n+1} + \frac{1}{2} &= \left(\Delta T \cdot \omega_n + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} - \frac{\alpha^2}{4} \cdot (\Delta T)^2 + \frac{1}{2} \\ &= \left(\Delta T \cdot \omega_n + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} - \frac{\alpha^2}{4} \cdot (\Delta T)^2\end{aligned}$$

ここで、 $\Delta T \cdot \omega_{n+1} + \frac{1}{2} = U_{n+1}$, $\Delta T \cdot \omega_n + \frac{1}{2} = U_n$, $\frac{1}{4} - \frac{\alpha^2}{4} \cdot (\Delta T)^2 = C$ (定数) とおくと、次式が求まる。

$$U_{n+1} = U_n^2 + C \quad (5)$$

この写像の Julia 集合 J_c の C をパラメーターにとったときの変化と、この写像を J_c 上に限定したときの解のカオティックな振る舞いは、多くの研究者によって考察されている ([1], [3] を見よ)。

(2) 一般解とその振る舞い：特に発散するケース

ところで、(3)式において、初期値 Z_0 を明示的に含む一般解は、(2)式を導出するときと同様にして、 $Z_0 \neq 0, 1$ のとき次式の(6)式で表される。

$$Z(T) = \frac{\frac{Z_0}{1-Z_0}}{e^{-\alpha T} + \frac{Z_0}{1-Z_0}}, \text{ ただし } Z_0 \neq 0, 1 \quad (6)$$

(6)式の分母を零にする複素時間 T の値で、複素解 Z は発散することになる。その集合 Ω は、次のように表現できる。

$$\Omega = \left[T \in \mathbb{C} \mid e^{-\alpha T} + \frac{Z_0}{1-Z_0} = 0 \right] \quad (7)$$

$$= \left[-\alpha T = \log_e \left| \frac{-Z_0}{1-Z_0} \right| + \sqrt{-1} \left(\arg \left(\frac{-Z_0}{1-Z_0} \right) + 2\pi k \right) \mid k \text{ は整数} \right] \quad [\text{注5}]$$

$$= \left[T = -\frac{1}{\alpha} \left\{ \log_e \left| \frac{-Z_0}{1-Z_0} \right| + \sqrt{-1} \left(\arg \left(\frac{-Z_0}{1-Z_0} \right) + 2\pi k \right) \mid k \text{ は整数} \right\} \right] \quad (7)'$$

ただし、 $\arg \left(\frac{-Z_0}{1-Z_0} \right)$ は、 $\frac{-Z_0}{1-Z_0}$ の偏角である。

(7)式の条件式 $e^{-\alpha T} + \frac{Z_0}{1-Z_0} = 0$ を $e^{-\alpha T} = \frac{-Z_0}{1-Z_0}$ と考え両辺の自然対数をとると、

$$-\alpha T = \log_e \left(\frac{-Z_0}{1-Z_0} \right), \text{ 複素数の対数表示は次のようになる。}$$

$$= \log_e \left| \frac{-Z_0}{1-Z_0} \right| + \sqrt{-1} \cdot \left(\arg \left(\frac{-Z_0}{1-Z_0} \right) + 2\pi k \right) \quad (8)$$

ここで、複素数 α , T を実数表示にする。

$$-\alpha T = -(a + \sqrt{-1}b)(t + \sqrt{-1}s)$$

$$= -(as - bt) - \sqrt{-1}(bs + at) \quad (9)$$

(8)=(9)より次の2つの式が成立する。

$$as - bt = \log_e \left| \frac{-Z_0}{1-Z_0} \right| \quad (10)$$

$$bs + at = -\arg \left(\frac{-Z_0}{1-Z_0} \right) - 2\pi k \quad (11)$$

T -平面に(6)式の複素解 Z が発散する集合 Ω を描くことは、即わち、(10), (11)式を描くことである。

よって、図2を得る。

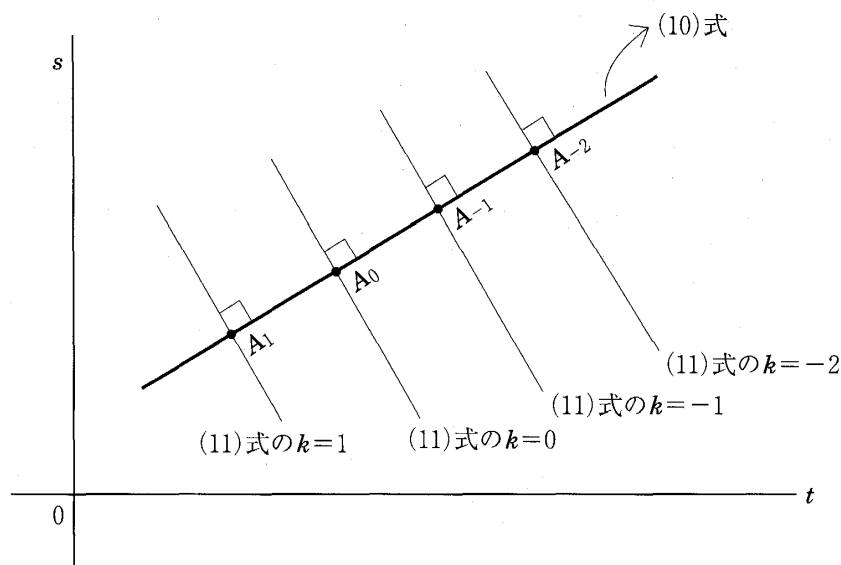


図 2

ここで,

$$\Omega = \{\dots, A_{-2}, A_{-1}, A_0, A_1, A_2, \dots\} \quad (12)$$

つまり、図 2 は、(6) 式の複素解 Z が有用な複素時間 T の下で発散する点は、(12) 式が示すように可算無限個あることを教えている。言うまでもなく、 A_0, A_{-1}, A_{-2} 各点の間隔は、全て 2π である。

いま、図 2 における (10) 式上の A_0 点を出発し、次の発散する A_{-1} 点に到達する時の解 Z の運動を考えてみよう。 θ は $0 \leq \theta \leq 2\pi$ の範囲で動かすものとする。(6) 式を次のように展開する。

$$Z = \frac{\frac{Z_0}{1-Z_0}}{e^{-\alpha T} + \frac{Z_0}{1-Z_0}} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{Z_0}{1-Z_0}}{e^{\log_e \left| \frac{-Z_0}{1-Z_0} \right| + \sqrt{-1} \left(\arg \left(\frac{-Z_0}{1-Z_0} \right) - \theta \right)} + e^{\log_e \left| \frac{Z_0}{1-Z_0} \right| + \sqrt{-1} \left(\arg \left(\frac{Z_0}{1-Z_0} \right) \right)}} \quad [\text{注 6}] \\ &= \frac{\frac{Z_0}{1-Z_0}}{\left| \frac{-Z_0}{1-Z_0} \right| \left\{ e^{\sqrt{-1} \left(\arg \left(\frac{-Z_0}{1-Z_0} \right) - \theta \right)} + e^{\sqrt{-1} \left(\arg \left(\frac{Z_0}{1-Z_0} \right) \right)} \right\}} \quad (13) \end{aligned}$$

$$|Z| = \frac{1}{1 \cdot \left| e^{\sqrt{-1} \left(\arg \left(\frac{-Z_0}{1-Z_0} \right) - \theta \right)} + e^{\sqrt{-1} \left(\arg \left(\frac{Z_0}{1-Z_0} \right) \right)} \right|} \quad (14)$$

(14) 式の $|Z|$ の動きを調べるためには、分子が 1 であるので、分母の動きを考察すればよい。

(14) 式の方母の第 1 項の動きを図示すると、図 3 のようになる。

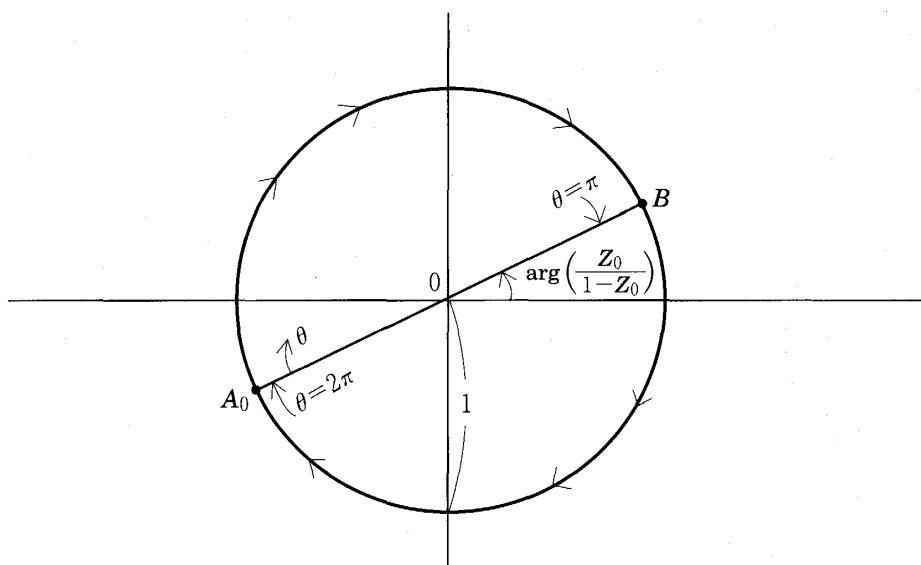


図 3

A 点: $1 \cdot e^{\sqrt{-1} \arg \frac{-Z_0}{1-Z_0}}$ で $\theta = 0$ B 点: $1 \cdot e^{\sqrt{-1} \arg \frac{Z_0}{1-Z_0}}$ 上の定数

即わち, $\theta = 0$ である出発点の A 点は, 半径 1 の円周上を右回りで回転している。 θ を π 回転させた時の B 点は, A 点と原点对称になっている。これは図 4 の点線で描かれた半径 1 の円で示される。

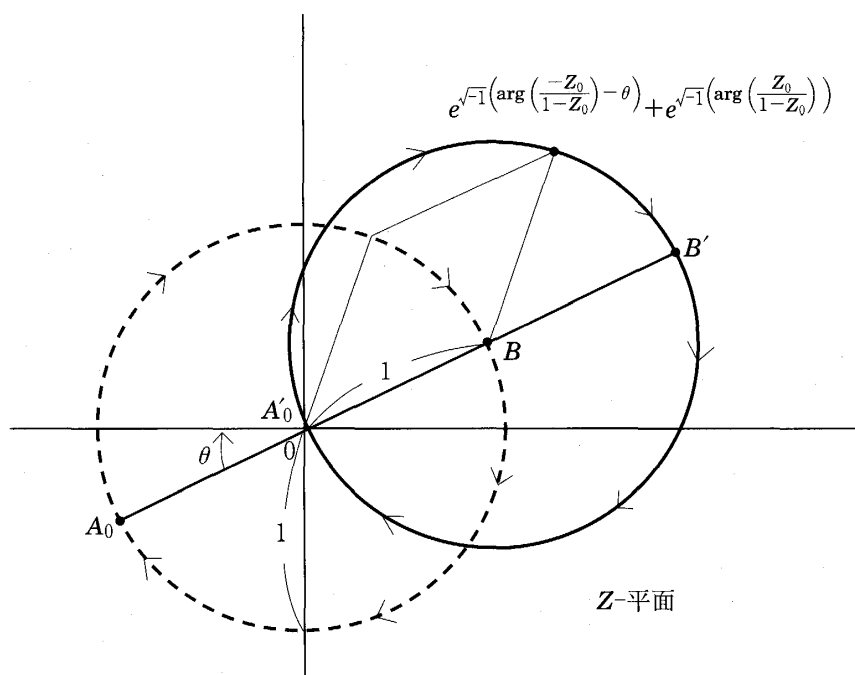


図 4

従って, (14) 式の分母全体の動きは, 図 4 で点線で描かれている時計回りで回転する半径 1 の円を, $\arg\left(\frac{Z_0}{1-Z_0}\right)$ の方向に (定数である B 点の方向に) 半径 1 だけ平行移動することによって求まる。すなわち, 図 4 での実線で描かれる円の動きが (14) 式の分母全体の動きである。具体的には次のようになる。

出発点である A'_0 点では, $\theta=0$ であるので A'_0 点と B' 点とは原点对称になることから (14) 式の分母は 0 になる。そのことは, $|Z|$ が発散・爆発することを意味する。

θ が π 回転した実線の円での B' 点における (14) 式の分母は, 半径 1 + 半径 1 の 2 となり, $|Z| = \frac{1}{2}$ となる。

更に θ が π 回転すると, 出発点である A'_0 点 (図 2 で言えば A_{-1} 点) に戻ってくることになるので, (14) 式の分母は再び 0 になる。そのことは, $|Z|$ が再び発散・爆発することを意味する。

(14) 式で示される $|Z|$ の動きを, 複素解 Z が発散する図 2 での $\dots, A_1, A_0, A_{-1}, A_{-2}\dots$ との関連で描き直したものが図 5 である。

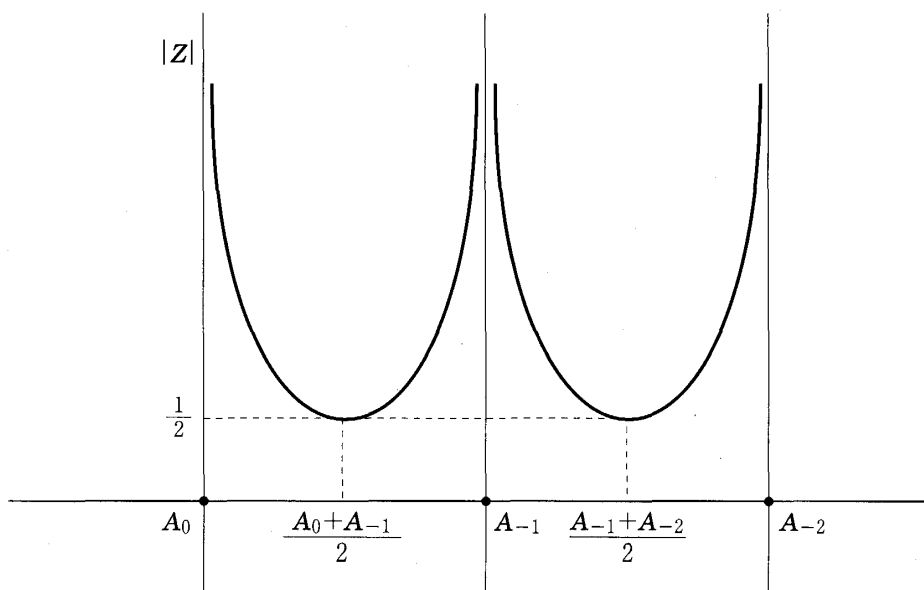
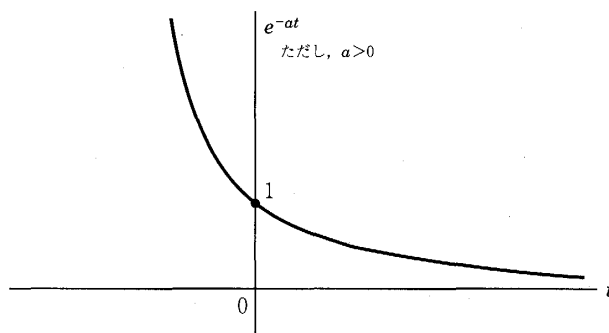


図 5

[注 1]

e^{-at} , (ただし $a > 0$) は, $+\infty$ から 0 までの値を図のようにとりうるからである。



[注 2]

初期値 N_0 が図 1 の N_3 点を通る曲線の導出。

$$N(t) = \frac{\frac{N_0}{1-N_0}}{e^{-at} + \frac{N_0}{1-N_0}}, \quad \text{ただし } a > 0 \quad (2)$$

(2)式の初期値 N_0 を $N_3 > 1$ にとる。

$$\frac{\bar{N}_3}{1-\bar{N}_3} = C < 0 \text{ の定数となる。よって,} \quad (2)$$

$$N(t) = \frac{C}{e^{-at} + C}, \quad \text{ただし } C < 0 \quad (2)'$$

(2)'式の形状を確定するために、(2)'式の実時間 t に関する一次微分と二次微分それぞれの符号を調べたい。

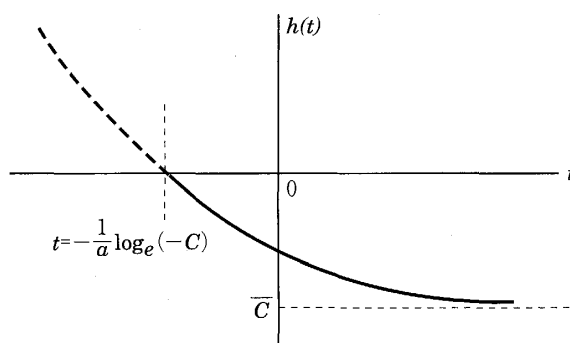
$$(i) \quad \frac{dN}{dt} = \frac{-C \cdot e^{-at} \cdot (-a)}{(e^{-at} + C)^2} = \frac{C \cdot a \cdot e^{-at}}{(e^{-at} + C)^2} < 0, \text{ よって, } N(t) \text{ 関数は右下がりの単調減少関数である。}$$

$$(ii) \quad \frac{d^2N}{dt^2} = \frac{Ca \cdot e^{-at} \cdot (-a) \cdot (e^{-at} + C)^2 - 2(e^{-at} + C) \cdot e^{-at} \cdot (-a) \cdot Ca \cdot e^{-at}}{(e^{-at} + C)^4}$$

$$= \frac{-C \cdot a^2 \cdot e^{-at} \cdot (C - e^{-at})}{(e^{-at} + C)^3}$$

$\bar{C} < 0, a > 0$ を考慮すれば、二次微分式の分子は常に負になる。

分母は、 $t \rightarrow +\infty$ にとれば負の定数 C に漸近することが分かる。また、分母の $e^{-at} + C = h(t)$ とおき、 $h(t)$ を満たす t を探すと、 $e^{-at} = -C$ の両辺の自然対数をとることにより、 $t = -\frac{1}{a} \log_e(-C)$ となる。図示すると、



つまり、 $t = -\frac{1}{a} \log_e(-C)$ より右側の t では、いつも $h(t) < 0$ となるので二次微分式の分母は常に負になる。従って、二次微分式の符号は常に正になるので、 $N(t)$ 関数(2)'式は下に凸になる。

このようにして、図1に表してあるような、右下がりかつ下に凸な $N(t)$ 曲線が得られる。

[注2]'

[注2]での(2)'式分母 $h(t) = 0$ を満たす、つまり、解 N の爆発が起こる $t = -\frac{1}{a} \log_e(-C)$ に $C = \frac{N_3}{1-N_3}$ を代入した $t = -\frac{1}{a} \log_e\left(\frac{N_3}{N_3-1}\right)$ が求める実時間である。

[注3]

初期値 N_0 が図1の N_1 点を通る曲線の導出。

$$N(t) = \frac{\frac{N_0}{1-N_0}}{e^{-at} + \frac{N_0}{1-N_0}}, \quad \text{ただし } a > 0 \quad (2)$$

(2)式の初期値 N_0 を $N_1 < 0$ にとる。

$$\frac{\bar{N}_1}{1-\bar{N}_1} = C < 0 \text{ の定数となる。よって,}$$

$$N(t) = \frac{C}{e^{-at} + C}, \quad \text{ただし } C < 0 \quad (2)'$$

(2)'式の形状を確定するために、(2)'式の実時間 t に関する一次微分と二次微分それぞれの符号を調べたい。 $a > 0$, $C < 0$ を考慮して、

$$(i) \quad \frac{dN}{dt} = \frac{C \cdot a \cdot e^{-at}}{(e^{-at} + C)^2} < 0$$

よって、 $N(t)$ 関数は、右下がりの単調減少関数である。

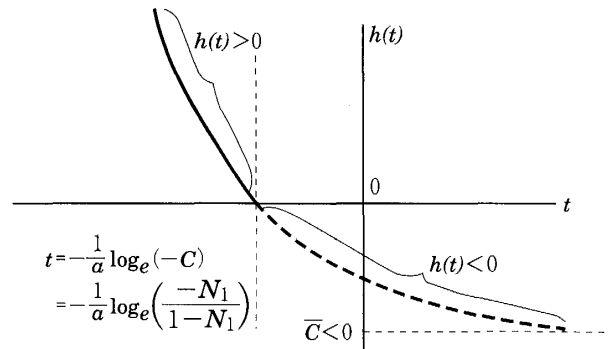
$$(ii) \quad \frac{d^2N}{dt^2} = \frac{-C \cdot a^2 \cdot e^{-at} \cdot (C - e^{-at})}{(e^{-at} + C)^3}$$

分子は常に負である。

分母の $e^{-at} + C = h(t) = 0$ を満たす t は、[注2]のときと同様に考えて、 $t = -\frac{1}{a} \log_e(-C)$

つまり、 $t = -\frac{1}{a} \log_e(-C) = -\frac{1}{a} \log_e\left(\frac{-N_1}{1-N_1}\right)$ より左側の実時間 t では、二次微分式の分母は常に正となる。分子は、常に負であるから、二次微分式の符号は常に負となる。つまり、上に凸な曲線となる。

よって、 $N(t)$ 関数は、図1に示されるように、右下がり で上に凸な曲線となる。



[注3]'

[注3]での $t = -\frac{1}{a} \log_e(-C)$ に $C = \frac{N_1}{1-N_1}$ を代入すれば $t = -\frac{1}{a} \log_e\left(\frac{-N_1}{1-N_1}\right)$ が得られる。

[注4]

寺田宏洲『非線形動学と経済——政策・ロジスティックカーブ・カオス——』晃洋書房、2004年2月、p. 161および図7-3より変曲点の y 座標は、($K=1$ のときは) $\frac{1}{2}$ である。つまり、(1)式の時間 t に関する二次微分をとり、それをゼロにする N が $\frac{1}{2}$ である。よって、

$$\frac{1}{2} = \frac{\frac{N_2}{1-N_2}}{e^{-at} + \frac{N_2}{1-N_2}}$$

を満たす実時間 t を求めれば、次のように、図1での x 座標が求まる。

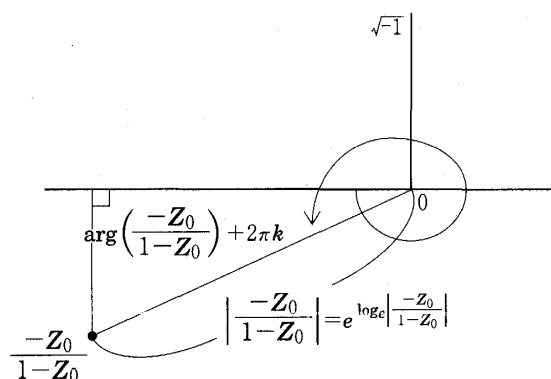
$$t = -\frac{1}{a} \log_e\left(\frac{N_2}{1-N_2}\right)$$

[注5]

$$e^{-\alpha T} + \frac{Z_0}{1-Z_0} = 0$$

$$e^{-\alpha T} = \frac{-Z_0}{1-Z_0} = \text{定数}$$

定数 $\frac{-Z_0}{1-Z_0}$ の位置を極形式で表わし、かつオイラーの定理を用いる。



$$\begin{aligned} e^{-\alpha T} &= \frac{-Z_0}{1-Z_0} \\ &= \left| \frac{-Z_0}{1-Z_0} \right| \cos\left(\arg\left(\frac{-Z_0}{1-Z_0}\right) + 2\pi k\right) + \sqrt{-1} \cdot \left| \frac{-Z_0}{1-Z_0} \right| \sin\left(\arg\left(\frac{-Z_0}{1-Z_0}\right) + 2\pi k\right) \\ &= \left| \frac{-Z_0}{1-Z_0} \right| \left\{ \cos\left(\arg\left(\frac{-Z_0}{1-Z_0}\right) + 2\pi k\right) + \sqrt{-1} \cdot \sin\left(\arg\left(\frac{-Z_0}{1-Z_0}\right) + 2\pi k\right) \right\} \\ &= e^{\log_e \left| \frac{-Z_0}{1-Z_0} \right|} \cdot e^{\sqrt{-1} \left(\arg\left(\frac{-Z_0}{1-Z_0}\right) + 2\pi k \right)} \\ &= e^{\log_e \left| \frac{-Z_0}{1-Z_0} \right| + \sqrt{-1} \left(\arg\left(\frac{-Z_0}{1-Z_0}\right) + 2\pi k \right)}, \text{ よって} \\ -\alpha T &= \log_e \left| \frac{-Z_0}{1-Z_0} \right| + \sqrt{-1} \left(\arg\left(\frac{-Z_0}{1-Z_0}\right) + 2\pi k \right) \end{aligned}$$

[注6]

(6)式・右辺・分母の第1項は、(8)式を考慮した上で(半径1の円が)時計回りに θ の偏角で回転している形に書き改められる。

(6)式・右辺・分母の第2項は、複素数の定数 $\frac{Z_0}{1-Z_0}$ を極形式の形で表し、かつ、オイラーの定理を考慮すると、本文の中で[注6]を含む式の分母の第2項の形に書き改められる。また、 $e^{\log_e \left| \frac{-Z_0}{1-Z_0} \right|} = e^{\log_e \left| \frac{Z_0}{1-Z_0} \right|} = \left| \frac{-Z_0}{1-Z_0} \right|$ である。

よって、(14)式が生れる。

参 考 文 献

- [1] Douady, A. and Hubbard, J. H.: *Etude dynamique des polynômes complexes I & II*. Publ. Math. d'Orsay, 1984-85.
- [2] J. Guckenheimer: *A strange attractor in the Hopf bifurcation theorem and its applications*. ed. By J. E. Marsden and M. McCracken, Springer-Verlag, 1976, pp. 368-381.
- [3] Mandelbrot, B.: *The Fractal Geometry of Nature*. Freeman, San Francisco, 1982.
- [4] Li, T. Y. and Yorke, J. A.: "Period Three Implies Chaos." *American Mathematical Monthly*, 82, 1975, pp. 985-992.

- [5] H. Terada, Y. Nishigaki, J. Arai and T. Ito: An application of complex logistic equation to economics, preprint.
- [6] 伊藤敏和, 寺田宏洲「複素微分方程式」『環境問題の理論と政策』(寺田宏洲編著) 晃洋書房, 2005年, pp. 63-97.
- [7] 岸正倫, 藤本担孝『複素関数論』学術図書出版, 1980年.
- [8] 寺田宏洲:「7章ロジスティック・カーブとカオス」, 『非線形動学と経済——政策・ロジスティック・カーブ・カオス——』晃洋書房, 2004年2月, pp. 157-179.
- [9] 寺田宏洲, 西垣泰幸, 伊藤敏和「環境分析のための複素ロジスティック方程式」『社会科学研究年報』(龍谷大学社会科学研究所), 第34号, 2004年3月, pp. 112-117.
- [10] 寺田宏洲, 西垣泰幸, 伊藤敏和, 和田 實「複素ロジスティック方程式」『龍谷大学経済学論集』第44巻第1号, 2004年, pp. 69-77.
- [11] 長崎憲一, 山根英司, 横山利章著『明解 複素解析』培風館, 2004年, pp. 1-104.

(受付 2005年7月6日)

【謝辞】

この研究は, 2004年度から始まった文科省科研・萌芽研究「複雑系・進化動学理論の社会・経済への応用」(課題番号 16653021) の成果の一部である。

研究メンバーである本学部「数学」担当の伊藤敏和教授の助言に負うところ大である。記して感謝したい。あり得べき誤まりは, すべて筆者の責任である。