「21世紀の地球環境とサスティナブル・ディベロップメント」
（日本私立学校振興・共済事業団学術研究振興資金対象研究）

線型微分方程式系と解の軌跡

寺　田　宏　洲

目　次

Ⅰ　問題提起とモデルの設定
Ⅱ　線型微分方程式系の一般解のグラフ
　Ⅱ－1〔ケース1：$\lambda>0$, $\mu>0$ の定数で $\lambda>\mu$〕
　Ⅱ－2〔ケース2：$\lambda<0$, $\mu<0$ の定数〕
　Ⅱ－3〔ケース3：$\lambda>0$, $\mu<0$ の定数〕
　Ⅱ－4〔ケース4：$\lambda<0$, $\mu>0$ の定数〕
Ⅲ　特異点の近傍における一般解の軌跡
　Ⅲ－1　特異点が source point になっている場合
　　――Ⅱのケース1に対応――
　Ⅲ－2　特異点が sink point になっている場合
　　――Ⅱのケース2に対応――
　Ⅲ－3　特異点が saddle point になっている場合
　　――Ⅱのケース3，ケース4に対応――
　Ⅲ－4　一般解が回転する場合

Ⅰ　問題提起とモデルの設定

経済の動学系は、微分方程式系で表わされるのが通常である。本稿の目的は、その微分方程式系の典型的な性質を調べることにある。そのことは、経済動学モデルの安定性、不安定性や複雑系の議論などを行なうときの基礎作業でもある。

まず最初に、基本的な形の線型微分方程式系を①として以下に示す。その時間変化に関する振る舞いは、どのようなものになるのであろうか。特に特異点の近傍での解の振る舞いはどのようなものになるのであろうか。数式と図との整合性をとりながら議論は

展開されるであろう。

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \lambda x \\ \dfrac{dy}{dt} = \mu y \quad \text{ただし、} \lambda, \mu \neq 0 \text{ で } \lambda > \mu \text{ とする。} \end{cases} \qquad ①$$

この系の特異点、つまり、$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dy}{dt} = 0$ を満たす点は、原点でしかないことは容易に理解される。ところで、$p = (a, b)$ を初期値にとる微分方程式系①の一般解は次の②となる。

$$\begin{cases} x = ae^{\lambda t} \\ y = be^{\mu t} \end{cases} \qquad ②^{〔注1〕}$$

この一般解は、時間の径過に対してどのような振る舞い、或いは軌道をとるのだろうか。最終的には、$x-y$ 平面上に一般解②の軌跡を図示したい。

そのための準備作業が次のⅡ章でなされる。即わち、一般解②において、定数として与えられる λ や μ を正負に関して取り得る四つのケースにまず分ける。そして各ケースの下で、更に a や b が正や負の値をとった場合に分けて一般解②の――つまり、x や y の――時間 t に関するグラフをあらかじめ得ておきたい。そのことは、次の第Ⅲ章で、λ や μ を正負に関して分けた四つのケース毎に、一般解②の時間変化に対する振る舞いを得る上できわめて便利であるからである。

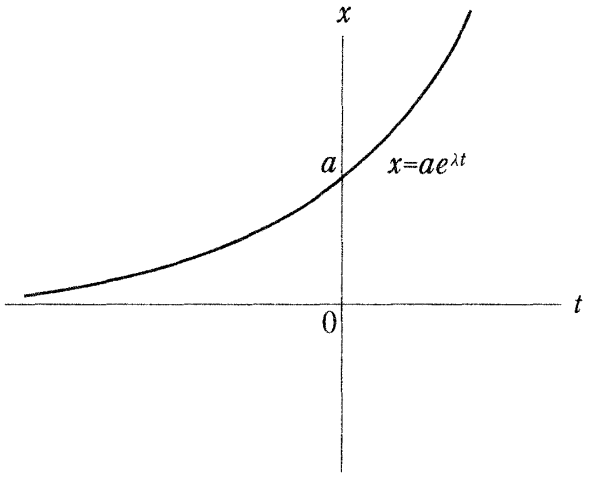
第Ⅲ章の議論は、特異点の近傍における一般解の軌跡を求めることでもある。そこでは、特異点が source point、sink point、saddle point という典型的性質をもった点であることが証明されるであろうし、加えて、一般解②が回転する軌跡をとるケースも議論されるであろう。

ただし、第Ⅱ、Ⅲ章の中で、単純なくり返しやその応用の議論は省略し、結果としての論点および図のみを掲げることにする。

Ⅱ　線型微分方程式系の一般解のグラフ

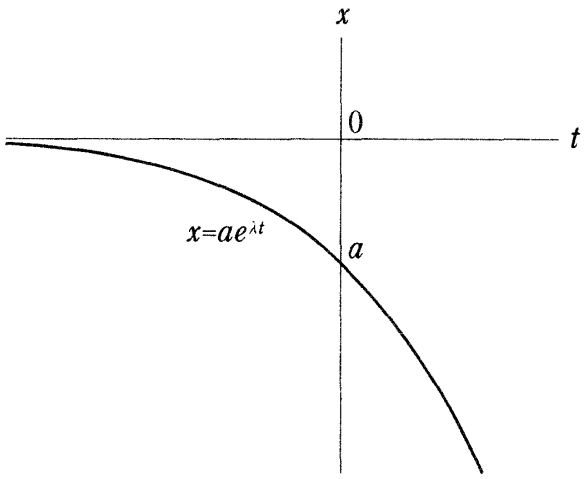
Ⅱ－1〔ケース1：λ＞0，μ＞0の定数でλ＞μ〕

$a>0$のとき



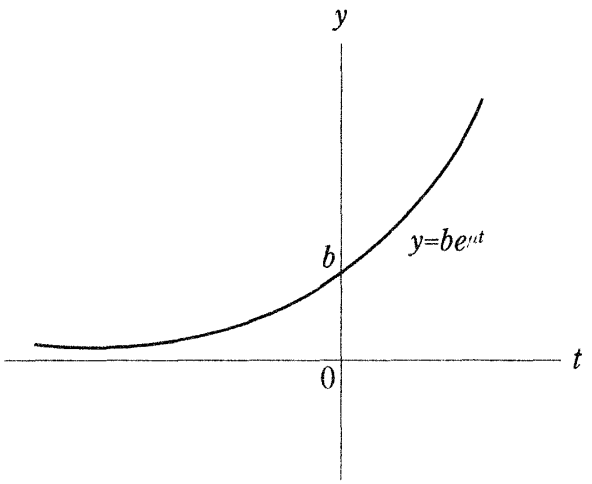
（イ　図）

$a<0$のとき



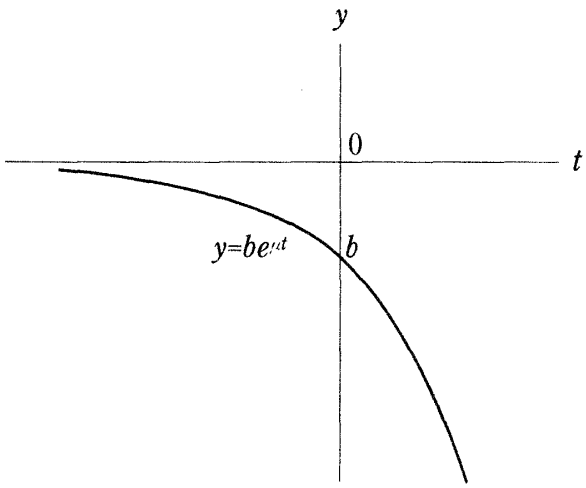
（ロ　図）

$b>0$のとき



（ハ　図）

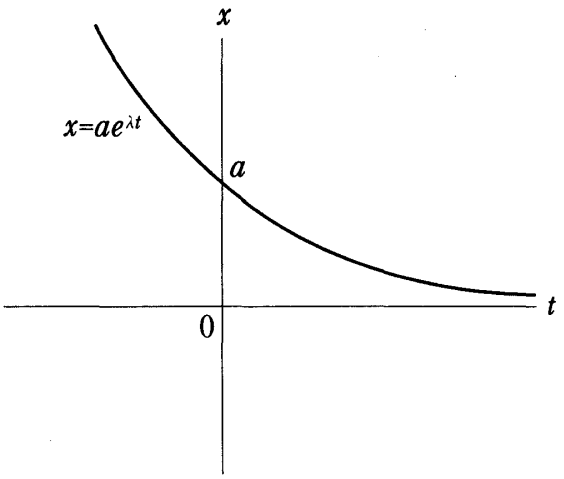
$b<0$のとき



（ニ　図）

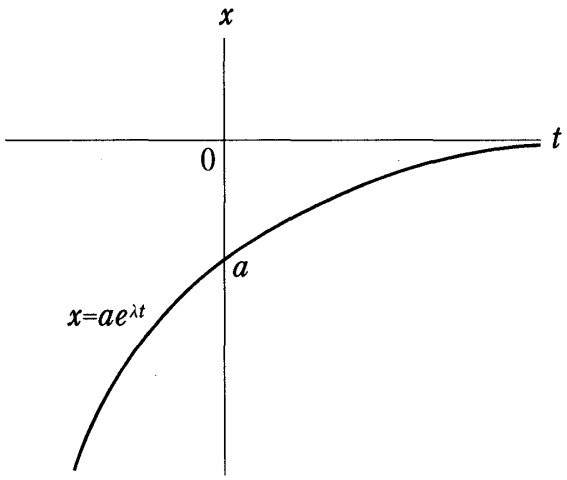
Ⅱ－2〔ケース2：λ＜0，μ＜0の定数〕

$a>0$のとき



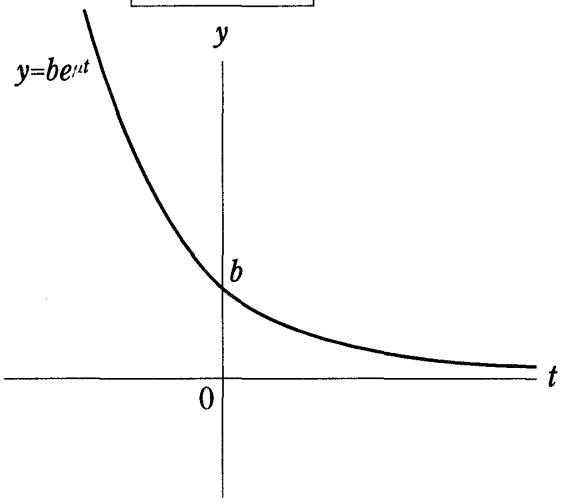
（ホ　図）

$a<0$のとき



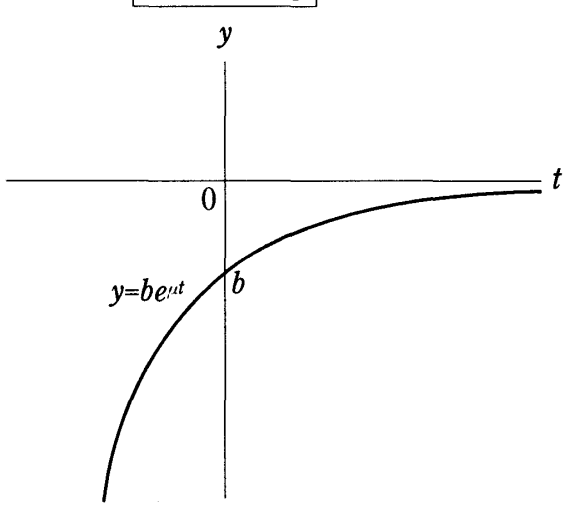
（ヘ　図）

$b>0$のとき



（ト　図）

$b<0$のとき



（チ　図）

Ⅱ－3〔ケース3：λ＞0，μ＜0の定数〕

$a>0$のとき（イ図）　　$a<0$のとき（ロ図）

$b>0$のとき（ト図）　　$b<0$のとき（チ図）

Ⅱ－4〔ケース4：λ＜0，μ＞0の定数〕

$a>0$のとき（ホ図）　　$a<0$のとき（ヘ図）

$b>0$のとき（ハ図）　　$b<0$のとき（ニ図）

Ⅲ　特異点の近傍における一般解の軌跡

Ⅲ－1　特異点が source point になっている場合――Ⅱのケース1に対応――

第Ⅱ章の〔ケース1：$\lambda>0$, $\mu>0$ の定数で $\lambda>\mu$〕の下での一般解②の軌跡を $x-y$ 平面で求めてみよう。

そのためには、初期値 $p=(a, b)$ 点を第1象限の任意の点に定めて、そこで時間 t をプラスにとった場合とマイナスにとった場合に、点 p がどのように動くかをまず求めたらよい。同様にして、初期値 p 点を順次2象限、3象限、4象限にとった場合の動きを求めると、最終的には(図5)が得られることになる。そこでは、特異点となっている原点が source point (湧き出し点) になっていることが分かる筈である。以下、この作業を丁寧にみていこう。

〔初期値 $p=(a, b)$ を第1象限にとった場合、つまり、$a>0$, $b>0$ の場合〕

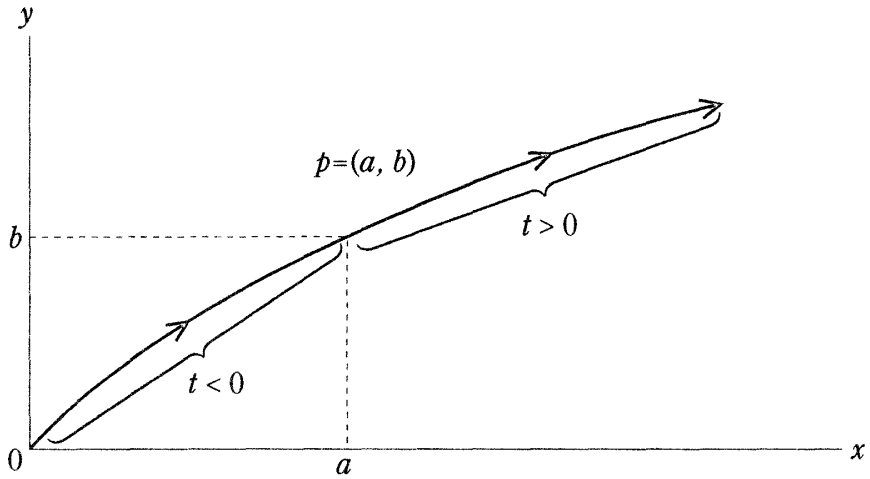
第Ⅱ章の(イ図)と(ハ図)を議論の前提にして、

(i)　$t>0$ にとれば、x 座標は $(a, 0)$ 点より右側へ
　　y 座標は $(0, b)$ 点より上方へ動くことが分かる。

(ii)　$t<0$ にとれば、x 座標は $(a, 0)$ 点より左側へ
　　y 座標は $(0, b)$ 点より下方へ動くことが分かる。

ところで、t を $-\infty$ にとれば、x 座標も y 座標も0になる。つまり、原点になる。だからと言って、$t<0$ にとった場合、初期値 p 点が原点に向って動くと理解するのは誤まりである。

何故なら、現在から過去へ時間が流れるのではない。過去から現在へ(そして未来へ)時間は流れると考えるべきである。よって、$t<0$ にとるということは、(図1)のように、原点から初期値 p 点の方へ点は動いたということを意味するのである。t を負にとるということのこの考え方は、以下の議論でも同様に考えるものとする。



(図1)[注2]

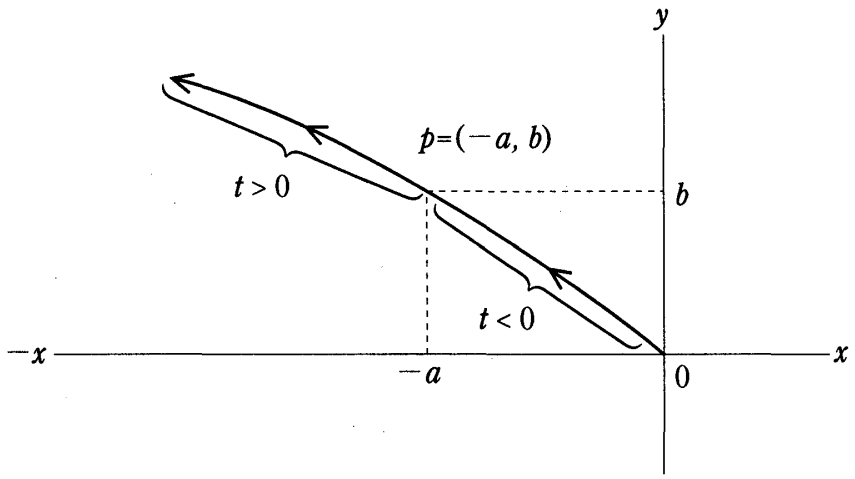
〔初期値 $p=(a, b)$ を第2象限にとった場合、つまり、$a<0$，$b>0$ の場合〕

第Ⅱ章の (ロ図) と (ハ図) を議論の前提にして、

(i)　$t>0$ にとれば、x 座標は $(-a, 0)$ 点より $-\infty$ まで小さく
　　y 座標は $(0, b)$ 点より $+\infty$ まで大きくなることが分かる。

(ii)　$t<0$ にとれば、x 座標は $(-a, 0)$ 点より 0 の方へ (右方へ)
　　y 座標は $(0, b)$ 点より 0 の方へ (下方へ) 動くことが分かる。

しかしながら、$t<0$ にとった場合は、(図2) で示してあるように、時間が径過する中で原点から第2象限の初期値 $p=(a, b)$ 点まで点が動いたものと理解する。



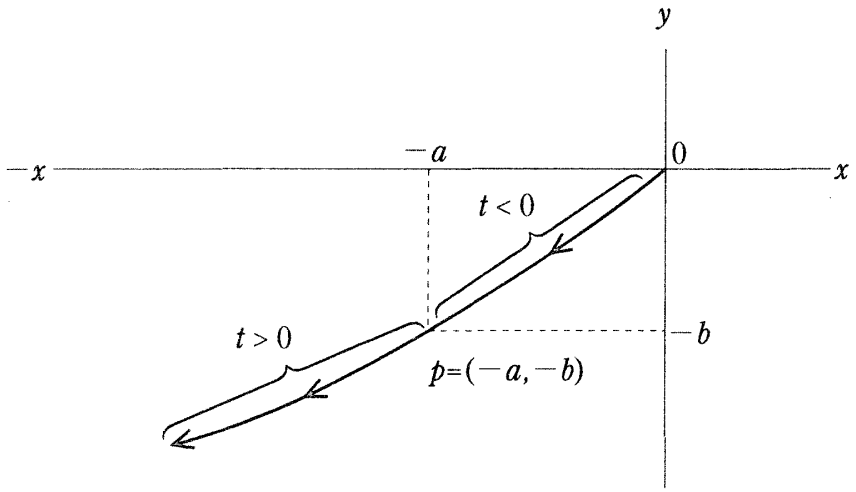
(図2)

〔初期値 $p=(a, b)$ を第3象限にとった場合、つまり、$a<0$，$b<0$ の場合〕

第Ⅱ章の (ロ図) と (ニ図) を議論の前提にして、

(i)　$t>0$ にとれば、x 座標は $(-a, 0)$ 点より $-\infty$ まで小さく
　　y 座標は $(0, -b)$ 点より $-\infty$ まで小さくなることが分かる。

(ii)　$t<0$ にとれば、(図3) に示してあるように、時間が径過する中で、原点から第3象限の初期値 $p=(-a, -b)$ 点まで点が動いたものと理解する。



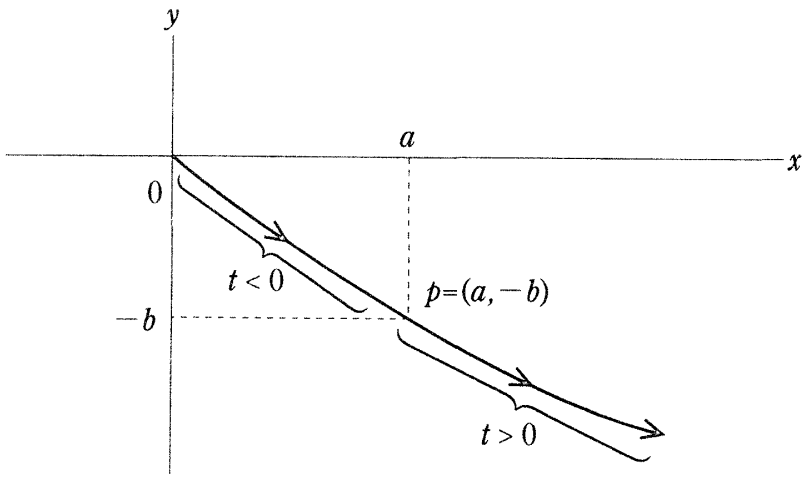
(図3)

〔初期値 $p=(a,\ b)$ を第4象限にとった場合、つまり、$a>0$，$b<0$ の場合〕

第Ⅱ章の (イ図) と (ニ図) を議論の前提にして、

(i)　$t>0$ にとれば、x 座標は $(a,\ 0)$ 点より右側へ＋∞ まで
　　y 座標は $(0,\ -b)$ 点より下へ−∞ まで動くことが分かる。

(ii)　$t<0$ にとれば、(図4) に示してあるように、時間が径過する中で、原点から第4象限の初期値 $p=(a,\ b)$ 点まで点が動いたものと理解する。

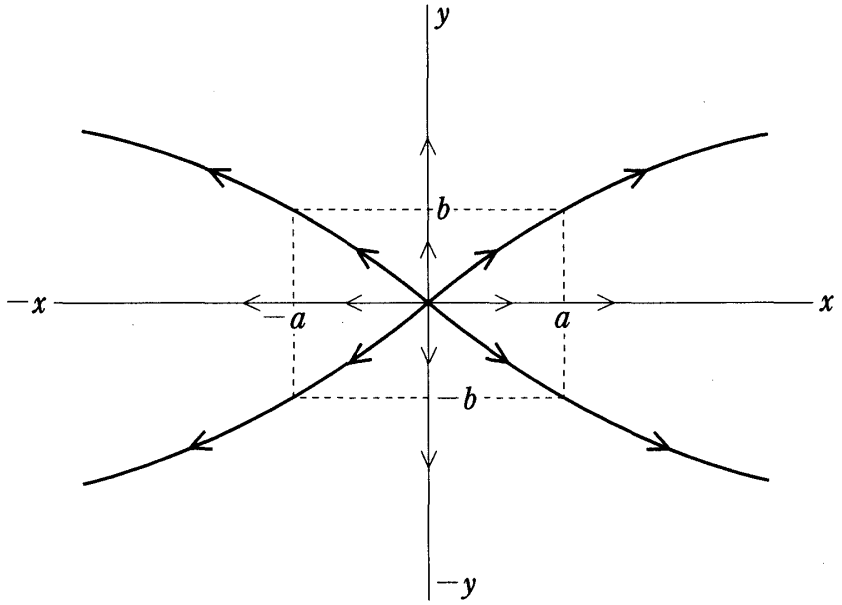


(図4)

初期値 $p=(a,\ b)$ を各象限に $p_1 \sim p_4$ と順次に取ったこれまでの議論をまとめると、(図5) を得ることになる。つまり、〔ケース1：$\lambda>0,\ \mu>0$ の定数で $\lambda>\mu$ とする〕制限条件の下では、微分方程式系①の一般解②は、(図5) に示される振る舞いをすることが分かった。言うまでもなく、特異点の原点は、source point になっている。

尚、p_1 点が初期値として $(a,\ 0)$ 点に在った場合、$t>0$ にとれば x 座標を右側へ、また、$t<0$ にとれば原点から初期値の $(a,\ 0)$ 点まで動くことが分かる。同様に初期値を

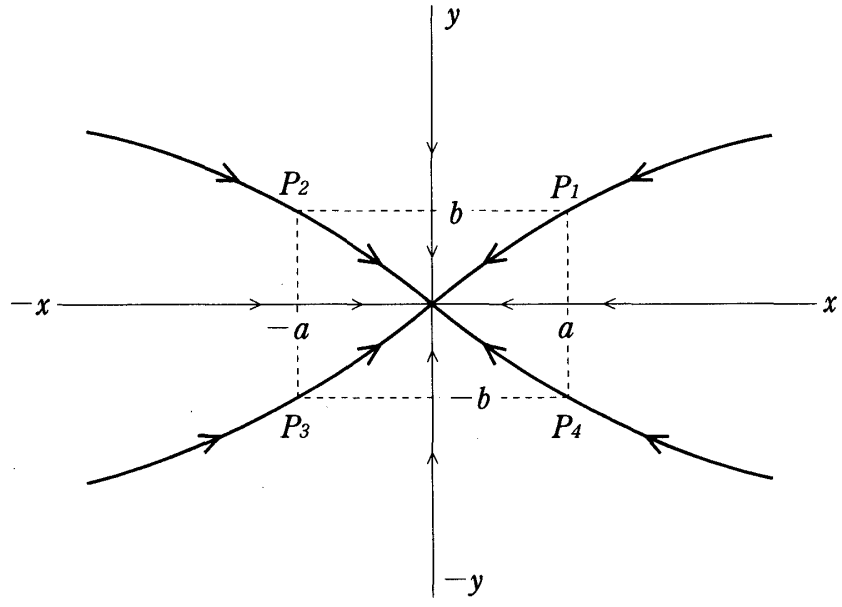
$(-a, 0)$ 点や $(0, b)$ 点および $(0, -b)$ 点にとった場合でも（図5）に示されるような動きをとることになる。



（図5）〔注3〕

Ⅲ－2　特異点が sink point になっている場合――Ⅱのケース2に対応――

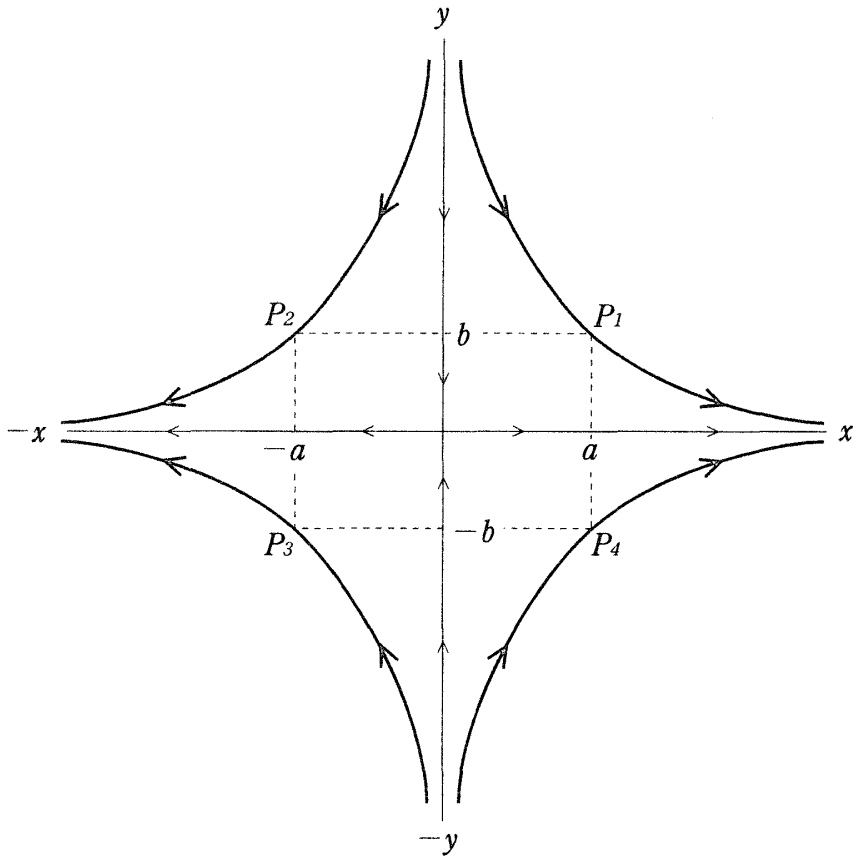
第Ⅱ章の〔ケース2：$\lambda<0$, $\mu<0$ の定数〕の下での一般解②の軌跡を $x-y$ 平面で求めてみよう。Ⅲ－1で行った議論と同様にして、初期値 $p=(a, b)$ を第1象限～第4象限に順次に $p_1 \sim p_4$ と取った場合の時間変化に関する座標点の動きを求めれば、以下の（図6）が得られる。特異点である原点は、sink point になっていることに留意すべきである。



（図6）〔注4〕

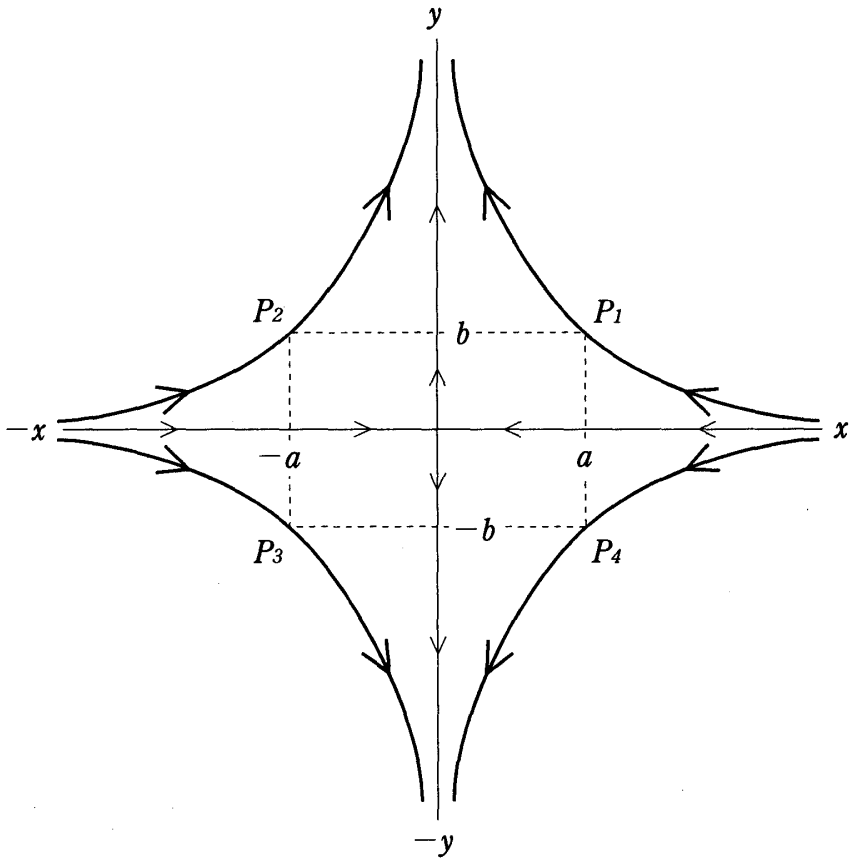
Ⅲ－3　特異点が saddle point になっている場合
――Ⅱのケース3，ケース4に対応――

第Ⅱ章の〔ケース3：$\lambda>0$, $\mu<0$ の定数〕の下での一般解②の軌跡を $x-y$ 平面で求めてみよう。ここでもⅢ－1で行った議論と同様にして、初期値 $p=(a, b)$ を第1象限～第4象限に順次 p_1～p_4 と取った場合の時間変化に関する座標点の動きを求めれば、以下の(図7)が得られる。特異点である原点は、saddle point (鞍点) となっていることに留意すべきである。



(図7)[注5]

同様に、第Ⅱ章の〔ケース4：$\lambda<0$, $\mu>0$ の定数〕の下での一般解②の $x-y$ 平面上での軌跡を求めてみよう。結果は、(図8)となる。ここでも特異点である原点は、saddle point (鞍点) となるが、x 軸、y 軸上での点の動きおよび各象限での点の動きは、(図7)とは逆になることに留意すべきである。



（図８）

Ⅲ－４　一般解が回転する場合

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = px - qy \\ \dfrac{dy}{dt} = qx + py \end{cases} \qquad \text{ただし } p>0,\ q>0 \text{ とする。}$$

と与える。

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

この式の係数行列の固有値である λ は、

$$0 = \begin{vmatrix} p-\lambda & -q \\ q & p-\lambda \end{vmatrix} = (p-\lambda)^2 + q^2$$

$\lambda - p = \pm qi$ より　$\lambda = p \pm qi$ となる。

このとき、$\lambda = p + qi$ として　$z = x + yi$ と置くと与えられた微分方程式系は、

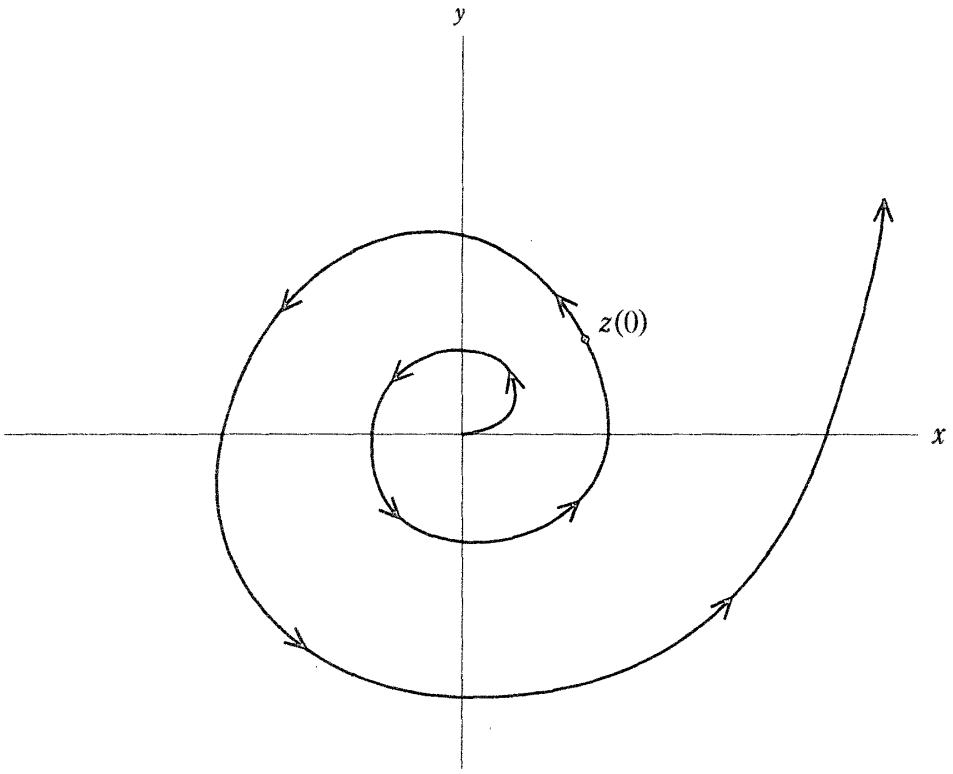
$$\frac{dz}{dt}=\lambda z$$

となる。つまり、

$$z(t)=z(0)e^{\lambda t}=z(0)e^{pt}\cdot e^{qit}\quad \text{より}$$

$p>0$, $q>0$ ならば、(図９) に示してあるように、初期値 $z(0)$ は、左回わりで拡大しつつ回転する動きをとることになる。

尚、$\lambda=p-qi$ の場合、$p>0$, $q>0$ ならば、初期値 $z(0)$ は右回わりで拡大しつつ回転する動きをとることになる。



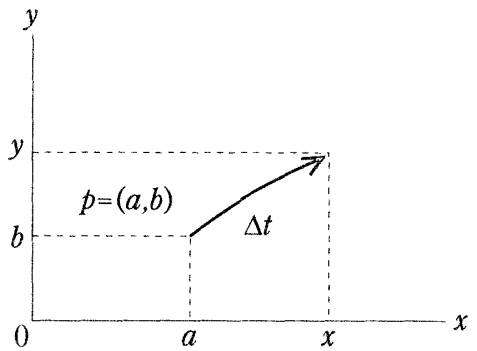
(図９)

〔注１〕

$\frac{dx}{dt}=\lambda x$ を $\frac{dx}{x}=\lambda dt$ と考え、この式の両辺を定積分する。

$$\int_a^x \frac{dx}{x}=\int_0^t \lambda dt$$

$$\left[\log_e x\right]_a^x=\left[\lambda t\right]_0^t$$



$\log_e x - \log_e a = \lambda t - \lambda \cdot 0$

$\log_e\left(\frac{x}{a}\right) = \lambda t$

$\frac{x}{a} = e^{\lambda t}$、よって

$x = ae^{\lambda t}$

同様にして、$\frac{dy}{dt} = \mu y$ から $y = be^{\mu t}$ も導出できる。

〔注 2〕

（図 1）の点 p を含む曲線が上に凸に描いてあるのは、$\overline{\lambda} > \overline{\mu}$ の仮定に基づく。言うまでもなく、$\overline{\lambda} = \overline{\mu}$ なら直線に、また、$\overline{\lambda} < \overline{\mu}$ なら下に凸な曲線になる。

〔注 3〕

x 軸上の初期値も y 軸上の初期値も、原点から湧き出したような動きをとる。

例えば、初期値 p 点がプラスの x 軸上のどこかに在ったとする。そこでは、$a > 0$, $b = 0$ となる。$a > 0$ より前章の（イ図）で時間 t を正にとったり負にとったりすることの動きを考える。

他方、$y = be^{\mu t}$ の $b = 0$ より y 座標は常にゼロになることを勘案すれば、（図 5）に示されるように、原点から x 軸のプラスの方向に湧き出す動きをとることが理解される。同様に、マイナスの x 軸上に初期値が在った場合も説明がつく。

他方、初期値 p 点がプラスの y 軸上のどこかに在った場合はどうなるのだろうか。そこでは、$a = 0$, $b > 0$ となる。$a = 0$ を $x = ae^{\lambda t}$ に代入すれば、時間の径過の中で x 座標は常にゼロであることが分かるし、他方、$b > 0$ であるので前章（ハ図）で t を正、負にとった場合の動きを考え合わせると、（図 5）に示されるように、原点から y 軸のプラスの方向に湧き出す動きをとることが理解される。同様に、マイナスの y 軸上に初期値が在った場合も合理的に説明がつく。

〔注 4〕

プラスの x 軸上に初期値が在った場合では、$a > 0$ の（ホ図）における $t > 0$ や $t < 0$ にとった x 座標の動きと、y 座標は常にゼロであることを勘案すれば、原点に向って沈み込む動きをとる。同様に、マイナスの x 軸上に初期値が在った場合では、$a < 0$ の（ヘ図）と、y 座標は常にゼロであるとの関係から原点に向って沈み込む動きを説明できる。

他方、プラス（マイナス）の y 軸上に初期値が在った場合には、$b > 0$（$b < 0$）のト図（チ図）における t を正や負にとった場合の y 座標の動きと、x 座標は常にゼロであることを勘案すれば、解になる点は常に原点に向った沈み込むような動きをとることが容易に理解できる。

〔注 5〕

特異点の原点が鞍点（saddle point）になる理由を以下に説明する。

〔ケース 3：$\lambda > 0$, $\mu < 0$ のそれぞれ定数〕

$x = ae^{\lambda t}$

$y = be^{\mu t}$

初期値 p 点がプラスの x 軸上に在る場合：$a > 0$, $b = 0$ となる。$x = ae^{\lambda t}$ における $\lambda > 0$, $a > 0$ より、t を正にとれば x 座標は $+\infty$ になるし、t を負にとれば原点から p 点までに点が動くことになる。他方、y 座標は $b = 0$ より常にゼロである。よって、p 点がプラスの x 軸上のどこに在っても（図7）のように原点から右側へ湧き出すように点が動くことになる。

初期値 p 点がマイナスの x 軸上に在る場合も同様に考えると、（図7）に示されているように原点から左側へ湧き出すように点が動くことになる。

初期値 p 点がプラスの y 軸上に在る場合：$a = 0$, $b > 0$ となる。$y = be^{\mu t}$ における $\mu < 0$, $b > 0$ より、t を正にとれば y 座標は原点に向けて小さくなるし、t を負にとれば p 点より大きな y 座標の値から p 点に向けて点が動くことになる。他方、x 座標は $a = 0$ より常にゼロである。よって、p 点がプラスの y 軸上のどこに在っても（図7）に示されるように原点に向けて沈み込むように動くことになる。

初期値 p 点がマイナスの y 軸上に在る場合も同様に考えると、（図7）に示されているように原点に向って沈み込むように動くことになる。

参考文献

1. Brand Louis, 〔1966〕：*Differential and Difference Equations,* John Wiley & Sons, Inc., New York.
2. Coddington E. A. & Levinson, N. 〔1955〕：*Theory of Ordinary Differential Equations,* McGraw-Hill Book Company.（吉田節三訳、数学叢書6『コディントン・レヴィンソン 常微分方程式論（上），（下）』吉岡書店、1975年、1977年）。
3. Goodwin, R. M. 〔1990〕：*Chaotic Economic Dynamics,* Oxford, Claredon Press.（R. M. グッドウィン著，有賀裕二訳『カオス動学』多賀出版、1992年）。
4. Lefschetz, S. 〔1962〕：*Differential Equations: Geometric Theory,* Second edition, Interscience, New York.
5. Lorenz, Hans-Walter 〔1993〕：*Nonlinear Dynamical Economics and chaotic Motion,* Second, Revised and Enlarged Edition, Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag.（H. W. ローレンツ著，小野崎保、笹倉和幸訳『非線形経済動学とカオス』日本経済評論社，2000年）。
6. 白岩謙一著〔1992〕『常微分方程式論序説』サイエンス社。
7. 吉田和男著〔1993〕『経済学に最低限必要な数学』日本評論社。