非線形微分方程式系と安定的なリミットサイクル

——複雑系経済学のために——

寺　田　宏　洲

キーワード
非線形微分方程式　リミットサイクルの安定性　特異点　固有値
解曲線　複雑系経済学　H. Poincaré　解析的な分析　トポロジカルな分析

目　次

Ⅰ　はじめに
Ⅱ　解析的アプローチ
(1)　動学モデルと極座標表示
(2)　半径 r と角度 θ の時間変化に関する動き
Ⅲ　トポロジカルアプローチ
(1)　動学モデル，特異点，固有値
(2)　解曲線と半径 r の円との横断性
Ⅳ　結びに代えて

Ⅰ　はじめに

或る系および或るシステムの動学現象を，しばしばいくつかの微分方程式で記述する自然科学流の分析手法は，社会科学の中ではまず最初に経済学に採り入れられ，それなりの進歩と発展を遂げてきたことは周知の事実である。

そこで用いられた微分方程式は，主に17C 以来のニュートン・ライプニッツ流の線形動学であった。従って，時間変化に関する動学解を解析的に解くことは可能であった。

経済動学へのこの分析手法の適用がそれなりの成果をもたらしたことは事実であるけれども，それは時間と空間の変化に対して局所的，部分的であったと言わなければならない。

ところで，この世界の動学現象の本質は，線形動学ではなくて非線形動学である。非線形であるが故に，時間変化に関する動学解を解析的に解くことはほとんど困難である。それに代わりできうることは，位相幾何学的（トポロジカルな）手法によって，動学解の大域的振る舞いとその構造を定性的に調べることである。そのトポロジカルな分析手法の有効性と重要性を初めて主張したのが19C 末から20C 初頭にかけて活躍したH. ポアンカレであった。

線形動学なら微分方程式の一般解で議論できるが，非線形動学は，個別的にして特定化された形の微分方程式系でしか議論できない。

ところで，H. ポアンカレは，一つの個別的にして特定化された非線形微分方程式系（動学モデル）を提示しただけで，本格的な理論展開もなしにその動学解の振る舞いを図

示して，そこでのリミットサイクルはきわめて不安定であることを主張している[1]。そのことについてわれわれは，別稿にて解析的分析手法とトポロジカルな分析手法とを用いてポアンカレが省略している理論の展開部分を正確に埋める努力を払っている[2]。

この議論の中では，動学モデルの解が一つのリミットサイクル上に在るときにのみ—そのことはきわめて稀なことであるが—そのリミットサイクルは安定的であるが，初期値がほんの少し，そのリミットサイクルから乖離しただけでその後のリミットサイクルはきわめて不安定になるということが主張されている。

ところで，① 常に安定的なリミットサイクルが成立するケースはないものであろうか？ ② それが成立する場合にはどのような理論的検討が必要であろうか？ これらが将来の非線形経済動学への基礎作業としての本稿執筆の動機であり基本認識でもあった。

従って，本稿の目的は以下の3点である。

1点目は，不安定なリミットサイクルを産み出すH. ポアンカレの動学モデルを加工して，安定的なリミットサイクルを産み出す動学モデルを提示すること。

2点目は，その動学モデルに解析的およびトポロジカルな分析を適用して動学解の振る舞いを定性的に調べること。

3点目は，その結果見つかるリミットサイクルがきわめて安定的であることを論証すること。

従って，本稿の議論の展開は以下のようになる。

次のII章は，点 $(x_{(t)}, y_{(t)})$ の動学的軌跡を求めるための解析的アプローチにあてられている。すなわち，まず最初に安定的なリミットサイクルをもつ動学モデルを提示し，次に，$x-y$ 座標面において変数 x や y の時間 t に関する動きを極座標表示する。そして，半径 r と回転角度 θ の時間変化に関する動きを調べることによって，点 $(x_{(t)}, y_{(t)})$ の時間変化に関する動きを図示することが可能になる。

続くIII章は，点 $(x_{(t)}, y_{(t)})$ の動学的軌跡を求めるためのトポロジカルなアプローチにあてられる。すなわち，非線形微分方程式系(動学モデル)の特異点や固有値を求め，しかる後に，解曲線と半径 r の円との横断性を調べることによって，点 $(x_{(t)}, y_{(t)})$ の動学的回転の方向が検討される。議論の結果は，II章でなされたものと同じものであることが改めて確認されるであろう。

最後のIV章では，本論文全体の議論を通じて明らかになった論点と，このような議論に対する若干のコメントが付されるであろう。

II 解析的アプローチ

(1) 動学モデルと極座標表示

H. ポアンカレが提示した不安定なリミットサイクルを生み出す非線形微分方程式系[1]に

1) H. Poincare', 'Courbes De'finies par une E'quation Diffe'rentielle' *Jounal de Mathe'matiquees pures et Applique'es*, Annee 1882. Paris, pp. 278～279.

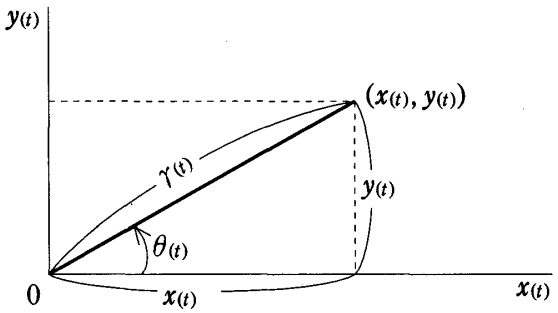
2) 寺田宏洲「非線形微分方程式系と不安定なリミットサイクル—複雑系経済学のために—」『龍谷大学 経済学論集』第43巻第1号，2003年6月．PP. 1～11.

簡単な操作を与えると，安定的なリミットサイクルを生み出すであろう次の非線形微分方程式系（動学モデル）が求まる[3)]。

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=y(1+x^2+y^2)+x(1-x^2-y^2) & (1) \\ \dfrac{dy}{dt}=-x(1+x^2+y^2)+y(1-x^2-y^2) & (2) \end{cases}$$

x, y はそれぞれ時間 t の関数であるので，（図１）のように原点から点（$x_{(t)}$, $y_{(t)}$）に至る距離 r も，また，x 軸と r とのなす角度 θ も，ともに時間 t の関数である。よって，$x_{(t)}$, $y_{(t)}$ をそれぞれ極座標表示してみる。

（図　1）



$$x_{(t)}=r_{(t)}\cos\theta_{(t)} \quad (3)$$

$$y_{(t)}=r_{(t)}\sin\theta_{(t)} \quad (4)$$

（３），（４）各式の両辺を時間 t に関して全微分する。

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dr}{dt}\cos\theta+r(-\sin\theta)\cdot\frac{d\theta}{dt} \quad (5)$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dr}{dt}\sin\theta+r\cos\theta\cdot\frac{d\theta}{dt} \quad (6)$$

（５），（６）式を行列表示する。

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{dr}{dt} \\ \dfrac{d\theta}{dt} \end{pmatrix} \quad (7)$$

一方，（１），（２）式で表される非線形動学体系の右辺も，r と θ で極座標表示したものを行列表示してみたい。（３），（４）各式と $x^2+y^2=r^2$ の関係を考慮すれば（８）式が求まる。

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r\sin\theta(1+r^2)+r\cos\theta(1-r^2) \\ -r\cos\theta(1+r^2)+r\sin\theta(1-r^2) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r(1+r^2) \\ r(1-r^2) \end{pmatrix} \quad (8)$$

3)　H. ポアンカレ（1882年）が提示した３番目の例（注1)の論文）の両辺を -1 で割って書き換えてやると，（１），（２）式で表される動学モデルが求まる。

(7)=(8)より,

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{dr}{dt} \\ \frac{d\theta}{dt} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r(1+r^2) \\ r(1-r^2) \end{pmatrix} \quad (9)$$

$\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}=\mathbf{A}$ と定義し，行列式 $|\mathbf{A}|$ の値を求めると r となる。よって，(9)式の両辺に $\mathbf{A}$ の逆行列 $\mathbf{A}^{-1}$ をかけると，次の(10)式が求まる。

$$\begin{pmatrix} \frac{dr}{dt} \\ \frac{d\theta}{dt} \end{pmatrix}=\underbrace{\frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{4)}\begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r(1+r^2) \\ r(1-r^2) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+r^2 \\ 1-r^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r(1-r^2) \\ -(1+r^2) \end{pmatrix}^{5)} \quad (10)$$

(2) **半径 r と角度 θ の時間に関する動き**

(10)式は，(図1) での原点からの距離である半径 r と，x 軸から左向きに半径 r までの角度である θ との時間 t に関する微分方程式系が，次の(11)式，(12)式で与えられることを意味している。

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt}=r(1-r^2) & (11) \\ \frac{d\theta}{dt}=-(1+r^2) & (12) \end{cases}$$

---

4) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}=\mathbf{A}$ と置く。

$\Delta_{11}=(-1)^{1+1}r\cos\theta=(-1)^2r\cos\theta=r\cos\theta$　　$\Delta_{12}=(-1)^{1+2}\sin\theta=-\sin\theta$

$\Delta_{21}=(-1)^{2+1}(-r\sin\theta)=r\sin\theta$　　$\Delta_{22}=(-1)^{2+2}\cos\theta=\cos\theta$

よって行列 $\mathbf{A}$ の余因子行列 $\boldsymbol{\Delta}$ は次のように表される。

$$\boldsymbol{\Delta}=\begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r\cos\theta & -\sin\theta \\ r\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

ここで転置行列 ${}^t\boldsymbol{\Delta}=\begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} \end{pmatrix}$ であり，$|\mathbf{A}|=r(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=r$ であるので，

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{|\mathbf{A}|}{}^t\boldsymbol{\Delta}=\frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

5)
$$\begin{pmatrix} \frac{dr}{dt} \\ \frac{d\theta}{dt} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r\cos\theta\sin\theta-r\sin\theta\cos\theta & r\cos\theta\cos\theta+r\sin\theta\sin\theta \\ -\sin\theta\sin\theta-\cos\theta\cos\theta & -\sin\theta\cos\theta+\cos\theta\sin\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+r^2 \\ 1-r^2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & r \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+r^2 \\ 1-r^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r(1-r^2) \\ -(1+r^2) \end{pmatrix}$$

(12)式は，次のことを示している。即わち，

$r>0$ なので，常に $\frac{d\theta}{dt}<0$ となる。

そのことは，非線形微分方程式系(1)，(2)（動学モデル）の解である $(x_{(t)}, y_{(t)})$ の時間 t に関する運動の方向が，常に右回りであることを示している。

(11)式は，次のことを示している。即わち，$r>0$ なので，(i) $r>1$，(ii) $r=1$，(iii) $0<r<1$ の3つのケースにわけて考えてみよう。

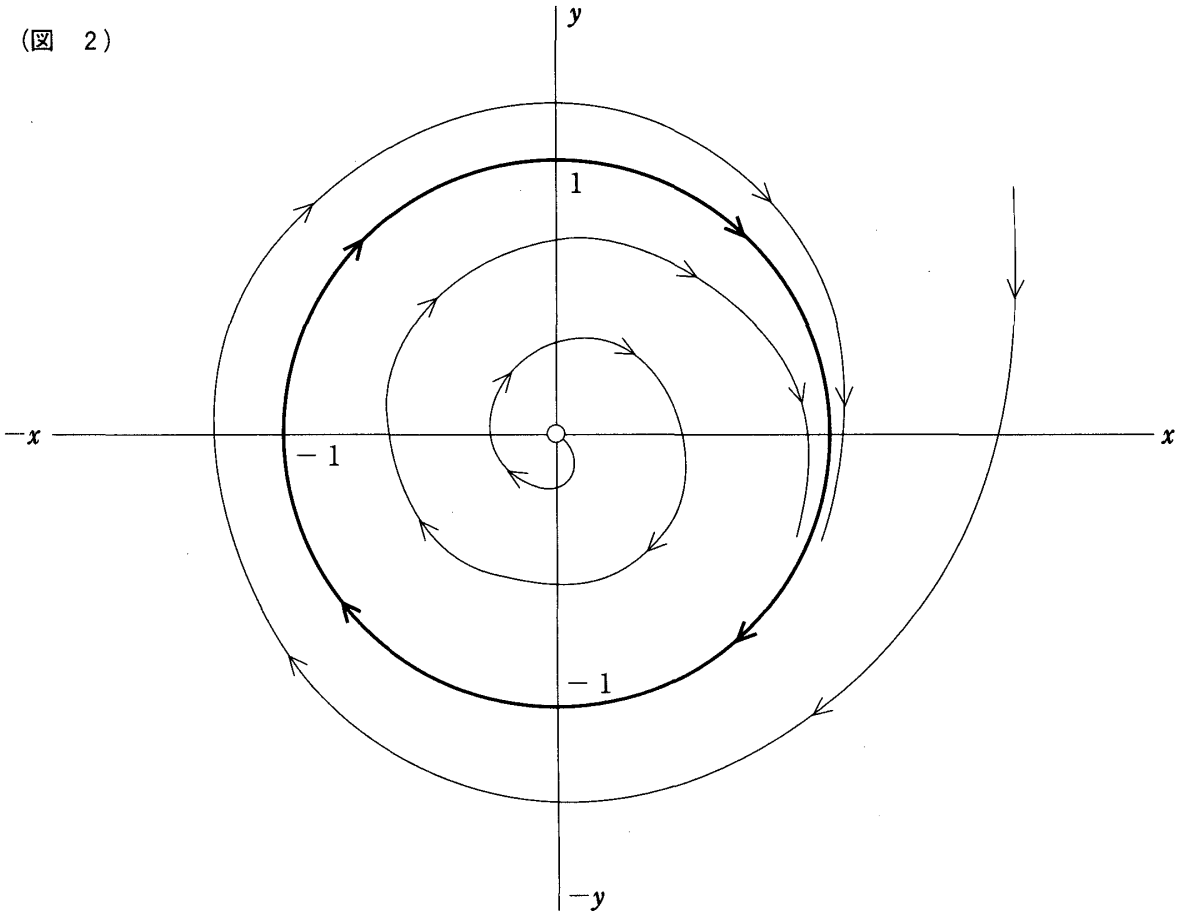
(i) $r>1$ なら，$\frac{dr}{dt}<0$ なので，r は，($r=1$ になるまで) 時間経過と共に小さくなる。

(ii) $r=1$ なら，$\frac{dr}{dt}=0$ となる。よって，半径1の円周上を右回りにぐるぐる回る。

(iii) $0<r<1$ なら，$\frac{dr}{dt}>0$ となる。よって，原点の近傍から出発した点は，右回りで r を伸ばしながら半径1の円であるリミットサイクルに巻きつくように運動することになる。

(11)式，(12)式に関する以上の分析をまとめて図示すると，次の（図2）が得られる。

(図　2)



Ⅲ トポロジカルアプローチ

(1) 動学モデル，特異点，固有値

この章では，前章での議論の前提になった(１)，(２)式の非線形微分方程式系（動学モデル）の解の振る舞いを，H. ポアンカレ流のトポロジカル（位相幾何学的）な分析手法で議論してみよう。

再度，(１)，(２)式で示される動学モデルが提示される。

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=y(1+x^2+y^2)+x(1-x^2-y^2) & (1) \\ \dfrac{dy}{dt}=-x(1+x^2+y^2)+y(1-x^2-y^2) & (2) \end{cases}$$

この動学系の特異点，つまり，$\dfrac{dx}{dt}=0$，$\dfrac{dy}{dt}=0$ を満たす点を探してみよう。

$$\begin{cases} y(1+x^2+y^2)+x(1-x^2-y^2)=0 & (1)' \\ -x(1+x^2+y^2)+y(1-x^2-y^2)=0 & (2)' \end{cases}$$

$(1)'\times y-(2)'\times x$ より

$$(y^2+x^2)(1+x^2+y^2)=0$$

x，y は実数であるので $(1+x^2+y^2)\neq 0$ である。よって，$x^2+y^2=0$，即ち，$x=0$，$y=0$ よって，特異点は，原点のみであることが判明した。

特異点である原点の近傍での解の振る舞いを調べるために，非線形微分方程式系(１)，(２)を原点の近傍で線形近似，つまり，テーラー展開してみる。

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x+y+y(x^2+y^2)-x(x^2+y^2) & (1) \\ \dfrac{dy}{dt}=-x+y-x(x^2+y^2)-y(x^2+y^2) & (2) \end{cases}$$

一次の項の係数行列は，次のようになる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

この固有値 λ を調べたい。そのために次の固有方程式を解く。

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0 \qquad (4)$$

$(1-\lambda)^2+1=0$ より

$$\text{固有値}\quad \lambda=1\pm i \qquad (5)$$

λ の実数部は，プラスなので拡大すること，或いは，湧き出すことを意味しているし，λ の虚数部は，回転することを意味している。ただし，回転の方向は今のところ何とも言えない。よって，以下の考察を加えて回転の方向を確定したい。

(2) **解曲線と半径 r の円との横断性**

原点を中心とした半径 r の円を C とする。

$$C : x^2+y^2=r^2 \qquad \text{ただし，} r>0 \tag{6}$$

動学モデルの解曲線が，円 C をどのように横断しているのかを調べてみよう。

円 C 上に点 $P=(a, b)$ をとった場合の，点 P における円 C への接ベクトル $\vec{Z}$ は，(7) 式で与えられる。それは，(図3) に示される。

$$\vec{Z}=(b, -a) \tag{7}$$

他方，円 C 上の点 $P=(a, b)$ を通る(1)，(2)の系の解曲線の接ベクトル $\vec{X}$ は，(8) 式で与えられる。それは，(図4) に示される。

$$\vec{X}=\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$$
$$=(b(1+a^2+b^2)+a(1-a^2-b^2), -a(1+a^2+b^2)+b(1-a^2-b^2)) \tag{8}$$

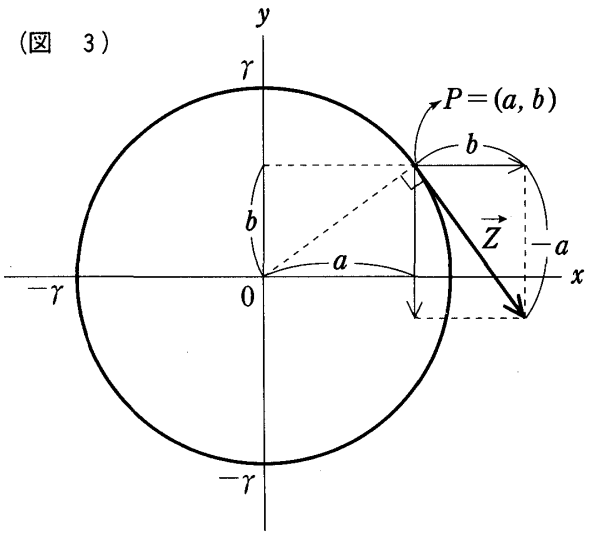
ここで，円周上の点 P における接ベクトル $\vec{Z}$ と，また点 P における解曲線の接ベクトル $\vec{X}$ との（上下の）位置関係を調べてみることによって，非線形微分方程式系(1)，(2)の解の回転の方向を確定したい。

$$\left|\begin{matrix}\vec{Z}\\ \vec{X}\end{matrix}\right|=\left|\begin{matrix} b & -a \\ b(1+a^2+b^2)+a(1-a^2-b^2) & -a(1+a^2+b^2)+b(1-a^2-b^2)\end{matrix}\right|$$
$$=-ba(1+a^2+b^2)+b^2(1-a^2-b^2)+ab(1+a^2+b^2)+a^2(1-a^2-b^2)$$
$$=(a^2+b^2)(1-a^2-b^2)$$
$$=r^2(1-r^2) \tag{9}$$

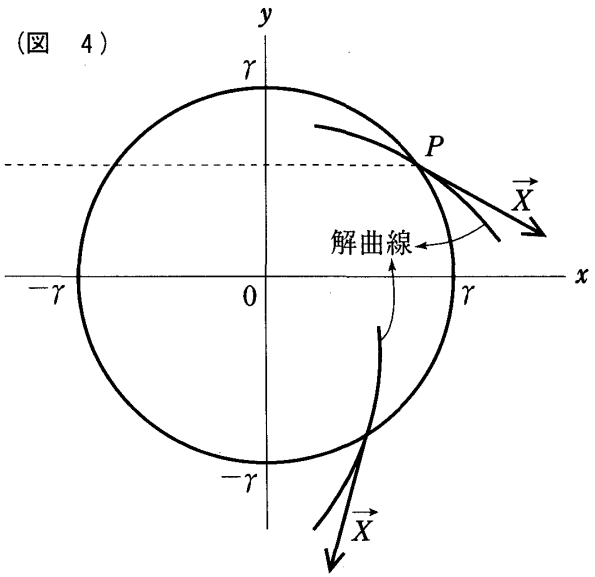
半径 $r(>0)$ のとり得る範囲を3つに分けて，(9)式の正，0，負を確定することにより，解の回転の方向を調べたい。即わち，

(i) $0<r<1$ ならば，$\left|\begin{matrix}\vec{Z}\\ \vec{X}\end{matrix}\right|>0$,

(図 3)



(図 4)



よって，（1），（2）の系の解は，円Cの内側から外側へ横切ることになる。

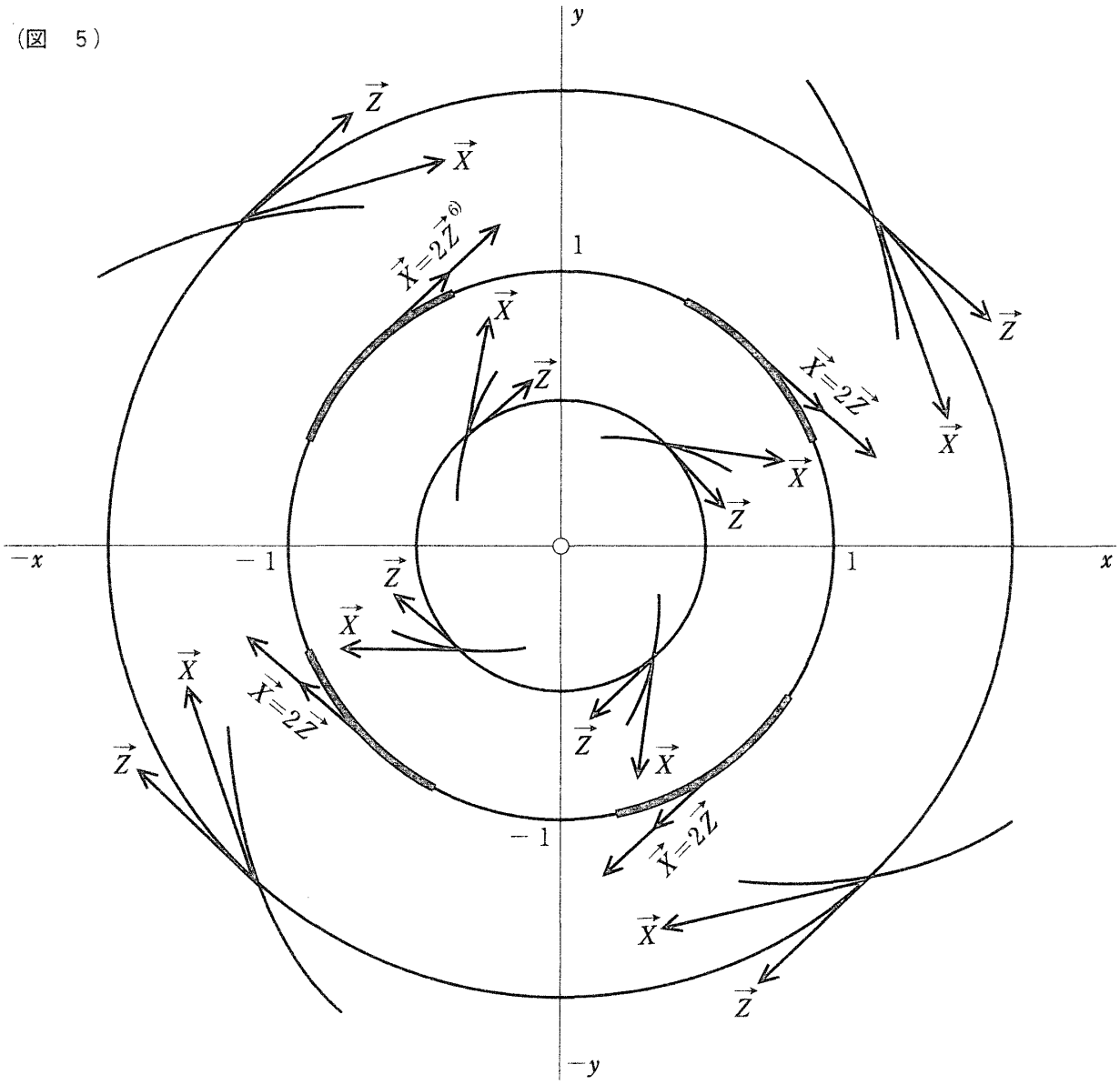
(ii)　$r=1$ ならば，$\begin{vmatrix}\vec{Z}\\ \vec{X}\end{vmatrix}=0$,

よって，（1），（2）の系の解は，円C上を右回りに回ることになる。

(iii)　$0<r<1$ ならば，$\begin{vmatrix}\vec{Z}\\ \vec{X}\end{vmatrix}<0$,

よって，（1），（2）の系の解は，円Cの外側から内側へ向けて横切ることになる。これらの結果を総合的に考慮して図示すると，次の（図5）が得られる。

（図　5）



6)　$\vec{X}$ を示す（8）式に $a^2+b^2=1$ を代入して，（7）式をも考慮すれば，$\vec{X}=2(b,\ -a)=2\vec{Z}$ となる。

Ⅳ　結びに代えて

本稿を閉じるに当たり，以上の議論を通じて明らかになった２つの大きな論点を改めて指摘しておこう。

① H. ポアンカレが1882年の『数学論集』の中で提示している不安定なリミットサイクルを生み出す非線形微分方程式系（動学モデル）[1)]の両辺を -1 で割ってわれわれが見慣れている形に書き換えると，本稿の安定的なリミットサイクルを生み出す非線形微分方程式系（動学モデル）（１），（２）式が得られるということについてである。すなわち，不安定的なリミットサイクルと安定的なリミットサイクル，—或いは，不安定な動学モデルと安定的な動学モデル—との間に根源的にして本質的な差異はないということである。このことは，驚くべきことである。ただ，時間経過に関する解の動きとその向きによって安定／不安定が決まるということである。

② Ⅱ章でなされた解析的アプローチの議論とⅢ章でなされたトポロジカルなアプローチの議論とは，本質的に同じものである。そのことは，結論的に言って，Ⅱ章の（図２）とⅢ章の（図５）とは同じことを意味していることに表れている。即ち，$(x_{(t)}, y_{(t)})$ で表される初期値が，半径１の円内にあれば必ず時間経過と共に半径を大きくしながら半径１の円に巻きつくように右回りで運動するだろうし，逆に，初期値が半径１の円の外側から出発すれば必ず時間経過と共に半径を小さくしながら半径１の円に巻きつくように右回りで運動するだろう。従って，半経１の円が安定的なリミットサイクルになる。

参考文献

1. L. Brand (1996): *Differential and Difference Equation,* John Wiley & Sons, Inc., New York.
2. H. Poincare' (1882), 'Courbes De'finies par une E'quation Diffe'rentielle' *Journal de Mathe'matiquees pures et Applique'es,* Annee. Paris, pp. 278～9.
3. S. Lefschetz (1962): *Differential Equation: Geometric Theory,* Second Edition, Interscience, New York.
4. H. W. Lorenz (1989, 93): *Nonlinear Dynamic Economics and Chaotic Motion,* Springer-Ver-lag Berlin, Heiderberg（H. W. ローレンツ著，小野崎保，笹倉和幸訳『非線形経済動学とカオス』日本経済評論社，2000年。）
5. Pierre. N. V. Tu (1992): Dynamical Systems: *An Introduction with Applications in Economics and Bilogy,* Springer-Verlag Berlin（ピエール N. V. チュー著，永田，堂谷，笹倉，大阿久共訳『経済分析ダイナミカルシステム』文化書房博文社，1997年。）
6. S. Wiggins (1990): *Introduction to Applied Nonlinear Dynamic Systems and Chaos,* Springer-Verlarg, New York（S. ウィギンス著，丹羽敏雄監訳『非線形の力学的とカオス　上』シュプリンガー・フェアラーク東京，1993年。）

※この研究は，４年前に始めた本学部，伊藤敏和教授との「複雑系」研究会の成果の一部である。記して感謝したい。言うまでもなく，あり得べき誤まりは，すべて筆者の責任である。

（受理　2003年４月11日）