非線形動学理論と経済成長，景気循環：展望*

西　垣　泰　幸

目　　次

1. はじめに
2. 加速度乗数モデルと景気循環
3. カルドア（Kaldor Model）の景気循環論：Poincaré-Bendixson の定理
4. 新古典派経済成長モデルとカオス：Lee=Yorke の定理
5. 内生的景気循環論：最適成長とカオス
6. 結　　語

1. はじめに

現実経済に見られる経済の成長過程や経済変動の現象を解明することは，古くより経済学の重要な課題の一つであった。戦後のマクロ経済学の発展の中で，これらの問題は経済成長論や景気循環論として，マクロ経済学の動学化の観点から展開された。

ケインズ経済学の動学化を目指したハロッドの成長モデルや，カルドア，ヒックスの景気循環論などでは，貯蓄と投資により実現される資本蓄積を通して，時間の経過とともにマクロ経済変数がどのように変動してゆくかが分析された。このような初期の経済成長理論や景気循環理論では，貯蓄と投資の差がもたらす総需要の変動と，資本蓄積や労働供給の変化による総供給能力の変動との相互作用により，経済に内在的な不安定要素と，それから生じる不均衡の持続的・拡大的な傾向が指摘された。その後，これらの研究は，非線形力学系理論の発展の中で，新たな解釈を与えられることになった。

また，新古典派経済学のマクロ・動学化の動きの中で，新古典派経済成長論が生起，発展され，市場の調整や経済主体の最適決定を基礎としたマクロ動学理論の展開をもたらした。新古典派の経済成長理論の特徴は，市場メカニズムと弾力的な生産技術を考慮することにより，安定的，均斉的な長期成長経路の存在が証明されたことである。その後，新古典派経済成長理論は，最適成長理論，内生的経済成長理論，さらには，内生的景気循環理論などの発展の中で，市場メカニズムや弾力的な生産技術が存在する場合においても，複雑で予測不可能な経済変動が起こりうるこ

* 本論文は，龍谷大学経済学部，「複雑系・進化系経済動学ワークショップ」にておこなった報告に加筆，修正したものである。ワークショップ参加者から多数の有益なコメントを頂いた。さらに，本誌レフェリーからは有益な指摘を頂いた。また，本研究は文部科学省科学研究補助金（萌芽研究，No.16653021）の援助を受けている。ここに記して感謝いたします。

とが示された。カオス経済動学など，その後の非線形マクロ経済動学の出発点ともなったといえよう。

ここでは，そのようなマクロ動学理論の発展の中で，非線形力学系理論がどのように適用され，また，現実経済の複雑な成長・変動過程の解明にどのように貢献してきたかを展望する。まず，第2節では，経済学における非線形力学系の理論の初期の応用例の一つとしてサミュエルソン＝ヒックスの乗数加速度モデルによる景気循環理論を取り上げる。そこでは，投資水準の変動のような経済体系において内生的に決定される要因によって引き起こされる経済活動の変動を，2階の差分方程式を用いて表し，景気循環が発生するメカニズムを説明している。

続いて，第3節では，持続的な景気循環を説明したカルドアの景気循環論を取り上げる。カルドアは，非線形の投資関数を導入することで，経済体系に内生的なリミットサイクルを生み出すことに成功し，その後，彼のモデルは経済学における非線形動学システムの標準的モデルの1つとなった。ここでは，リミットサイクルの存在に関するポアンカレ＝ベンディクソンの定理を適用することでこのモデルに接近する。

第4節においては，デイによってカオス動学的に修正された新古典派経済成長理論を取り上げる。デイは，標準的な新古典派の経済成長モデルに生産のラグと非線形の貯蓄関数を導入し，単純な差分方程式から複雑な経済変動が生み出される可能性を示した。そこでは，カオス現象が発生するための十分条件であるリー＝ヨークの定理を用いて，このモデルの動学的な性質が検討される。

最後に，第5節では，内生的景気循環理論の出発点ともなったベンハビブ＝西村の貢献を取り上げる。経済主体の最適決定をベースとする最適成長の枠組みにおいては，通常，長期最適成長経路の存在とそれへのターンパイク的調整が最適解として示される。しかしながら，ベンハビブ＝西村のモデルを代表とする内生的景気循環理論においては，最適決定の結果としてカオス現象が生起する可能性が示される。

2. 加速度乗数モデルと景気循環

経済学における非線形力学理論の応用は，1950年代に盛んに議論された景気循環論に始まるといって過言ではないであろう。ここでは，まず，その先駆けとなったサミュエルソン＝ヒックスによる加速度乗数モデルを取り上げる。この理論は，マクロ経済学における国民所得の決定モデルを景気循環に応用したものである。投資に関する経済内生的な決定が，経済体系へ波及することにより引き起こされる経済活動水準の変動を説明する理論であり，したがって，経済体系に内生的な要因により景気循環が発生することを説明するものである。

Samuelson [1939]，Hicks [1950] などにより展開されたこの理論は，次のような理論的構造を持つ。マクロ経済が国民所得の水準の決定に関する次のような3本の方程式体系によって表されると仮定しよう。

$$Y_t=C_t+I_t \tag{1}$$

$$C_t=C+cY_{t-1} \tag{2}$$

$$I_t=I+v(Y_{t-1}-Y_{t-2}) \tag{3}$$

(1)式は，政府部門と海外部門を省略した国民所得の決定式であり，国民所得が有効需要により決まることを示している。(2)式は消費関数であり，消費支出が国民所得 Y により決まる部分と独立的に決まる C の部分があることを示している。ここで，c は限界消費性向を示す。(3)式は，加速度原理の投資関数である。第1項の I は自発的投資を示し，第2項は誘発投資を示している。ここで，v は加速度係数と呼ばれている。

(2)，(3)式を(1)式に代入することにより，Y に関する2階の差分方程式を得る。

$$Y_t=(c+v)Y_{t-1}-vY_{t-2}+(C+I) \tag{4}$$

ここで，$A\equiv C+I$ とおいて書き直すことにより，(4)式は次のようになる。

$$Y_t-(c+v)Y_{t-1}+vY_{t-2}-A=0 \tag{4'}$$

(4')式は，2階の定差方程式であり，その不動点（非同次に基づく特別解）を求めると，次のようになる。

$$Y^*=\frac{A}{(1-c)} \tag{5}$$

次に，(4')式の差分方程式の同次部分に関する特性方程式と特性根を求めると次のように示される。

$$\lambda^2-(c+v)\lambda+v=0 \tag{6}$$

$$\lambda_1,\ \lambda_2=\frac{(c+v)\pm\sqrt{(c+v)^2-4v}}{2} \tag{7}$$

このシステムの動学的挙動を規定するのは，(7)式に示される2つの特性根である。まず，判別式 $\Delta=(c+v)^2-4v$ が正となる場合には特性根は実根となり，それが負の場合には複素根となる。以下では，解の動学的な性格についてより詳しく検討しよう[1)]。

(i) 実根，複素根について

特性根が実根となる場合，以下の式が成立することが必要となる。

$$(c+v)^2>4v \tag{8}$$

c，v はともに正であることから，(8)式は，$(c+v)>2\sqrt{v}$ を意味しており，$(1-2\sqrt{v}+v)=(1-\sqrt{v})^2>(1-c)$ と整理されることから，この条件は以下のように書き改められる。

$$v<(1-\sqrt{1-c})^2$$

あるいは，

$$v>(1+\sqrt{1-c})^2 \tag{9}$$

したがって，特性根が複素根となる条件は以下のように示される。

1)　より詳しくは，例えば，福岡［1994］を参照されたい。

$$(1-\sqrt{1-c})^2<v<(1+\sqrt{1-c})^2 \tag{10}$$

(ii) **収束，発散について**

まず，特性根が実根の場合，(6)式に関する根と係数の関係から，2実根はともに正で，しかも，簡単な計算により，$\lambda_1, \lambda_2 \in (0, 1)$ あるいは，$\lambda_1, \lambda_2 \in (1, \infty)$ となることが示される。したがって，特性根はともに1以下であるか，ともに1以上であるかのどちらかである。前者の場合には，解の軌道は時間の経過とともに不動点(5)に単調に収束することになり，また，後者の場合には時間とともに単調に発散することになる。

次に，特性根が複素根である場合を検討しよう。この場合に，2根は共役複素数の形で現れることから，それらを $\alpha+i\beta, \alpha-i\beta$ としよう。これらの特性根の絶対値を $\rho=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ として，$\tan\theta=\beta/\alpha$, $\alpha=\rho\cos\theta$, $\beta=\rho\sin\theta$ と示されるので，$\lambda_1=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$, $\lambda_2=\rho(\cos\theta-i\sin\theta)$ と表すことができる。したがって，同次部分の一般解を求めると，

$$a_1\lambda_1^t+a_2\lambda_2^t=2k\rho^t\cos(t\theta+\varepsilon) \tag{11}$$

となって，三角関数の項が含まれることになる。この部分は，時間の進行とともに周期的に振動するので，解の軌道も振動することになる。

次に，(7)式から，$\alpha=(c+v)/2$, $\beta=\sqrt{4v-(c+v)^2}/2$ となるので，簡単な計算より，

$$\rho=\sqrt{v} \tag{12}$$

となることが示される。したがって，$v<1 \rightarrow \rho<1$ となり，解の軌道は振動しながら不動点に収束することがわかる。逆に，$v>1 \rightarrow \rho>1$ ならば，振動しながら発散してゆくことがわかる。

以上の考察から，解の軌道に関して以下のような4つのケースが出現することが示される。(図1参照)

(1) ケースA：$0<v<(1-\sqrt{1-c})^2$

この場合には，特性根は正の実根でともに1より小さく，したがって解の軌道は単調に長期均衡点に収束する。

(2) ケースB：$(1-\sqrt{1-c})^2<v<1$

この場合には特性根はともに複素根であり，その絶対値は1より小さい。したがって，解の軌道は振動しながら長期均衡点に収束してゆく。

(3) ケースC：$1<v<(1+\sqrt{1-c})^2$

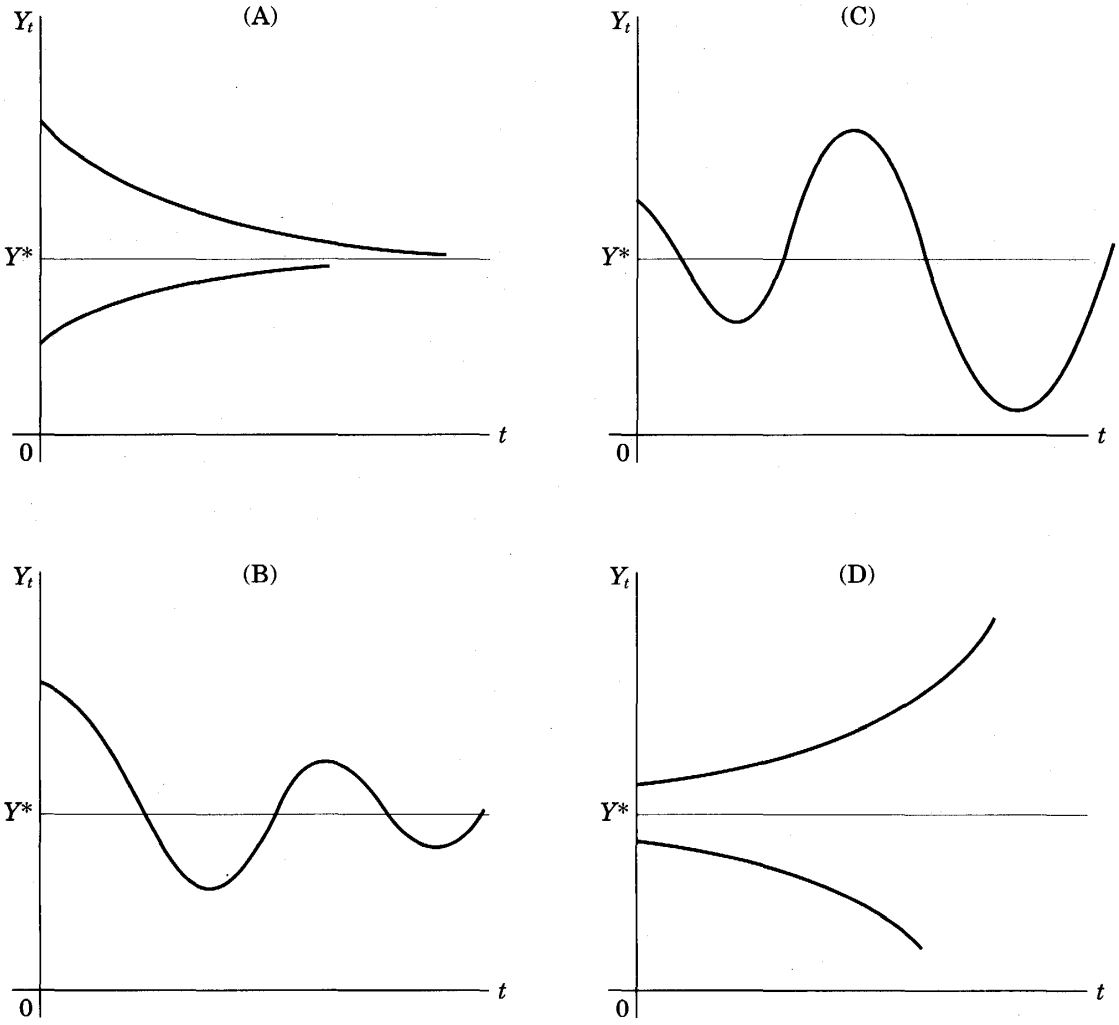
この場合にも特性根はともに複素根であるが，その絶対値は1より大きくなる。したがって，解の軌道は振動しながら発散してゆくことがわかる。

(4) ケースD：$(1+\sqrt{1-c})^2<v$

ケースAと同様，この場合にも特性根は正の実根であるが，それらはともに1より大きく，したがって，解の軌道は単調に発散してゆくことになる。

以上に示した4つのケースのうち，ケースBとCにおいては，所得水準が均衡水準から乖離して循環的に変動することが示された。したがって，これらの場合には投資の変動により景気循環

図1　4つの変動パターン



が発生するメカニズムを示すことに成功している。さらに，ヒックスはケースB，Cに関して，労働や資源の賦存量が制約となる Y の「天井」，最低限の置換投資や最低限の消費が支える「床」の概念を導入し，より詳細な循環現象の解明を行っている[2)]。

3. カルドア（Kaldor Model）の景気循環論：Poincaré-Bendixson の定理

第2節で見たように，サミュエルソン＝ヒックスの乗数加速度モデルは，誘発投資のメカニズムを明示的に考慮し，乗数効果と投資の誘発効果の相互作用により景気の循環的変動を説明することに成功した。これに対して，Kaldor [1940] は，非線形の投資関数を導入することにより，さらに複雑な景気変動メカニズムを説明することに成功している。

彼の用いた投資関数は，利潤原理（profit principle）と呼ばれ，投資が所得水準と資本ストックの水準に依存して決まるとする立場をとるものである。経済の体系に，より柔軟な非線形の投

2)　Hicks [1950] 参照。

資関数を導入することにより，体系の中に内生的なリミットサイクルが発生する。このような観点は，その後，現実経済の変動の複雑性を非線形力学系の成果を用いて解明しようとする試みの出発点ともなっている。以下では，Lorenz [1997] によって展開されたカルドアモデルを用いて，カルドアの景気循環論を見てゆこう。

3-1. カルドアの景気循環モデル

カルドアが用いたモデルは，標準的乗数モデルに利潤原理に基づく投資関数を結合させたものである。1部門の経済動学モデルであり，所得水準 Y と資本ストックの水準 K を決定する。消費と投資は，所得水準とともに資本ストックの水準にも依存して決まる。投資関数は非線形であり，所得に関して増加関数であるが，所得水準が均衡所得の近傍から乖離すると限界投資性向が低下すると仮定されている。また，投資は資本ストックの減少関数であり，資本ストックの蓄積が進むと投資水準に負の影響を及ぼすと仮定されている。

このような投資関数の性質は，以下のような経済的メカニズムに基づき想定されたものである。

(1) 所得水準が均衡水準を大きく越えて高くなると，完全雇用に伴う労働供給のボトルネックや，建設費，資金調達コストなどの高騰，ブームの前途に対する予想が弱気に転じることなどが原因となって，企業の投資意欲が減殺され，そのため投資性向が低下する。

(2) 所得水準が異常に低い不況期においては，生産設備の過剰が顕在化し，したがって所得が増加しても設備投資はそれほど誘発されない。

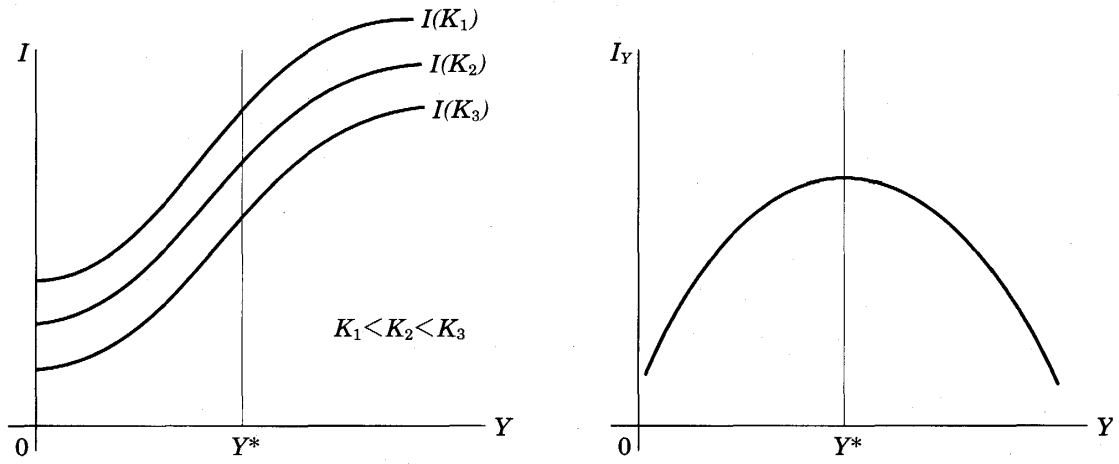
(3) 生産水準が十分に高くなり，過剰設備が解消される中間領域（均衡値の近傍）においては，誘発投資のメカニズムが十分に作用し，投資性向が高まる。

以上の点を，投資関数の変数に関する微分符号条件により示すと，次のようになる。投資関数を $I=I(Y, K)$ とすると，まず，$I_Y>0$, $I_K<0$ となる。さらに，ある所得水準 Y^* が存在し，

$$\begin{aligned} &Y<Y^* \text{ ならば } I_{YY}>0 \\ &Y>Y^* \text{ ならば } I_{YY}<0 \end{aligned} \tag{13}$$

となる。このような条件を図に示したのが，次の図である。

図2 カルドアの投資関数



貯蓄関数については，まず，貯蓄が所得に関して線形の増加関数であると仮定する。また，貯蓄は資本ストックにも依存して，資本ストックが増加すると貯蓄も増加すると仮定する。つまり，$0<S_Y<1$, $S_K>0$ と仮定する。

所得水準は，財市場における超過需要 $(I-S)$ に依存して，調整係数 α の1次関数により調整されると仮定する。また，資本蓄積方程式は，δ を資本減耗率として，標準的な動学方程式を用いる。

以上のような仮定の下で，この経済体系の長期的動向は次のような連立微分方程式により示される。

$$\dot{Y}=\alpha[I(Y, K)-S(Y, K)] \tag{14}$$

$$\dot{K}=I(Y, K)-\delta K \tag{15}$$

この体系の解の挙動は，(14-15)式の2本の微分方程式に規定される。以下では，これらの微分方程式の動学的性質を検討することにより，解の軌道に接近しよう。

3-2. カルドアモデルの動学的分析

まず，(14)，(15)式の不動点を求める。不動点は，$\dot{Y}=\dot{K}=0$ を満たす解である。したがって，以下の式を得る。

$$I(Y, K)-S(Y, K)=0 \tag{16}$$

$$I(Y, K)-\delta K=0 \tag{17}$$

簡単のために，方程式(16)，(17)は一意の解 (Y^*, K^*) を持つと仮定する。これは，後に示されるように，この解が孤立特異点であることを仮定することに他ならない[3)]。

この不動点 (Y^*, K^*) の近傍における動学的安定性を検討するため，(14-15)の体系を不動点 (Y^*, K^*) においてテイラー展開をしたときの線型項を求めると，次のようなヤコービ行列を得る。

$$J^*=\begin{bmatrix} \alpha(I_Y^*-S_Y^*) & \alpha(I_K^*-S_Y^*) \\ I_Y^* & I_K^*-\delta \end{bmatrix} \tag{18}$$

ただし，ここで $J^*=J(Y^*, K^*)$, $I_Y^*=I_Y(Y^*, K^*)$ とし，以下 I_K^*, S_Y^*, S_K^* も同様とする。

この行列式の $tr\,J^*$ をトレース，$\det J^*$ は行列式として，それぞれ以下のようにあらわされる。

$$tr\,J^*=\alpha(I_Y^*-S_Y^*)+(I_K^*-\delta) \tag{19}$$

$$\det J^*=\alpha(I_Y^*-S_Y^*)(I_K^*-\delta)-\alpha(I_K^*-S_K^*)I_Y^* \tag{20}$$

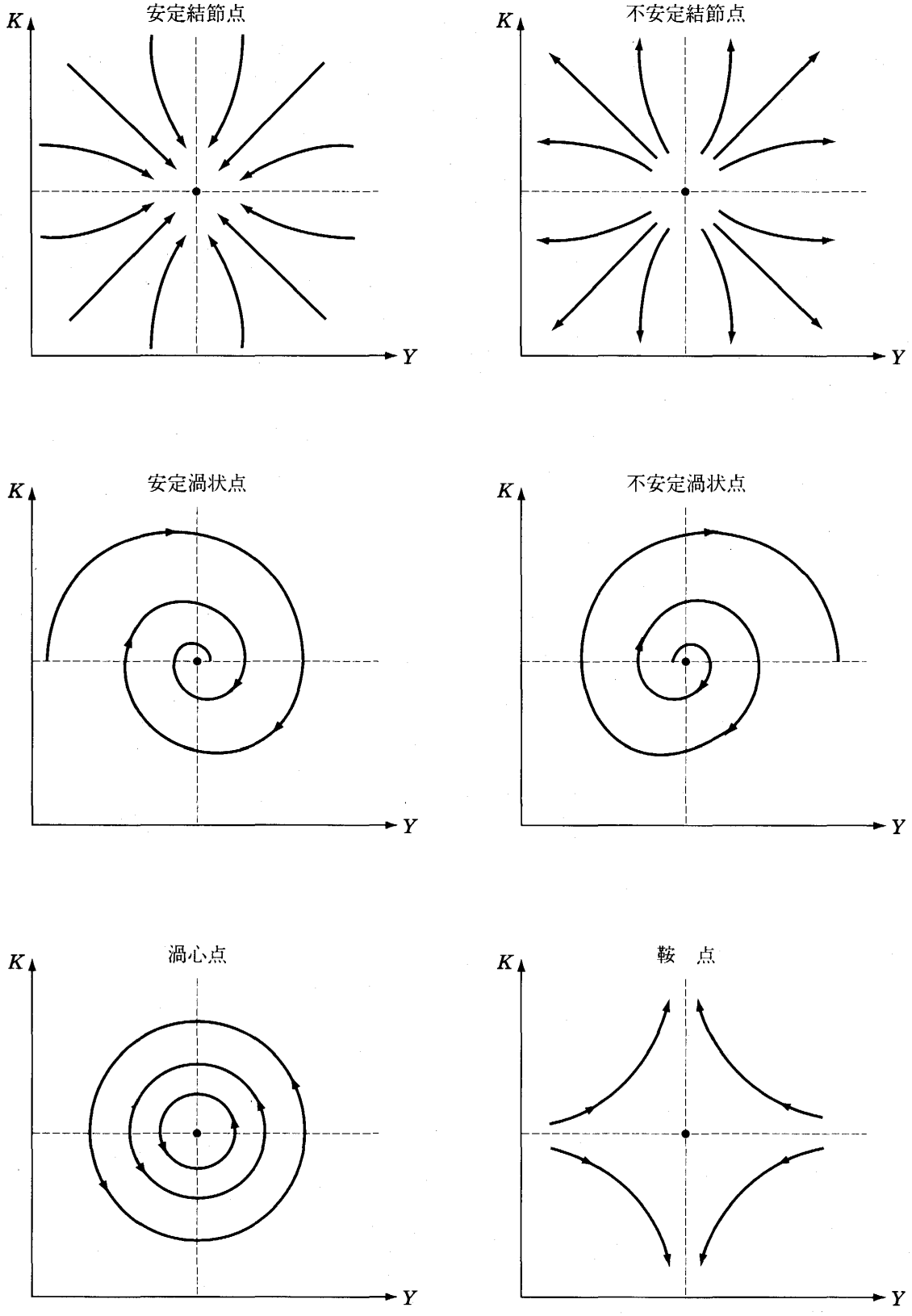
また，特性方程式は次のように示される。

$$\lambda^2-tr\,J^*\lambda+\det J^*=0 \tag{21}$$

(21)式の2つの特性根は，

3)　後に示す図6からわかるように，3個の不動点が存在し，その1つは鞍点，他の2つは不安定不動点となる可能性があり，したがって後に述べるサドルループはアプリオリには排除できないかもしれない。詳しくは Lorenz [1997] などを参照のこと。

図3 不動点の安定性



（出所） Lorenz［1997］を一部改定。

$$\lambda_1,\ \lambda_2=\frac{tr\,J^*\pm\sqrt{(tr\,J^*)^2-4\det J^*}}{2} \tag{22}$$

となる。また，特性方程式(21)における根と係数の関係から，$tr\,J^*=\lambda_1+\lambda_2$, $\det J^*=\lambda_1\cdot\lambda_2$ となる。以下では，これらの関係を用いて，このシステムの動学的性質について検討を進めよう。

(i)　実根のケース

まず，$\det J^*=\lambda_1\cdot\lambda_2>0$ ならば，2つの固有値は同符号になる。それに加えて，$tr\,J^*=\lambda_1+\lambda_2<0$ ならば，固有値はともに負であり，解軌道は有限の不動点 (Y^*, K^*) に単調に収束する。このとき不動点 (Y^*, K^*) は，安定結束点（stable node）と呼ばれる。

次に，$tr\,J^*=\lambda_1+\lambda_2>0$, $\det J^*=\lambda_1\cdot\lambda_2>0$ ならば，固有値はともに正であり，解軌道は正または負の無限大に発散する。このとき，システムは不安定結節点（unstable node）を持つといわれる。

(22)式の判別式が正で，したがって2実根を持つが，$\det J^*=\lambda_1\cdot\lambda_2<0$ の場合，固有値は実数で逆符号の対で現れる。この場合不動点は鞍点（saddle point）安定と呼ばれる。

(ii)　複素根のケース

判別式が負ならば，固有値は共役複素数 $(\alpha+i\beta, \alpha-i\beta)$ になる。ただし，

$$\alpha=tr\,J^*/2,\ \beta=\sqrt{4\det J^*-(tr\,J^*)^2}/2 \tag{23}$$

である。

固有値の実部が負ならば，減衰振動が生じ，最終的に有限値に接近する。これは，システムの安定渦状点（stable focus）と呼ばれる。また，固有値の実部が正ならば，振動の振幅は時間の経過につれ大きくなる。この場合，システムは不安定渦状点（unstable focus）を持つといわれる[4]。(図3参照)

3-3. ポアンカレ＝ベンディクソンの定理とリミットサイクル

カルドアモデルの動学的挙動に関する以上のような議論を前提として，(14-15)の連立微分方程式により示される経済システムの解軌道がリミットサイクルとなる可能性を示すことができる。そのための準備として，まず以下では，ポアンカレ＝ベンディクソン（Poincaré=Bendixson）の定理を見ておこう。

まず，R^2 上の微分方程式体系

$$\dot{x}_1=f(x_1, x_2) \tag{24}$$

$$\dot{x}_2=g(x_1, x_2) \tag{25}$$

を考え，初期条件 $x^0=(x_1^0, x_2^0)$ より出発する解軌道を $\phi_t(x^0)$ と表そう。ポアンカレ＝ベンディクソンの定理において，極限集合（limit set）という概念が用いられるが，それは次のように定義できる。

極限集合：点 $x\in W$ の ω 極限集合とは，点列 $t_i\to\infty$ が存在して $\lim_{i\to\infty}\phi_{t_i}(x)=l$ となるような

4)　Lorenz [1997] 参照。

性質を持つ全ての点 $l \in W$ の集合である。α 極限集合も同様に定義されるが，点列 $t_i \to -\infty$ により定義される集合である。

平面上では，一般的に3つの異なる極限集合，すなわち，安定な不動点，周期軌道，1つの鞍点と2つの不安定不動点からなるサドルループが存在するが，解の一意性を想定すれば，極限集合は不動点もしくは周期軌道となる。ω 極限集合が孤立した閉軌道であれば，それは安定な極限周期軌道（limit cycle）と呼ばれ，α 極限集合が孤立した閉軌道であれば不安定な極限周期軌道と呼ばれる。

(24)，(25)式で示された微分方程式体系を X と表そう。それを，ベクトル場の形で書くと，$\vec{X}=f(x_1, x_2)\partial/\partial x_1+g(x_1, x_2)\partial/\partial x_2$ となる。

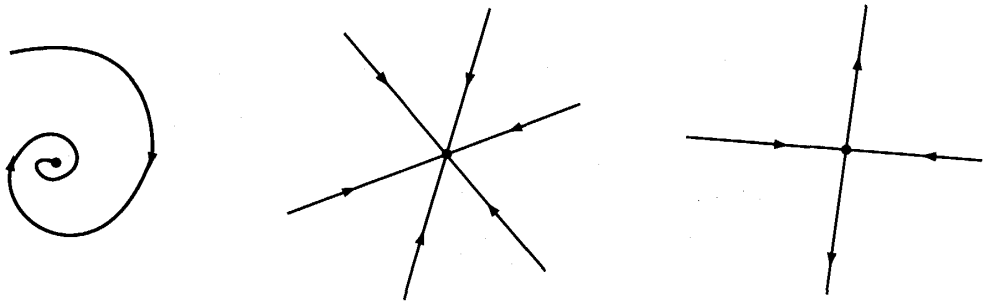
R^2 上の領域 D は円板に位相同形であり，境界 ∂D は区分的に微分可能とする。さらに，D の内部での特異点は有限個とする。D の近傍で，微分方程式 X を考える。この X が，境界で横断的であるとする。このとき $P \in \partial D$ を通る X の解を $\gamma(t)=\phi_t(P)$ とすると，この極限集合 $\lim_{t\to\infty}\gamma(t)$ は次のようになる（Lefschetz [1962]）。

ポアンカレ＝ベンディクソンの定理：

γ の極限集合 $\lim_{t\to\infty}\gamma(t)$ は，次の3つのケースのいずれかになる。

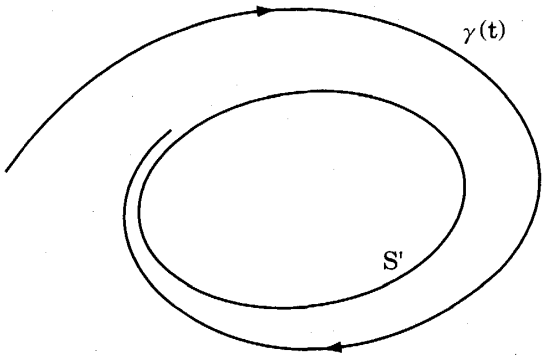
(a) 回転しながら，あるいは1つの方向から単調に特異点（Singular Point）に到達する。

図4 特異点近傍の解軌道



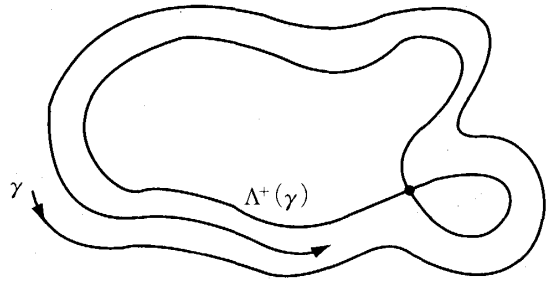
(b) γ は単調に閉軌道（円周 S^1）に巻きついてゆき，極限集合 $\Lambda^+(\gamma)=\lim_{t\to\infty}\gamma(t)$ は閉軌道（円周 S^1）になる。

図5 閉軌道



(c)　極限集合 $\Lambda^+(\gamma)=\lim_{t\to\infty}\gamma(t)$ は，８の字形，あるいは８の字が有限個続く形になる。

図6　極限集合が「８の字形」となるケース



（出所）　Lefschetz [1962]

この定理の詳細な証明についてはここでは触れないが，この定理の意味を図を使って簡単に示そう。

図7　不変集合 D

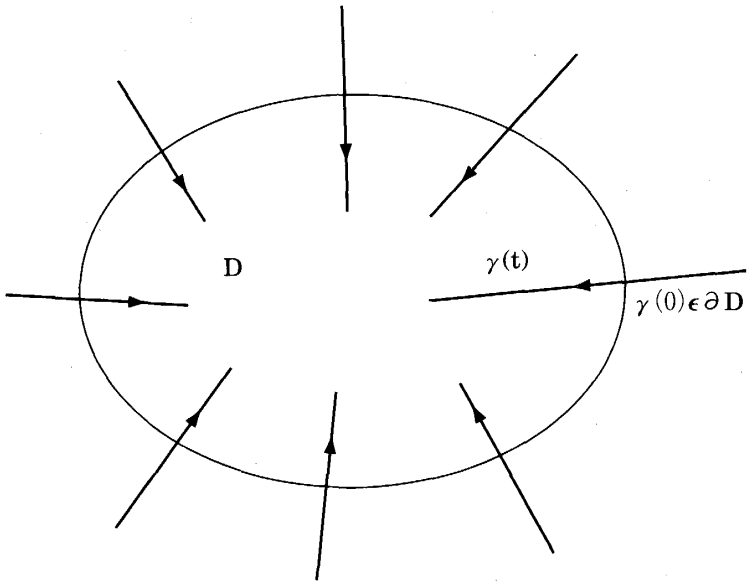


図４は，平面における不変集合 D の一例を示している。D の境界上（∂D）ではベクトル場（$\vec{X}$）は集合の内部に向かっている。これは，解の軌道がひとたびこの集合に入れば，それ以降その集合内にとどまり続けることを意味している。そこで，軌道が集合内に入ってからどのような挙動をとるかが重要になる。

不動点が安定な場合には，単調に，あるいは回転しながらその不動点に収束する（ケースａ）。不動点が不安定な場合には，D 内において可能な極限集合は閉軌道（ケースｂ）とサドルループだけである（ケースｃ）。サドルループならば少なくともひとつの不動点が存在するはずなので[5]，先に述べたように不動点の一意性を仮定するならば，この可能性は排除される。したがって，この場合 D 内のすべての軌道は閉軌道に収束する（ケースｂ）ことがわかる。

5)　これは，Poincare=Hopf の定理による。詳しくは，Lorenz [1997] などを参照のこと。

3-4. カルドアモデルとリミットサイクル

ポアンカレ＝ベンディクソンの定理を適用することにより，(14-15)の連立微分方程式により示される経済システムの解軌道がリミットサイクルとなる可能性を示すことができる。この経済システムの解軌道がリミットサイクルとなるならば，所得と資本ストックが継続的に振動を続けることになり，持続的でやむことない景気循環の存在を示すことができる。

以下では議論は次のような手順により進められる。ポアンカレ＝ベンディクソンの定理を適用するために，まず，動学的システムの不動点についてその安定性を検討する。次に不動点が不安定な場合には，不動点を囲む不変集合 D を探す。閉軌道（リミットサイクル）がその不変集合の境界に一致していない場合について，ベクトル場が内側に向かっていることを確かめる。

① 鞍点不動点の排除

先に示したように，不動点が鞍点となる可能性を排除するためには，(18)式において $\det J^*=\lambda_1\cdot\lambda_2>0$ とならなければならない。したがって，ここでは，

$$\det J^*=\alpha(I_Y^*-S_Y^*)(I_K^*-\delta)-\alpha(I_K^*-S_K^*)I_Y^*>0 \tag{26}$$

を仮定する。

② 不動点の安定性

次に，不動点の安定性を検討しよう。まず，$\det J^*=\lambda_1\cdot\lambda_2>0$ かつ，$trJ^*=\lambda_1+\lambda_2<0$ ならば不動点は漸近安定となる。この場合には，(19)式より以下の不等式が成立しなければならない。

$$\alpha(I_Y^*-S_Y^*)<-(I_K^*-\delta) \tag{27}$$

仮定により $I_K<0$ なので，この式の右辺は正となり，左辺の投資誘発効果は一定以下であることが求められる。

逆に，$trJ^*=\lambda_1+\lambda_2>0$, $\det J^*=\lambda_1\cdot\lambda_2>0$ ならば，不動点は不安定となる。したがって，

$$\alpha(I_Y^*-S_Y^*)>-(I_K^*-\delta) \tag{28}$$

とならなければならない。この場合には，投資誘発効果は十分大きいことが求められる。

非線形の投資関数に関する仮定より，Yが定常均衡点（不動点）から乖離すると I_Y は減少するので，(I_Y-S_Y) は所得水準が十分に大きいときと小さいときに2度符号を変える。それに伴って，トレースも符号を変える可能性がある。したがって，閉軌道の存在が否定されることはない[6]。

③ システムの位相とベクトル場

この経済システムの位相図を検討しよう。まず，(14)式において $\dot{K}=0$ とおいて全微分することにより，

$$\frac{dK}{dY}_{at\dot{K}=0}=-\frac{I_Y}{I_K-\delta}>0 \tag{29}$$

を得る。したがって，$\dot{K}=0$ 線は右上がりとなる。

---

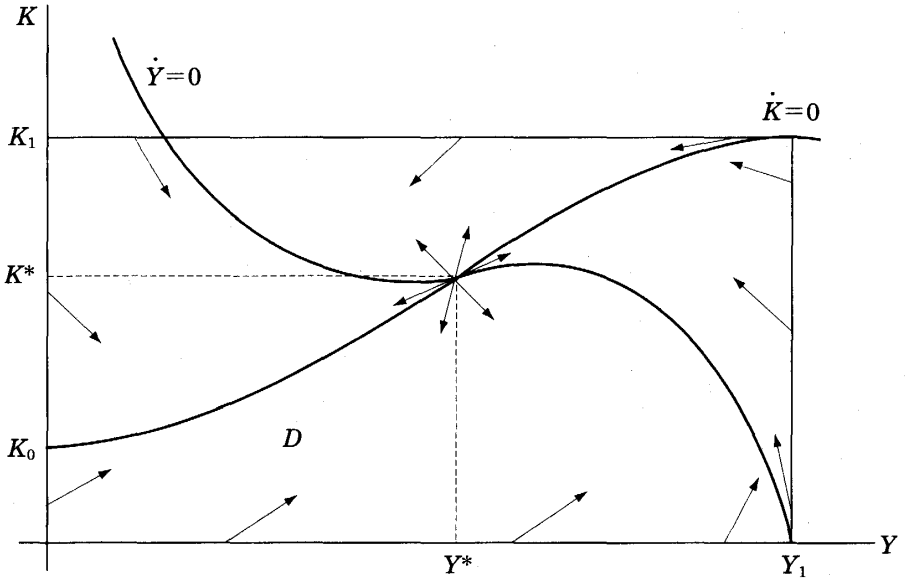
6) この場合，閉軌道の存在を排除するベンディクソンの定理が満たされないことが示される（Lorenz [1997]）。

次に，(15)式において $\dot{Y}=0$ とおいて全微分することにより，

$$\left.\frac{dK}{dY}\right|_{at\,\dot{Y}=0}=-\frac{I_Y-S_Y}{I_K-S_K} \tag{30}$$

を得る。(30)式はいずれの符号をも取りうるが，先ほどの考察からもわかるように，不動点の近傍では正の傾きを取り，十分大きいか，あるいは十分小さい Y について，その傾きは負となる。図8はこれらを示したものである。

図8　カルドアモデルの位相図



④　ベクトル場が内側に向かう不変集合の存在

カルドアモデルにおいては，不変集合 D は比較的容易に確定することができる。図8の部分集合 $D=\{(Y, K)|0\leq Y\leq Y_1, 0\leq K\leq K_1\}$ は，コンパクトであり，境界上で明らかにベクトル場は集合の内部に向かっている。このようにして，カルドアモデルの体系にリミットサイクルが存在する可能性が示された。

所得水準と資本ストックのスペースにおいてリミットサイクルが存在するならば，所得水準や資本ストックが循環的に変動する持続的メカニズムが経済のシステムに内在することを示すことができる。乗数加速度モデルは，モデルの体系から内生的に生じる所得水準の循環的振動を示すことに成功したが，それは，長期均衡に向け収束するか，あるいは振動しながら無限に発散するものであった。カルドアモデルは，持続的に生じる経済の循環的変動を，経済に内在するメカニズムにより証明することに成功したのである。

4. 新古典派経済成長モデルにおけるカオス

ここまで見てきたように，サムエルソン＝ヒックスの乗数加速度モデルやカルドアモデルは，ケインズモデルの動学化により現実経済の循環的な景気変動の解明に努めた。これに対して，ソ

ローの1956年の経済成長モデルを先駆とする新古典派の経済成長理論においては，完全競争市場を前提とした伸縮的な価格調整メカニズム，資本と労働の完全代替を想定した一次同次の生産関数，限界生産力に応じた要素所得分配などの想定に基づいて，長期均衡成長経路の安定性が証明された[7]。

しかしながら，長期安定成長の下では，現実経済の循環や変動は，外生的なショックによる長期成長経路からの逸脱や，それに向けての収束，特に循環的収束などにより説明せざるを得なかった。経済の長期的な動きを説明するためには，均衡成長と経済循環の関係を明示的に考慮したうえで，経済の内生的な要因による経済変動の分析が求められている。さらに，現実経済の不規則な変動やカオティックな動きを説明する理論が求められる。

新古典派の経済成長モデルをこのような観点から再検討したのは，Day [1982] であった。Day [1982] では，通常の新古典派経済成長モデルを出発点として，単純な経済モデルから非常に複雑な循環現象が生じることを示した。そこでは，生産におけるタイムラグと，貯蓄に関する非線形性を導入したうえで，貯蓄性向と生産性の相互作用により，現実にも観察されるような非連続の循環的な経済変動が出現することが示された。以下では，Day [1982] によりながら，カオス動学理論を用いて経済の内生的なメカニズムによりどのようにしてカオティックな状況が出現するのかを検討しよう。

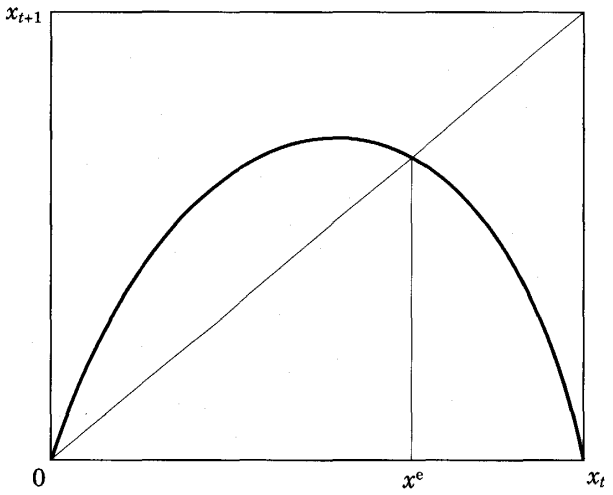
4-2. カオス動学とリー＝ヨークの定理

カオス現象を生み出しうる動学方程式としては，微分方程式についても差分方程式についてもさまざまなものがある。ここでは，最も簡単な形式の非線形差分方程式を用いて検討しよう。この式は，μ をパラメータとして，次のように表される。

$$x_{t+1}=\mu x_t(1-x_t) \tag{31}$$

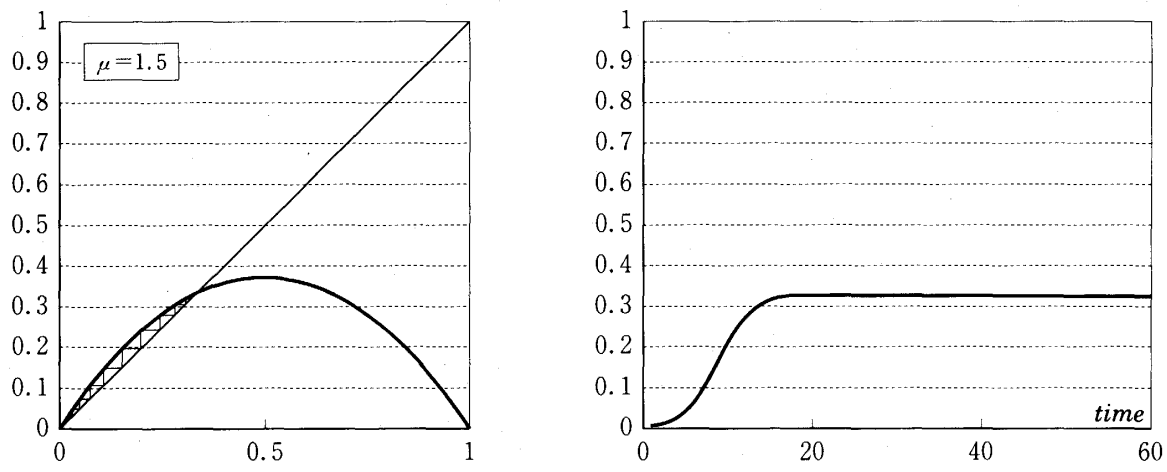
(31)式は，x_{t+1} が x_t の二次関数であることを示している。その位相図を描くと図9のように示される。

図9 (31)式の位相図

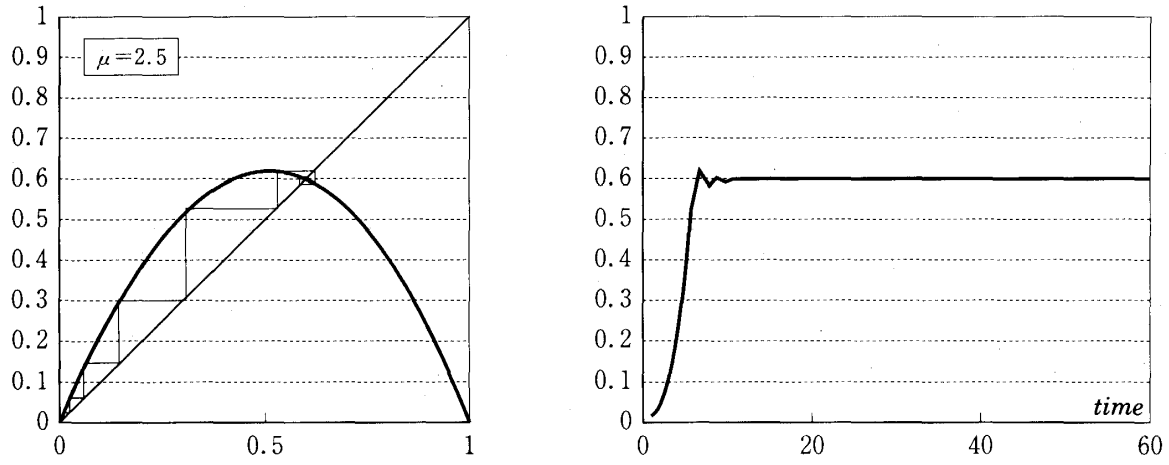


7) Solow [1956] に詳しい説明がある。

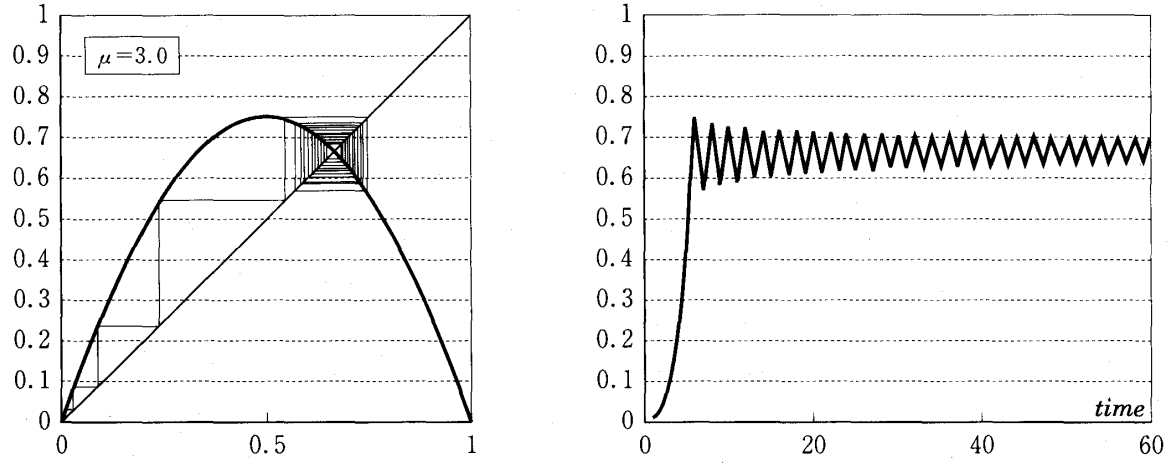
図 10(1)　不動点の安定性とカオス



(a)



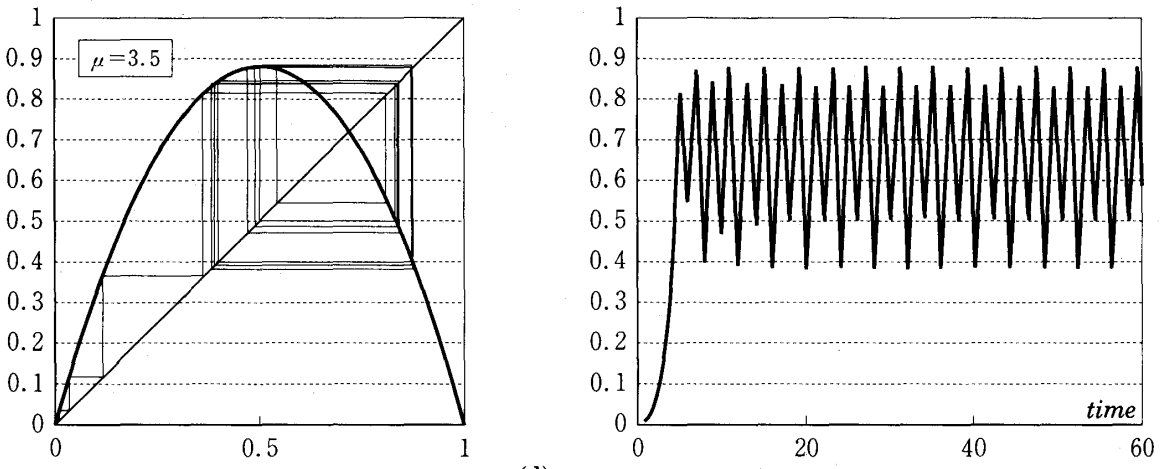
(b)



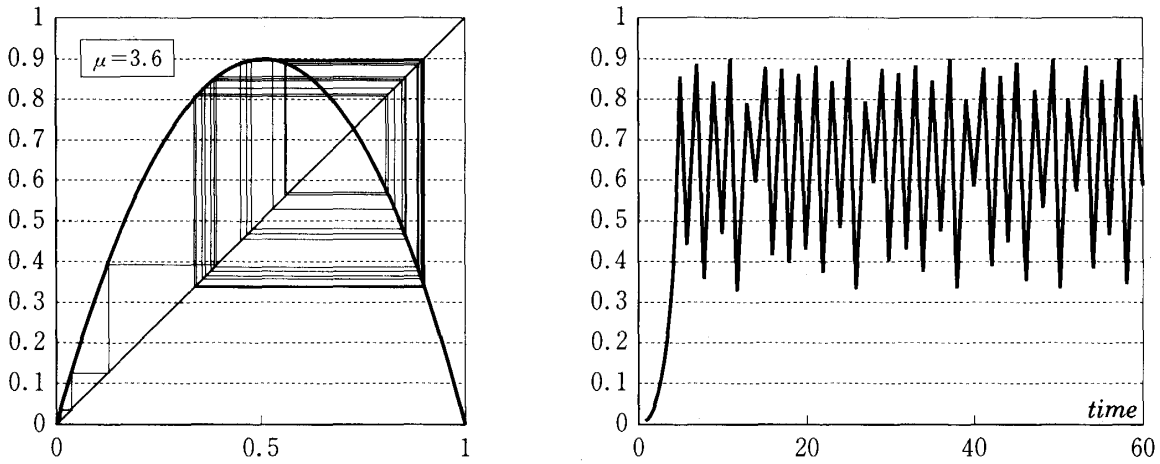
(c)

(出所)　寺田 [2004]

図10(2) 不動点の安定性とカオス



(d)



(e)

(出所) 寺田 [2004]

非負領域だけを考えれば，曲線 x_{t+1} は，原点から出発して横軸 ($x_{t+1}=0$, $x_t=1$) に至る単峰型の曲線であり，その形状はパラメータ μ のみに依存している。この曲線と45° 線との交点は，不動点であり，$x_{t+1}=x_t=x^e$ となる。

この曲線の傾きを求めると，

$$\frac{dx_{t+1}}{dx_t}=\mu-2\mu x_t \tag{32}$$

となるので，頂点の座標は ($x_t=1/2$, $x_{t+1}=\mu/4$) となることがわかる。したがって，頂点はパラメータ μ の増加とともに上方に伸張するが，(31)式からわかるように，x_t の取りうる最大値は1であり，x_{t+1} も1を超えることはない。したがって，パラメータ μ は4以下となる。以下では，まず，μ の増加との関係で，不動点の安定性を検討しよう[8)]。

$\mu\leq 1$ の場合には，均衡点は原点のみであるが，μ が1を超えるとプラスの均衡点が現れる。図10(a)に示されるように，まず，不動点は漸近安定となる。μ の増加に伴って，不動点の周りでの循環が生じるが，$\mu<3$ の範囲では最終的に不動点に収束する（一周期循環)。図10(d)に示

8) この点は，小野 [1996] による。

されるように，μが3を超えると不動点は不安定となり，2個の定常点が現れ，それらの間を振動する安定な2期間循環が発生する。

$\mu>3.570$ になると，定常点の数は無数になり，偶数期間の循環が無数に存在するカオスの領域に入る。x_t の時間経路は決して同じパターンを繰り返さず，初期値のわずかな差異に対して敏感に反応して変動する（初期値鋭敏性）。このような，カオスが発生するための十分条件を示したものが，リー＝ヨーク（Li. T and J. Yorke）の定理である。

リー＝ヨークの定理を検討するために，(31)式のかわりにより一般的な1階の非線形差分方程式を考える。

$$x_{t+1}=f(x_t) \tag{33}$$

ある区間 $J=[0, x^u]$ で連続な関数$f(x)$について，この区間に存在するいかなる $x(x\in[0, x^u])$ に対しても $f(x)\in[0, x^u]$ であるならば，$f(x)$ は区間J上で閉じているといわれる。この区間上の初期値x^0からの軌道が，$x^0=f^2(x^0)$ となるならば2期間循環であり，$x^0=f^3(x^0)$ となるならば3期間循環である。リー＝ヨークは，(33)式が3期間循環を生み出すならばカオスが発生することを示した（Day [1982]）。

リー＝ヨークの定理：

関数 $f(x)$ は区間 $J=[0, x^u]$ 上で連続かつ閉じており，この区間Jに属する区間について，

$f^3(x^c)\leq x^c<f(x^c)<f^2(x^c)$ あるいは

$f^3(x^c)\geq x^c>f(x^c)>f^2(x^c)$

が成立するならば，

A．あらゆる周期の循環がJ上に存在する。

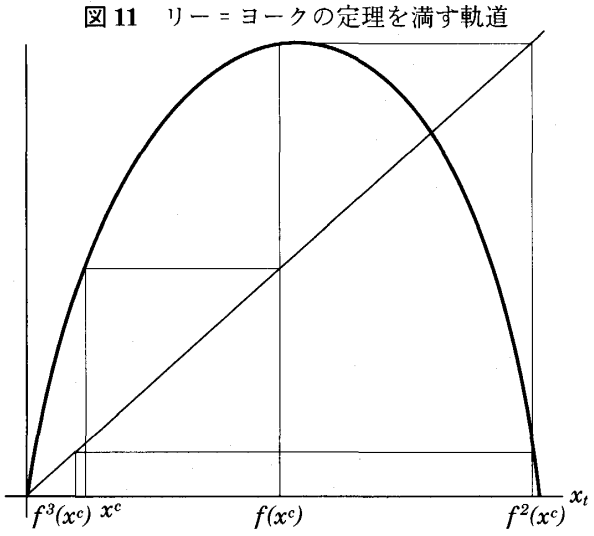
B．区間Jに不可算集合Sが存在して，Sを出発する全ての軌道がSにとどまり，

B_1．いかなる軌道も他の全ての軌道に近づく。

B_2．S上の相異なる軌道がいかに近づいたとしても，それらは結局離れ去ってゆく。

B_3．S上のいかなる軌道も，一時的に，任意の周期のサイクルに近づいたとしても，やがてそのサイクルから離れてゆく。

図11　リー＝ヨークの定理を満す軌道



すなわち，この定理の条件が満たされるならば，3周期解が存在し，あらゆる周期の周期解が出現するのでカオス状態が起こることを意味している。なお，(31)式の例では，$\mu>3.570$ においてカオス現象が起こっているが，リー＝ヨークの定理が満たされるのは，$\mu>3.8284$ であることが知られている。

4-3. 離散時間における一部門経済成長モデル

ここで展開されるモデルは，基本的に生産部門が集計的一部門により表される新古典派経済成長モデルを基礎としている。まず所得 Y は，資本 K と労働 L とにより，生産関数 $Y=F(K, L)$ によって生産される。生産関数は一次同次であるので，全ての変数を労働者数で割り，労働者一人当たりの変数を用いると，$Y/L=F(K/L, 1)=f(k)$ となる。Day は，生産に1期のタイムラグを導入し，生産関数を次のように示す。

$$y_{t+1}=f(k_t)\frac{L_t}{L_{t+1}} \tag{34}$$

貯蓄率 s は可変的とし，所得，資本ストック，利子率 r に依存して決まると仮定する。ここで，利子率は $r=f'(k)$ と示されるので，貯蓄率は k のみに依存して決まることになる。したがって，労働者一人当たりで示した経済の総貯蓄は，

$$sy_{t+1}=s(k_t)f(k_t)\frac{L_t}{L_{t+1}} \tag{35}$$

と表される。総貯蓄は，全て次期の資本形成に使用されるとする。

人口は一定率 γ で成長すると仮定すると，$L_t=(1+\gamma)^t L_0$, $L_{t+1}=(1+\gamma)L_t$ と示される。

以上のような諸仮定の下で，新古典派成長理論の資本蓄積方程式に対応する1階の定差方程式が次のように示される。

$$k_{t+1}=s(k_t)f(k_t)/(1+\gamma) \tag{36}$$

生産関数に関する通常の仮定のもとで，(36)式の写像は2つの不動点を持つ。その一つは原点であり，動学的に不安定な不動点である。もう一つは(36)式の定常解である $k^*=s(k^*)f(k^*)/(1+\gamma)$ により示される漸近安定的な不動点である。

新古典派の経済成長理論では，$k^*=k_t=k_{t+1}$ となる定常均衡状態が存在し，その下で資本蓄積と人口の増加が均斉的な経済成長が可能であることが示された。ここでは，リー＝ヨークの定理を利用して，生産性，貯蓄率，人口成長率などのパラメータの相互作用により，複雑な経済循環が生じる可能性を示す。

4-4. 一部門経済システムとカオス

議論をより明確にするために，生産関数や貯蓄関数を特定化することにより資本蓄積の動学的な動向を検討しよう。まず，生産関数は標準的なコブ＝ダグラス型として特定化する。

$$y_{t+1}=Ak_t^{\beta}/(1+\gamma) \tag{37}$$

ここで，Aは一定の係数であり，βは資本の産出弾力性を示すパラメータである。次に，貯蓄率は，資本ストックに比例的に増加し，利子率の増加関数であると仮定する。また，利子率が非常に低い場合には貯蓄が大幅に低下し，現行の資本水準を維持できなくなることを仮定する。したがって，資本水準が低下する場合もおこることになる。このような性格を持つ貯蓄関数を，次のように特定化する。

$$s(k,\ r)f(k)=a[1-(b/r)]k \tag{38}$$

(37)式のコブ＝ダグラス型生産関数の下で利子率は，$r=f'(k)=\beta Ak^{\beta-1}$ と示されるので，(38)式の貯蓄関数は，$s(k,\ r)f(k)=a[1-(b/\beta Ak^{\beta-1})]k$ と書き直すことができる。したがって，(36)式は次のように書き改められる。

$$k_{t+1}=[a/(1+\gamma)]k_t[1-(b/\beta A)k_t^{(1-\beta)}] \tag{39}$$

(39)式は，区間 $[0,(\beta A/b)^{1/(1-\beta)}]$ における単峰型の曲線であり，その傾きを求めると，次のように示される。

$$\frac{dk_{t+1}}{dk_t}=[a/(1+\gamma)][1-(b/\beta A)(2-\beta)k_t^{(1-\beta)}] \tag{40}$$

したがって，(39)式の傾きは，資本ストックkの上昇とともに低下してゆくことがわかる。

(39)式に，カオスの発生の条件となるリー＝ヨークの定理を適用するために，以下のような考察をおこなう。(39)式が最大値を取るのはその傾きがゼロとなる点，すなわち(40)式がゼロとなる点であり，

$$k^*=[\beta A/b(2-\beta)]^{1/(1-\beta)} \tag{41}$$

と示される。資本ストックの取り得る最大値は，(39)式右辺に(41)式を代入することにより，

$$k^m=[a/(1+\gamma)][(1-\beta)/(2-\beta)][\beta A/b(2-\beta)]^{1/(1-\beta)} \tag{42}$$

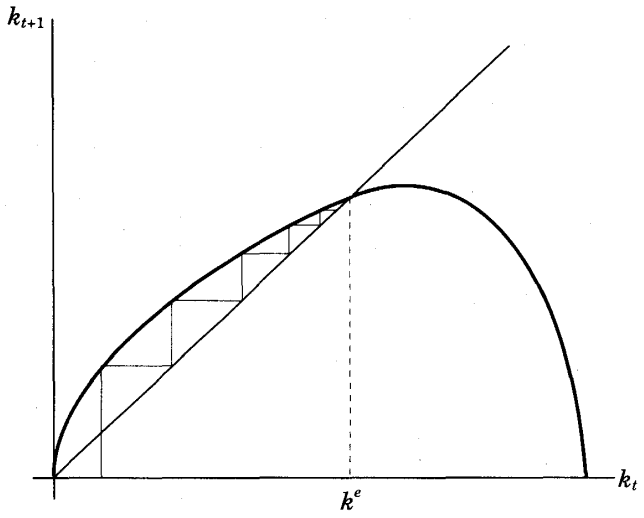
と示される。

今，生産関数のパラメータβ，Aと，貯蓄関数のパラメータのうちbが一定であると仮定しよう。このとき，(41)式よりk^*は一定となることがわかる。そこで，(42)式よりk^mは貯蓄関数のパラメータaが上昇するにつれ増加してゆくことがわかる。したがって，貯蓄パラメータaが増加してゆくにつれ，(39)式の曲線は上方に伸長し，単峰型の「峰」が高くなってゆくことがわかる。

(i)　aが十分に小さい場合

この場合には，図12に示されるように，単峰型の頂点は45°線（$k_{t+1}=k_t$）の下方に位置し，安定的な均衡点k^eが存在する。したがって，kの初期値のいかんにかかわらず，k_tはk^eに収束する。

図12 a が小さい場合



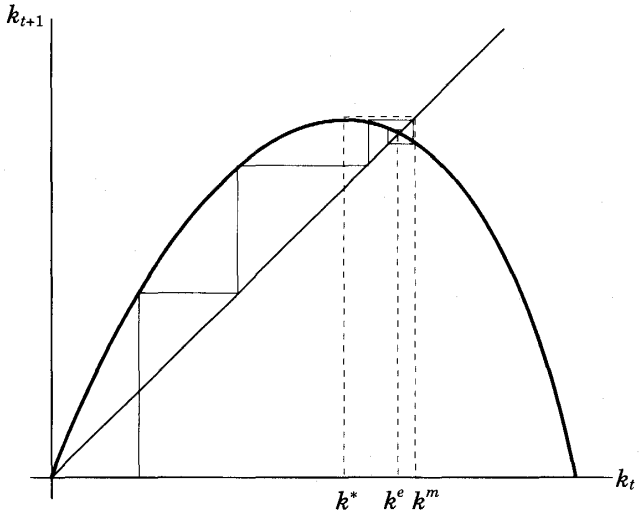
(ii) 資本ストックの最大点と頂点が一致する場合

a が増加して頂点が45° 線と一致する場合，均衡点は $k^e=k^*=k^m$ となり，この点に収束してゆく。

(iii) 頂点が45° 線の上方に位置する場合

a がさらに増加すると，図13に示されるように，頂点は45° 線の上方に出てゆく。このとき，$k^*<k^e<k^m$ ならば，k_t は循環しながら k^e に収束する。

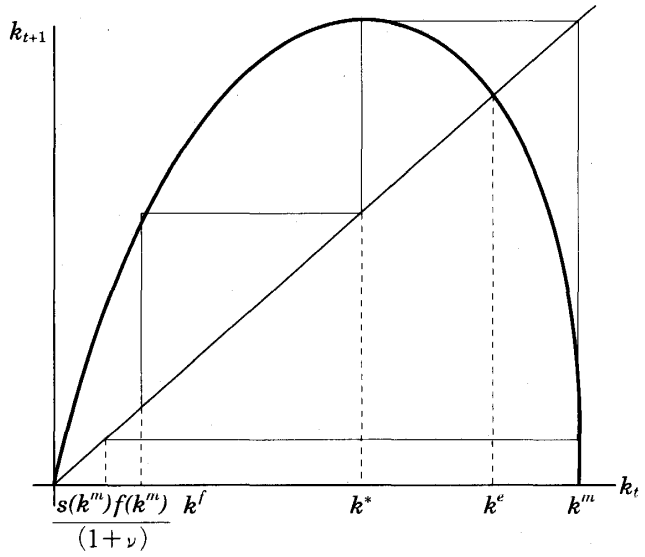
図13 循環しながら収束する場合



(iv) カオスの発生

さらに a が増加することにより，周期分岐が始まる。$k^*=s(k)f(k)/(1+\gamma)$ の最小根を k^f として，$s(k^m)f(k^m)/(1+\gamma)\leq k^f<k^*<k^m$ のとなる場合には，リー＝ヨークの定理に規程される「カオス発生の十分条件」が満たされ，k_t の軌道はカオス状態となる。

図14　カオスが発生する場合



5. 内生的景気循環理論におけるカオス

1980年代になると，数学や物理学の分野における非線形力学系の理論が発展し，経済学の分野においてもそのような理論の応用が行われるようになった。経済学の分野における応用例の1つが，内生的景気循環の理論である。これは，前節において展開した記述的経済成長モデルとは異なり，完全競争市場における経済主体の合理的な意思決定に基づくミクロ経済学的基礎の上に構成されている点に特徴がある。このような意味で，これらのモデルは「最適経済成長モデル」，あるいは「均衡論的」景気循環理論とも呼ばれている。

ここでは，そのような景気循環理論の代表ともいえるBenhabib=Nishimura [1985] を取り上げ，検討を進めよう。一般的に，新古典的な最適成長モデルにおいては，長期均衡成長経路の存在と，いわゆる「ターンパイク定理」と呼ばれる軌道の存在が得られることが知られている。しかしながら，2部門経済において2種類の財が生産されるような場合には，そのような安定性は保証されない。特に，離散時間の最適成長モデルにおいては，周期軌道を発生させるような最適制御が理論的に支持されることもある。以下では，Benhabib=Nishimura [1985] によりながら，2部門経済における最適成長の枠組みにおいて，経済の循環的変動や景気循環の発生メカニズムを検討してゆこう。

5-1. 離散時間の2部門最適成長モデル

標準的な2部門経済モデルを考える。t期に存在する資本ストックをk_tとし，労働供給は毎期一定で，簡単のために1とする。この経済には2部門の生産部門が存在するが，第1部門において生産される財を消費財c，第2部門においては資本財が生産されると仮定する。また，資本ストックの水準は，前期の第2部門の生産量に一致する。

第 i 部門に投入される資本を K_{it}，労働を L_{it} とすると，生産要素の需給均衡条件は，次のように示される。

$$K_{1t}+K_{2t}=k_t \tag{43}$$

$$L_{1t}+L_{2t}=1 \tag{44}$$

両部門の生産関数は次のように示される。

$$c_t=F_1(K_{1t},\ L_{1t}) \tag{45}$$

$$k_{t+1}=F_2(K_{2t},\ L_{2t}) \tag{46}$$

これら 2 つの生産関数は，連続，単調増加，狭義凹であると仮定する。

以上の設定の下で，最適制御問題は次のように示される。

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \tag{47}$$

$$\text{s.t. } c_t=F_1(K_{1t},\ L_{1t})$$

$$k_{t+1}=F_2(K_{2t},\ L_{2t})$$

$$K_{1t}+K_{2t}=k_t$$

$$L_{1t}+L_{2t}=1$$

ここで，β は現在価値割引率，効用関数は狭義凹と仮定する。

消費財は，生産要素の総投入量の制約のもとで，効率的に生産されなければならない。したがって，各期の消費量は次のような条件付最大化問題の解として与えられる[9]。

$$\max c_t=F_1(K_{1t},\ L_{1t}) \tag{48}$$

$$\text{s.t. } k_{t+1}=F_2(K_{2t},\ L_{2t})$$

$$K_{1t}+K_{2t}=k_t$$

$$L_{1t}+L_{2t}=1$$

この問題を解くことにより，各期の消費可能量 c_t が，k_t, 1, k_{t+1} に依存して決まる。この関係は「社会的生産関数」と呼ばれ，次のように示される。

$$c_t=c(k_t,\ k_{t+1}) \tag{49}$$

ただし，労働は各期 1 で一定であるので明示的には示していない。また，労働は各期 1 に正規化しているので，すべての変数は労働者一人当たりの値となっている。

社会的生産関数(49)式を用いると，各期の効用水準は，間接的効用関数を用いて，$v(k_t,\ k_{t+1})$ と示される。したがって，この経済の最適成長経路は，間接的効用関数により示される将来効用流列を最大化する消費計画として次のように示される。

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t v(k_t,\ k_{t+1}) \tag{50}$$

$$\text{s.t. } k_t,\ k_{t+1}\in D$$

ここで間接的効用関数について，$v_1>0$, $v_2<0$, $v_{11}<0$, $v_{22}<0$, $v_{11}v_{22}-v^2_{12}>0$ と仮定される。また，D は各期の k_t と，それを前提として決まる資本ストックの生産可能水準 k_{t+1} の関係を示す集合であり，許容集合と呼ばれる。これは，両部門の生産技術と部門間の生産要素の配分に依存

9) この点は，藤本 [2002] による。

している。

(50)式の最適制御問題は，動的計画法（Dynamic Programming）の手法を用いて解くことができる。その評価関数（value function）は，

$$W_\beta(k_0)=\max\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t v(k_t,\ k_{t+1}) \tag{51}$$
$$\text{s.t. } k_t,\ k_{t+1}\in D$$

と定義される。ベルマンの最適性原理に従い，計画期間を今期と来期以降の将来期という2期間に分割して，2期間の最大化問題に置き換えることができる。

$$W_\beta(k_t)=\max\{v(k_t,\ k_{t+1})+\beta W_\beta(k_{t+1})\} \tag{51}$$
$$\text{s.t. } k_t,\ k_{t+1}\in D$$

これにより，k_{t+1} の値は，k_t を所与として，最大化問題により解くことができるので，k_{t+1} を k_t の関数として表すことができる。

$$k_{t+1}=h(k_t) \tag{52}$$
$$k_t,\ k_{t+1}\in D$$

(52)式は，政策関数（Policy Function）と呼ばれる。このようにして，2部門経済の最適成長経路を1階の差分方程式として示すことができる。

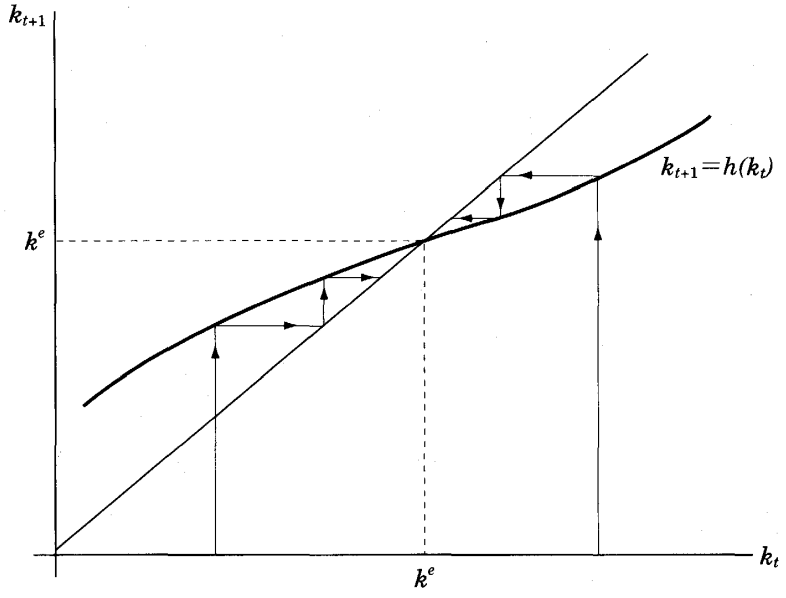
5-2. 最適成長経路とカオス

Benhabib=Nishimura は，この政策関数について以下のことが成立することを示した。

(i) $v_{12}>0$ の場合

このとき，h は単調増加関数となり，その傾きが45°より小さいか，大きいかにより，不動点に単調収束するか，あるいは単調発散してゆく。これは，図15に示される。

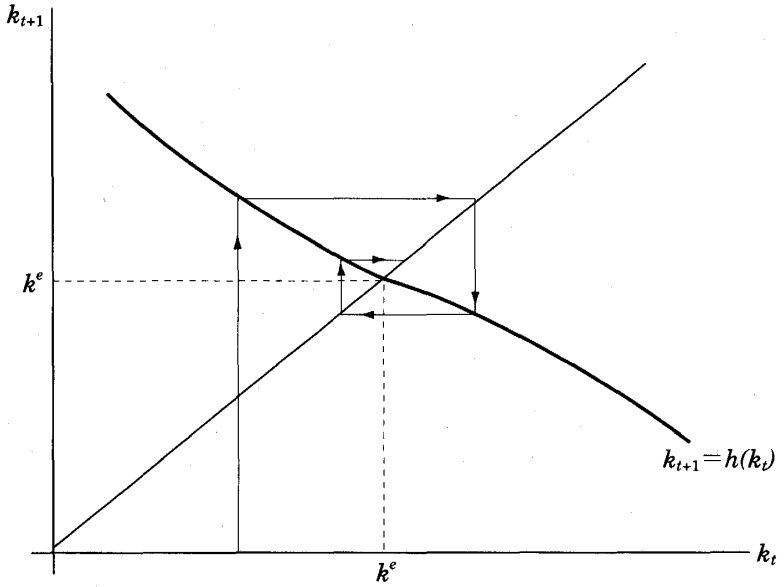
図15　単調に収束してゆく場合



(ii) $v_{12}<0$ の場合

h は単調減少関数となり，最適成長経路は振動する。これは，図16に示される。

図 16 振動しながら収束する場合



(iii) 十分小さい k_t について $v_{12}>0$ となり，十分に大きい k_t について $v_{12}<0$ となる場合

$\partial u/\partial c>0$ を考慮すれば，$v_{12}>0 \Leftrightarrow c_{12}>0$，$v_{12}<0 \Leftrightarrow c_{12}<0$ となる。したがって，許容集合 D の中で c_{12} の符号が正から負へと変わるのであれば，政策関数 h は単峰型となり，カオス発生の可能性がある。

Deneckere=Pelican [1986] では，数値例を用いて，2部門最適成長経路として係数が4のロジスティック方程式となる例を示している。彼らが考えた v 関数は次のようなものである。

$$v(k_t,\ k_{t+1})=k_tk_{t+1}-k^2{}_tk_{t+1}-\frac{1}{3}k_{t+1}-0.075k^2{}_{t+1}$$

$$+\frac{100}{3}k_t-7k^2{}_t+4k^3{}_t-2k^4{}_t \tag{54}$$

この例の評価関数は，$W(k_t)=\dfrac{100}{3}k_{t+1}-5k^2{}_{t+1}$ となる。また，$\beta=0.01$ とする。
ベルマン方程式は，次のようになる。

$$W(k_t)=\max\left\{v(k_t,\ k_{t+1})+0.01\left(\frac{100}{3}k_{t+1}-5k^2{}_{t+1}\right)\right\} \tag{55}$$

左辺を k_{t+1} について最大化し，偏導関数をゼロとおくことにより，

$$k_{t+1}=h(k_t)=4k_t(1-k_t) \tag{56}$$

が得られる。第4-2節において検討したように，(56)式はリー＝ヨークの定理を満たし，カオス現象が発生することがわかる。

6. 結　　語

ここでは，マクロ動学理論の発展の中で，非線形力学系理論が経済成長や景気循環の分析にどのように適用され，また，現実経済の複雑な成長・変動過程の解明にどのように貢献してきたかを検討してきた。ケインズ経済学の動学化を目指したサミュエルソン＝ヒックスや，非線形力学系理論の発展の中で新たな解釈を与えられることになったカルドアの景気循環論，また，デイによる新古典派経済成長論のカオス動学としての再構築，内生的景気循環理論とカオス経済動学など，非線形力学系理論との関係で展望してきた。

これらの分析においては，モデルの内部構造に確定論的，あるいは，決定論的な非線形動学方程式を内在させることにより，持続的な循環現象や不規則で複雑な循環的変動のメカニズムを説明することに成功している。この意味で，非線形力学系理論の経済学への応用により，マクロ経済動学は大きな進歩を遂げたと評価し得よう。

しかしながら，所望の非線形動学体系を形成するため，技術的制約によるモデルの単純さ，また，モデルの構造やパラメータの設定に恣意性という問題がぬぐいきれないという恨みが残る。この分野における研究の更なる発展のためには，より柔軟で，適用の可能性が高い，新たな「複雑系の動学方程式」とその応用が望まれているといえよう。

参 考 文 献

Baumol, W. J. and J. Benhabib (1989) "Chaos, Significance Mechanism, and Economic Applications", *Journal of Economic Perspectives*, vol. 3, pp. 77-105.

Benhabib, J. ed. (1992) *Cycles and Chaos in Economic Equilibrium*, Princeton University Press.

———and Nishimura, K. (1985) "Competitive Equilibrium Cycles", *Journal of Economic Theory*, vol. 35, pp. 284-306.

Boldrin, M. and R. Denkere (1990) "Sources of Complex Dynamics in Two Sector Growth Models", *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol. 14, pp. 627-653.

Day, R. (1982) "Irregular Economic Cycles", *American Economic Review*, vol. 72, pp. 406-414.

———(1983) "The Emergence of Chaos from Classical Economic Growth", *Quarterly Journal of Economics*, vol. 98, pp. 201-213.

Deneckere, R. and S. Perican (1986) "Competitive Chaos", *Journal of Economic Theory*, vol. 40, pp. 13-25.

Grandmont, J. M. (1985) "On Endogenous Competitive Business Cycles", *Econometrica*, vol. 53, pp. 995-1045.

Hicks, J. R. (1950) *Contributions to the Theory of the Trade Cycle*, Oxford University Press.（古屋弘訳(1951)，『景気循環論』，岩波書店。）

Kaldor, N. (1940) "A Model of the Trade Cycle", *Economic Journal*, vol. 50, pp. 78-90.

Lefschetz, S. (1962) *Differential Equations: Geometric Theory 2nd ed.*, Interscience Publishers.

Lorenz, H. W. (1997), *Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion*, Springer-Verlag.（小野崎保，

笹倉和幸訳（2000），『非線形経済動学とカオス』，日本経済評論社。）

Samuelson, P. A. (1939) "Interactions between the Multiplier Analysis and Principles of Acceleration", *Review of Economic Studies*, vol. 21, pp. 75-78.

Solow, R. M. (1956) "A Contribution to the Theory of Economic Growth", *Journal of Political Economy*, vol. 70, pp. 65-94.

岩井克人，伊藤元重編（1994）『現代の経済理論』，東京大学出版会。

藤本正樹（2002）「非線形力学系の理論による景気循環理論」，吉田和男編，『複雑系経済学へのアプローチ』，東洋経済新報社所収。

福岡正夫（1994）『ゼミナール経済学入門（第2版）』，日本経済新聞社。

小野俊夫編（1996）『経済動学の展開――カオス理論とゲーム理論を中心に――』，学文社。

――――（1996）「経済動態とカオス」，小野俊夫編，『経済動学の展開――カオス理論とゲーム理論を中心に――』，学文社所収。

寺田宏洲（2004）『非線形動学と経済――政策・ロジスティック・カーブ・カオス――』，晃洋書房。

吉田博之（2003）『景気循環の理論――非線形動学アプローチ』，名古屋大学出版会。

吉田和男編(2002)『複雑系経済学へのアプローチ』，東洋経済新報社。

（受付 2006年1月11日）