

非線形動学モデルと解の大域的構造 I

——環境動学モデル研究のために——

寺 田 宏 洲
伊 藤 敏 和

目 次

- I. はじめに
- II. 非線形動学モデルの設定と特異点
- III. 特異点の性質
- IV. 特異点近傍の振る舞いと系全体の調和
- V. リミットサイクルとポアンカレ写像
- VI. 結びに代えて

I. はじめに

われわれは、環境問題—特にその理論的側面—に関する研究会^[注1]を継続中である。

環境問題の理論的側面といえ、その典型的なものの一つとして、E. ローレンツの非線形3次元動学気象モデル^[注2]および、そのバタフライ効果などがすぐに想起されるであろう。確かに、この世界の動きの本質的なものは、線形動学ではなくて非線形動学なのである。

即ち、ある動態現象の本質が線形動学ならニュートン・ライプニッツ流の微分方程式で記述することが有効であり、また、それを解析的に解くことも可能である。しかし、この世界の動きの本質的なものは非線形動学である。そこでは、解を解析的に解くことはほとんど困難であることがニュートン以降の数多くの数学者の努力^[注3]にもかかわらず分かったし、それに代わり、位相幾何学的(トポロジカル)手法によって、解の大域的振る舞いと構造を定性的に調べることの有効性と重要性を主張したのが19～20世紀にかけてのH. ポアンカレであった。

従って、本論文は、3次元のE. ローレンツの非線形動学気象モデルを検討する前に、2次元の非線形動学モデルをH. ポアンカレ^[注4]の提示する4番目の例に依拠して理論

的に検討することを目的とする。

というのは、H. ポアンカレは、一般形で解析的に示すことが出来ない非線形動学モデルを、解の特徴あるいくつかの振る舞いと方程式系のリミットサイクルの安定性／不安定性などに関連させて個別的にいくつか例示しており、4 番目の例はきわめて興味深いものであるからである。

ただ、H. ポアンカレは、個別非線形動学モデルの提示と、解の振る舞い及びリミットサイクルについての結論的図を与えているだけで、途中の論証はほとんど与えていないと言っても過言ではない^[注5]。

よって、途中の論証をきちんと埋める努力を払う価値は十分にあるし、そのことは、非線形環境動学モデルを検討する前の必須の作業であると確信して止まない。

従って、議論は次のように展開されるであろう。

まず次のⅡ章で H. ポアンカレの非線形動学モデルが提示され、そこでの特異点が求められることになる。続くⅢ章では、求まった特異点の性質が一つずつ調べられることになる。そして、Ⅳ章では、特異点近傍の解の大域的振る舞いおよび、リミットサイクルの安定／不安定性と解の運動の方向などが統一的に吟味・検討される。従って最終のⅤ章では、若干の理論的帰結とポアンカレモデルの特徴が改めて指摘されるであろう。

Ⅱ. 非線形動学モデルの設定と特異点

与えられた非線形微分方程式系は、次のとおりである。

$$X \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 9) - y(x^2 + y^2 - 2x - 8) \\ \frac{dy}{dt} = y(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 9) + x(x^2 + y^2 - 2x - 8) \end{cases}$$

この系での特異点(不動点)を求め、その近傍での解の振舞いを調べたい。そのためにまず、 $x^2 + y^2 - 1 = A$, $x^2 + y^2 - 9 = B$, $x^2 + y^2 - 2x - 8 = C$ と置き、次の連立方程式の解を求める。

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = xAB - yC = 0 & \text{①} \\ \frac{dy}{dt} = yAB + xC = 0 & \text{②} \end{cases}$$

① × x + ② × y より

$$(x^2 + y^2)AB = 0 \quad \text{③}$$

③式において、

- (i) $x^2 + y^2 = 0$, 即ち、 $x = 0$, $y = 0$ の時、これは①、②の系を満たすから解である。

(ii) (イ) $A=0$ で、且つ、 $C \neq 0$ のとき、①、②を満足する x, y は、 $x=0, y=0$ となるが、これは $A=0$ を満足しないので①、②の系の解はない。

(ロ) $A=0$ で、且つ、 $C=0$ なら、即わち、

$A=x^2+y^2-1=0$ より中心が原点、半径 1 の円、

$C=x^2+y^2-2x-8=0$ より中心が $(1, 0)$ で半径 3 の円、

$A=0$ と $C=0$ は交点がないので①、②の系の解はない。

(iii) (イ) $B=0$ で、且つ、 $C \neq 0$ のとき、①、②を満足する x, y は、 $x=0, y=0$ となるが、これは $B=0$ を満足しないので①、②の系の解はない。

(ロ) $B=0$ で、且つ、 $C=0$ なら、即わち、

$B=x^2+y^2-9=0$ より中心が原点、半径 3 の円、

$C=x^2+y^2-2x-8=0$ より中心が $(1, 0)$ で半径 3 の円、

このケースでは、図 1 に示す通り $\left(\frac{1}{2}, \frac{+\sqrt{35}}{2}\right)$ と $\left(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{35}}{2}\right)$ の 2 点が

①、②の系の解となる。

以上をまとめると、 $(0, 0), \left(\frac{1}{2}, \frac{+\sqrt{35}}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{35}}{2}\right)$ の 3 点が①、②の系の特異点 (不動点) であることが理解される。

Ⅲ. 特異点の性質

次に、これら特異点の性質を調べてみたい。そのためには、特異点の近傍でのヤコビ行列を求めておく必要がある。

$$X \begin{cases} \frac{dx}{dt} = xAB - yC \\ \frac{dy}{dt} = yAB + xC \end{cases}$$

ただし、 $A=x^2+y^2-1, B=x^2+y^2-9, C=x^2+y^2-2x-8$ とする。

X のヤコビ行列を次のように表すものとする。

$$DX = \begin{pmatrix} (1, 1) & (1, 2) \\ (2, 1) & (2, 2) \end{pmatrix} \quad (4)$$

ここで、

$$\begin{aligned} (1, 1) &= \frac{\partial}{\partial x} (xAB - yC) \\ &= AB + x \cdot 2xB + 2x \cdot xA - y(2x - 2) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} (1, 2) &= \frac{\partial}{\partial y} (xAB - yC) \\ &= x \cdot 2y \cdot B + xA \cdot 2y - C - y \cdot 2y \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
 (2, 1) &= \frac{\partial}{\partial x} (yAB + xC) \\
 &= y \cdot 2x \cdot B + yA \cdot 2x + C + x(2x - 2)
 \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
 (2, 2) &= \frac{\partial}{\partial y} (yAB + xC) \\
 &= AB + y \cdot 2y \cdot B + yA \cdot 2y + x \cdot 2y
 \end{aligned} \tag{8}$$

ヤコビ行列の各成分は、 x, y の関数になっていることに注目しよう。

3つの特異点のうち、まず、原点の性質から調べよう。そのために、原点の近傍におけるヤコビ行列を求めたい。

ところで、 A, B, C はそれぞれ x, y の関数になっている。よって、原点 $(0, 0)$ における A, B, C の各々の値は、 $A(0, 0) = -1, B(0, 0) = -9, C(0, 0) = -8$ である。原点、つまり、 $x=0, y=0$ と、 $A(0, 0) = -1, B(0, 0) = -9, C(0, 0) = -8$ を先ほどの⑤～⑧に代入して、ヤコビ行列④式を確定したい。即わち、

$$\begin{aligned}
 (1, 1) &= -1 \times -9 = 9 \\
 (1, 2) &= -(-8) = 8 \\
 (2, 1) &= +(-8) = -8 \\
 (2, 2) &= (-1) \times (-9) = 9
 \end{aligned}$$

よって、原点におけるヤコビ行列として次式を得る。

$$(DX)(0, 0) = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ -8 & 9 \end{pmatrix} \tag{9}$$

この行列の固有値を求めてみる。そのためには、

$$\begin{vmatrix} 9-\lambda & 8 \\ -8 & 9-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)^2 + 64 = 0 \tag{10}$$

を解けばよい。即わち、次式を得る。

$$\lambda = 9 \pm 8i$$

固有値 λ の実数部分が正の値なので特異点の原点は source point (湧き出し点) となっているし、加えて、 λ には虚数部分が付いているので、 X の解は回転していることが分かるのである。

次に、 $B = C = 0$ の交点である特異点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{+\sqrt{35}}{2}\right)$ の性質を調べたい。

$$A = x^2 + y^2 - 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{+\sqrt{35}}{2}\right)^2 - 1 = 8 \text{ と } B = C = 0 \text{ と } x = \frac{1}{2}, y = \frac{+\sqrt{35}}{2} \text{ を}$$

⑤～⑧にそれぞれ代入すれば次式のヤコビ行列が確定する^{〔注6〕}。

$$(DX)\left(\frac{1}{2}, \frac{+\sqrt{35}}{2}\right) = \begin{pmatrix} 4 + \frac{\sqrt{35}}{2} & -\frac{35}{2} + 4\sqrt{35} \\ -\frac{1}{2} + 4\sqrt{35} & 4 \times 35 + \frac{\sqrt{35}}{2} \end{pmatrix} \quad (11)$$

⑪式で示される行列の固有値を求める。

$$\begin{vmatrix} 4 + \frac{\sqrt{35}}{2} - \lambda & -\frac{35}{2} + 4\sqrt{35} \\ -\frac{1}{2} + 4\sqrt{35} & 4 \times 35 + \frac{\sqrt{35}}{2} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (12)$$

$\left(4 + \frac{\sqrt{35}}{2} - \lambda\right)\left(4 \times 35 + \frac{\sqrt{35}}{2} - \lambda\right) - \left(-\frac{35}{2} + 4\sqrt{35}\right)\left(-\frac{1}{2} + 4\sqrt{35}\right) = 0$ より次式を得る^[注7]。

$$\lambda^2 - (5 \times 35 + \sqrt{35})\lambda + 144\sqrt{35} = 0 \quad (13)$$

⑬式は、相異なる2つの実根(固有値)をもち、それらは正の値をとる^[注8]ので、特異点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{+\sqrt{35}}{2}\right)$ は source point となることが理解される。

最後に特異点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{35}}{2}\right)$ の性質を調べたい。

⑪式に相当するヤコビ行列は次式のようにになる。

$$(DX)\left(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{35}}{2}\right) = \begin{pmatrix} 4 - \frac{\sqrt{35}}{2} & -\frac{35}{2} - 4\sqrt{35} \\ -\frac{1}{2} - 4\sqrt{35} & 4 \times 35 - \frac{\sqrt{35}}{2} \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{vmatrix} 4 - \frac{\sqrt{35}}{2} - \lambda & -\frac{35}{2} - 4\sqrt{35} \\ -\frac{1}{2} - 4\sqrt{35} & 4 \times 35 - \frac{\sqrt{35}}{2} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (15)$$

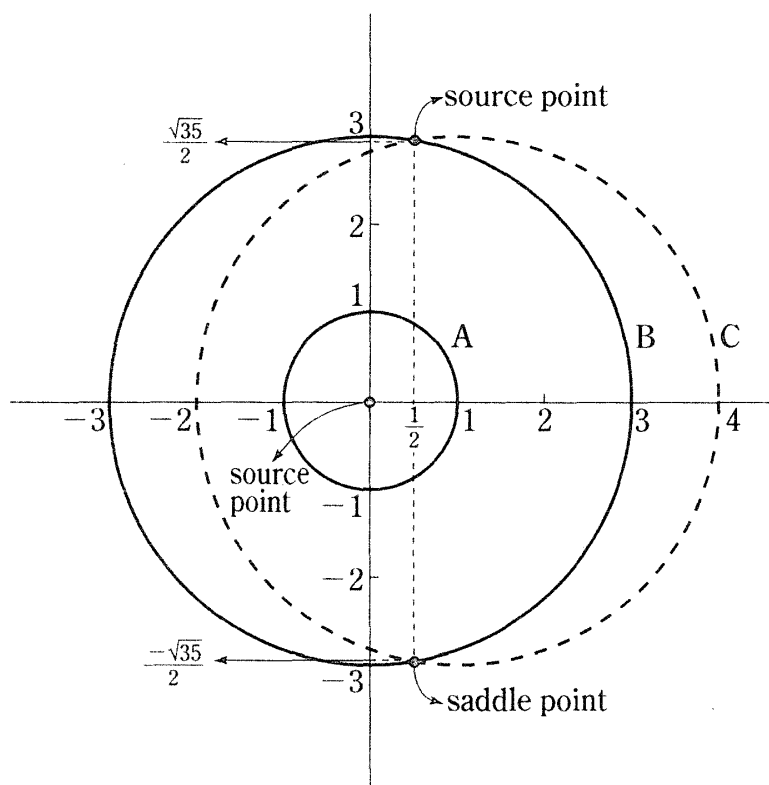
⑮式より次式を得る^[注9]。

$$\lambda^2 - (144 - \sqrt{35})\lambda - 144\sqrt{35} = 0 \quad (16)$$

⑯式は、異符号の実根をもつことが分かる^[注10]。

つまり、固有値 λ の一つは正の値(つまり、湧き出す点)、他の一つは負の値(つまり、沈み込む点)をとることになるので、特異点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{35}}{2}\right)$ は、saddle point であることが分かった。

以上の3つの特異点に関する性質を1つの図にまとめると以下の(図1)を得る。



(図1)

IV. 特異点近傍の振る舞いと系全体の調和

H. ポアンカレは、 $A=0$, $B=0$ も与えられた非線形微分方程式系 X の解であると言っている。以下では、①まずその証明を与え、さらに② $A=0$, $B=0$ 上での解の運動の方向を議論したい。

まず最初に、 $A=x^2+y^2-1=0$ 上に点 $p=(a, b)$ を取り、点 p での方程式 X の解曲線の接ベクトルを $\vec{X}$ とすると、

$$\begin{aligned}\vec{X} &= \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) \\ &= (xAB - yC, yAB + xC)\end{aligned}\tag{17}$$

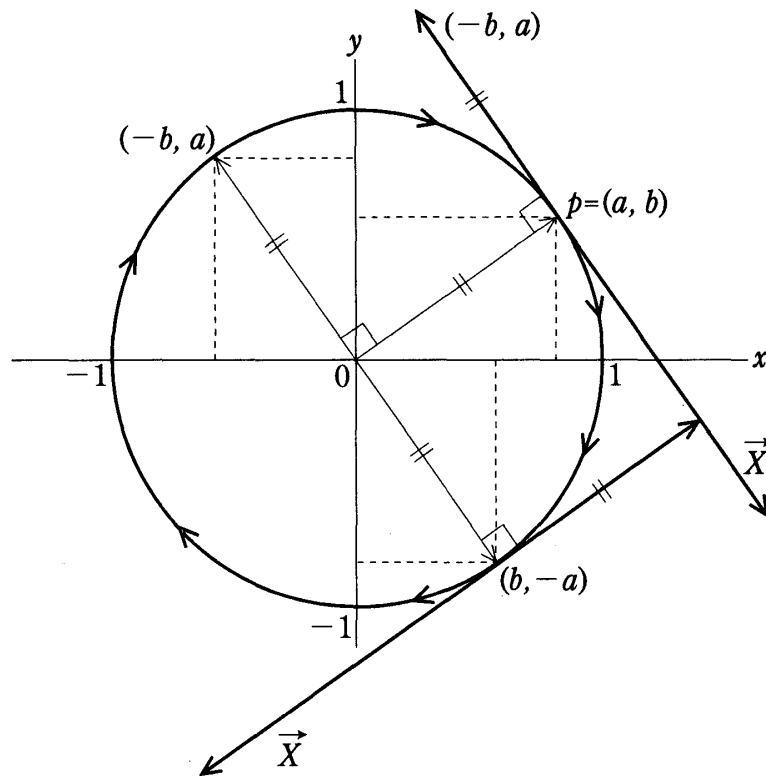
もし、⑪式において $A=0$ なら、点 p における $\vec{X}(a, b)$ は、 $A=x^2+y^2-1=0$ に接することになる。というのは以下の議論が可能であるからである。

⑪式において、

$$\begin{aligned}\vec{X}(a, b) &= (-b(-2a-7), a(-2a-7)) \\ &= (-2a-7)(-b, a)\end{aligned}\tag{18}$$

⑮式での $(-b, a)$ は、点 p での位置ベクトルと直交をなす速度ベクトルを表し、また、 $-1 < a < 1$ の範囲での $-2a-7$ は常に負の値を意味する。つまり、(図2)に示すように、⑮式での $\vec{X}(a, b)$ は、点 p での速度ベクトルと逆向きに、かつ、位置ベクトルと直交することになる。そのことは、方程式の系 X の解曲線の接ベクトル $\vec{X}(a, b)$ が点 p において、 $A = x^2 + y^2 - 1 = 0$ に接していることを意味するので、 $A = 0$ は、方程式の系 X の解であると言ってよい。

また、(図2)に示されるように、解曲線の接ベクトル $\vec{X}(a, b)$ の方向も決まる。従って、解の回転の方向は時計回りである。なお、V章での論証を加えれば、 $A = 0$ の円は、リミットサイクルであることが理解される。



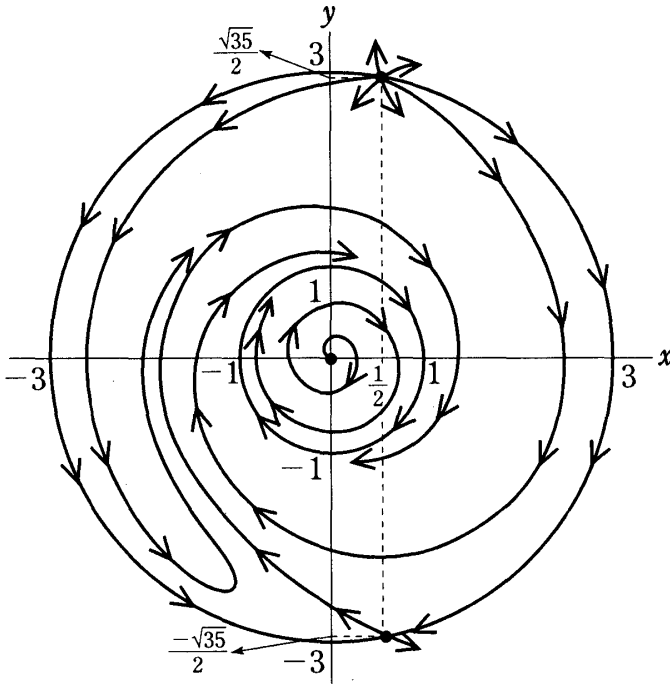
(図2)

次に、点 $p = (a, b)$ を $B = x^2 + y^2 - 9 = 0$ 上にとる。もし、⑮式において $B = 0$ なら、点 p における $\vec{X}(a, b)$ は、 $B = x^2 + y^2 - 9 = 0$ に接することになる。というのは、ここでも以下のような議論が可能であるからである。

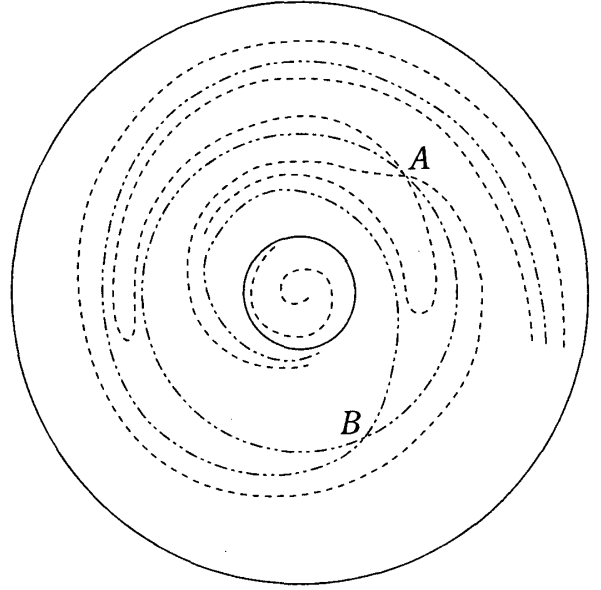
点 p での $\vec{X}(a, b)$ は次式となる。つまり、方程式の系 X の解曲線の接ベクトル $\vec{X}(a, b)$ は、

$$\begin{aligned}\vec{X}(a, b) &= (-b(1-2a), a(1-2a)) \\ &= (1-2a)(-b, a)\end{aligned}\tag{19}$$

⑮式の $(1-2a)$ は、(i) $\frac{1}{2} < a < 3$ のとき負の値をとり、(ii) $-3 < a < \frac{1}{2}$ のとき正の



(図 4)



H. ポアンカレの Fig 27 (1882年の P.280)

V. リミットサイクルとポアンカレ写像

この章では、前章IVの(図2)および(図4)で述べた $A = x^2 + y^2 - 1 = 0$ が方程式 X の安定リミットサイクルであることを、ポアンカレ写像^[注11]を調べることによって示す。

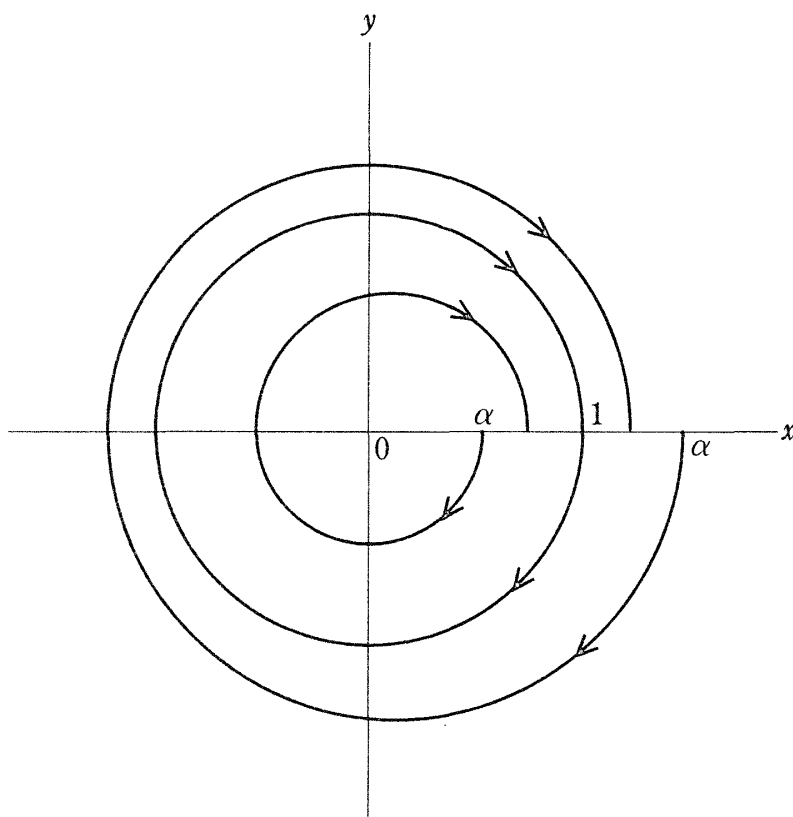
はじめに、 $A = 0$ でのポアンカレ写像を構成する。このために、 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ なる極座標をもちいて、方程式 X をかきなおす。

$$\begin{aligned}
 X \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dr}{dt} \\ \frac{d\theta}{dt} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} r \cos \theta \cdot (r^2 - 1)(r^2 - 9) - r \sin \theta \cdot (r^2 - 2r \cos \theta - 8) \\ r \sin \theta \cdot (r^2 - 1)(r^2 - 9) + r \cos \theta \cdot (r^2 - 2r \cos \theta - 8) \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} \frac{dr}{dt} \\ \frac{d\theta}{dt} \end{pmatrix} &= \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \cos \theta \cdot (r^2 - 1)(r^2 - 9) - r \sin \theta \cdot (r^2 - 2r \cos \theta - 8) \\ r \sin \theta \cdot (r^2 - 1)(r^2 - 9) + r \cos \theta \cdot (r^2 - 2r \cos \theta - 8) \end{pmatrix} \\
 Y \begin{cases} \frac{dr}{dt} = r(r^2 - 1)(r^2 - 9) \\ \frac{d\theta}{dt} = r^2 - 2r \cos \theta - 8 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$r \equiv 1$ は Y の解である。今 α を 1 に十分近い点にとる。 $(r, \theta) = (\alpha, 0)$ を初期値にもつ Y の解を

$$\begin{cases} r = r(t; \alpha) & r(0; \alpha) = \alpha \\ \theta = \theta(t; \alpha) & \theta(0; \alpha) = 0 \end{cases}$$

とする。 α を x 軸の 1 に十分近いところにとる。 α を通る X の解が再び x 軸の正の部分と交わる時間を $t(\alpha)$ とかく。このとき、 α に対して、 $r(t(\alpha), \alpha)$ を対応させる写像を $A=0$ におけるポアンカレ写像といい、 $\varphi(\alpha) = r(t(\alpha), \alpha)$ とかく。ポアンカレ写像については、次の定理が本質的である。



(図 5)

定理 (H. Poincaré)

$\varphi(1) = 1$ をみたすとき、 $\left| \frac{d\varphi}{d\alpha} \right|_{\alpha=1} < 1$ ならば、1 に十分近い α に対して、 $|\varphi(\alpha) - 1| < |\alpha - 1|$ が成立する。

我々はこの定理を使って $A=0$ が安定的なリミットサイクルであることを判定する。

補題

上記の記号のもとで、 $\varphi(\alpha) = r(t(\alpha) : \alpha)$ の $\alpha = 1$ における微分係数 $\left. \frac{d\varphi}{d\alpha} \right|_{\alpha=1}$ は $e^{-16 \cdot t(1)}$ である。

証明

$$\frac{d}{dt}(r(t : \alpha)) = r(t : \alpha) \cdot (r(t : \alpha)^2 - 1)(r(t : \alpha)^2 - 9)$$

の両辺を α で微分する。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial r}{\partial \alpha} \right) &= \frac{\partial r}{\partial \alpha} \cdot (r^2 - 1)(r^2 - 9) + r \cdot 2r \cdot \frac{\partial r}{\partial \alpha} \cdot (r^2 - 9) \\ &\quad + r(r^2 - 1) \cdot 2r \cdot \frac{\partial r}{\partial \alpha} \end{aligned}$$

この式に $\alpha = 1$ を代入すると

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial r}{\partial \alpha}(t : 1) \right) = -16 \frac{\partial r}{\partial \alpha}(t : 1)$$

となる。この方程式は次のようにして解ける。

$$\int_0^{t(1)} \frac{d \left(\frac{\partial r}{\partial \alpha}(t : 1) \right)}{\frac{\partial r}{\partial \alpha}(t : 1)} = \int_0^{t(1)} -16 dt$$

$$\log \left(\frac{\partial r}{\partial \alpha}(t(1) : 1) / \frac{\partial r}{\partial \alpha}(0 : 1) \right) = -16 \cdot t(1)$$

$\frac{\partial r}{\partial \alpha}(0 : 1) = 1$ に注意すると、

$$\left. \frac{d\varphi}{d\alpha} \right|_{\alpha=1} = \frac{\partial r}{\partial \alpha}(t(1) : 1) = e^{-16 \cdot t(1)} < 1$$

g. e. d.

補題と H. poincaré の定理をもちいれば、 $A = 0$ は安定的なリミットサイクルになる。

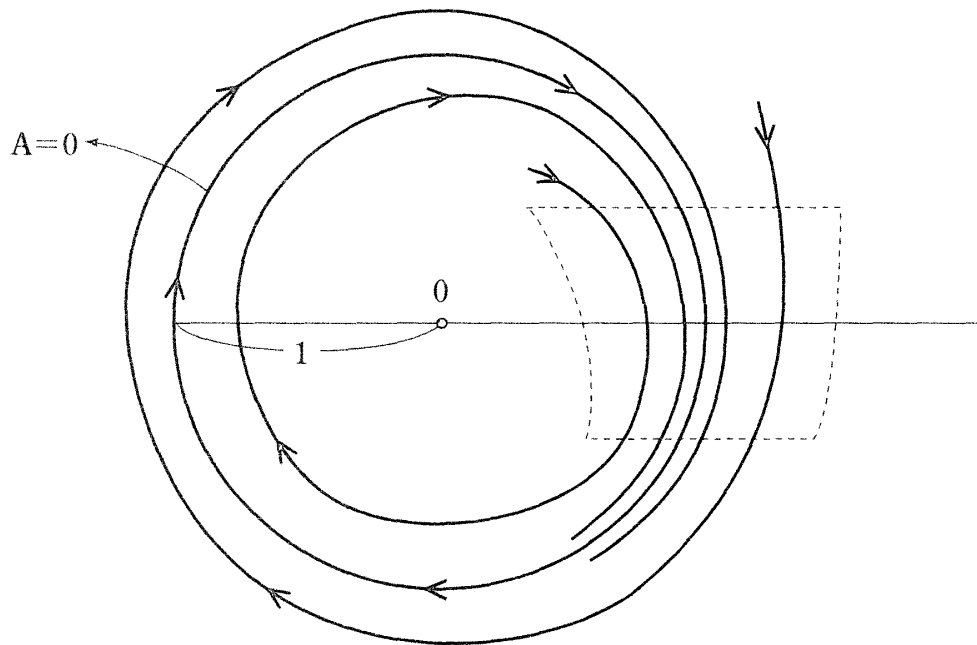
VI. 結びに代えて

各章での議論は、平明にして正確さを期してきたつもりである。本稿を閉じるにあたり、全体の議論にかかわる次の3点を改めて指摘しておきたい。

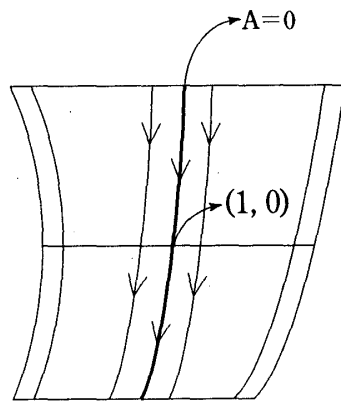
第1の論点は、本稿の結論的意味をもつ(図4)に関するものである。H. ポアンカレは、この(図4)に対応するものとして1882年の論文の中では Fig 27 を与えている。それは球面上のものであるので、(図4)のように点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{35}}{2}\right)$ の source point と点 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{35}}{2}\right)$ の saddle point が同一直線上に並ばなくても半径3の同一円周上にあ

ればよい。加えて、Fig 27での不動点 A, B, O (原点) の各トポロジカルな性質は、当然のことながら本稿の対応する各点のものと同一である。即ち、A 点は巻かずに湧き出す source point であり、B 点は saddle point であり、原点 O は巻きながら外へ湧き出す source point である。しかしながら本稿の (図 4) と比較したら分かるように、非線形微分方程式系 X の軌道の表示が H. ポアンカレの Fig 27ではきわめて不正確である。正しくは本稿 (図 4) であることを指摘しておきたい。

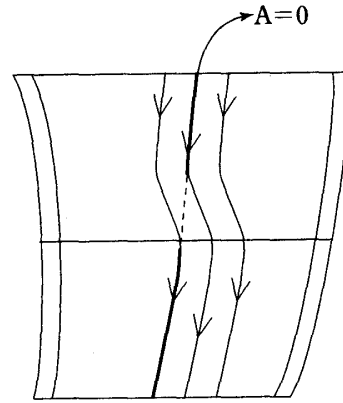
第 2 の論点は、—— H. ポアンカレはそのケースを考慮していないのであるが—— (図 4) における $A = x^2 + y^2 - 1 = 0$ のリミットサイクルに摂動を与えた場合に何が起るかということである。(図 6) は、(図 4) の安定的なリミットサイクル ($A = 0$, 半径 1 の円) の近傍を改めて描いたものである。 $A = 0$ 上の点 $(1, 0)$ の近傍で flow box を (図 6) の点線で示されるように切り取ってみる。それが (図 7-1) である。ところで、 $A = 0$ 上の点 $(1, 0)$ の近傍に摂動を与えたとする。そうすると、点 $(1, 0)$ の近傍の解の軌跡は、摂動によって (図 7-2) に示されるように外側に歪むことになる。そのことは、(図 8) に示されるように、 $A = 0$, 半径 1 の円で示されるリミットサイクルは解消されて、 $(1, 0)$ のより外側に新たな安定したリミットサイクルが 1 つ生まれることを意味する。しかもその新たなリミットサイクルの安定的な性質は何ら変わらないことが理解される。(リミットサイクルに摂動を与えた場合、定性的に全く異なった動きを引き起こす例は稿を改めて考察したい。)



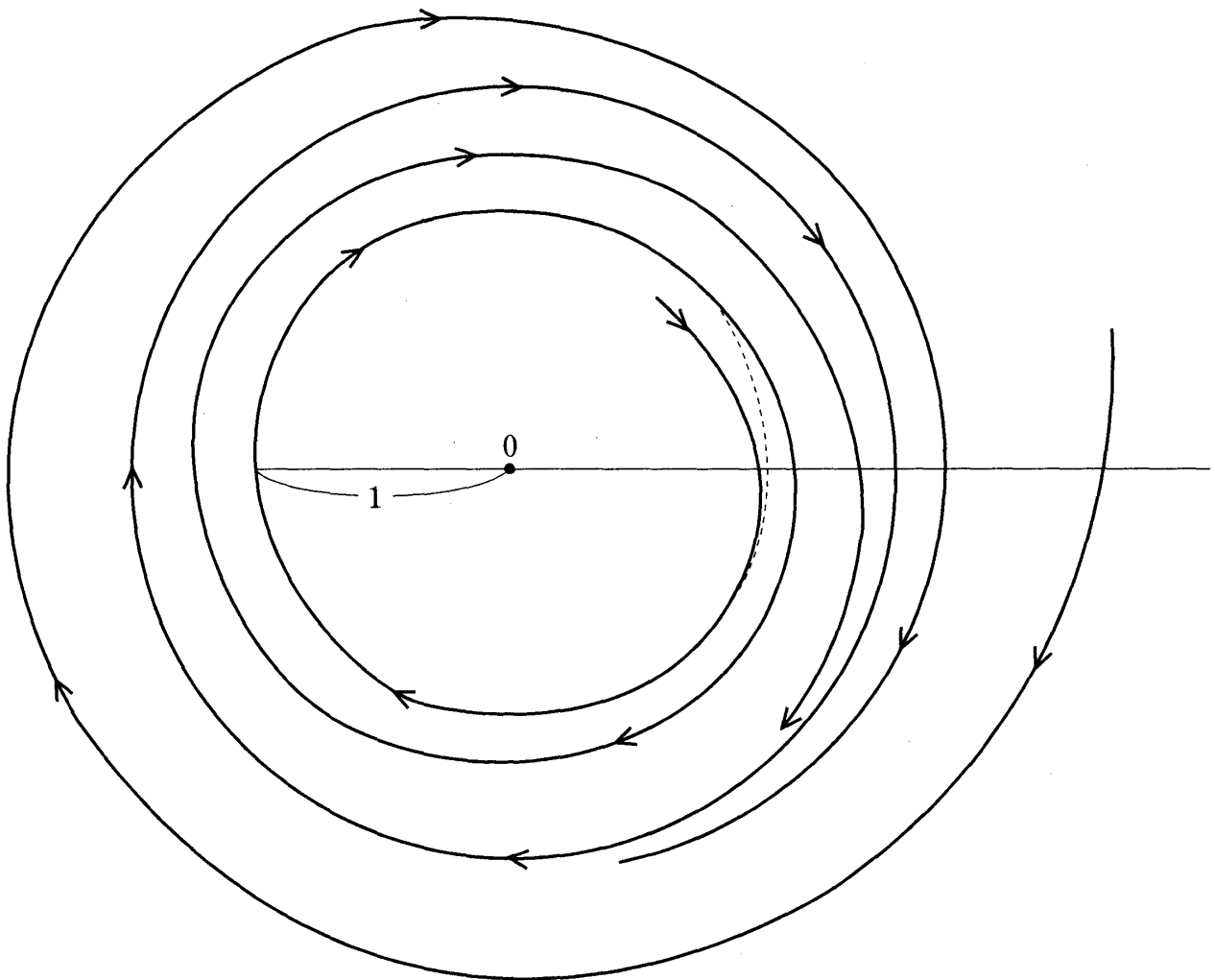
(図 6)



(図 7-1)



(図 7-2)



(図 8)

第 3 の論点は、H. ポアンカレのユニークさ・偉大さについてである。

ポアンカレの偉大さは、一つの系の中に、性質の異なる特異点を 3 つも同時に出して、それぞれに異なる運動を与えながら、全体としては調和した動きをつくり出したという点にある。しかも 120 年も前にである。非線形動学モデルは、一般形で議論しにく

い。従って、H. ポアンカレは、個別的な非線形動学モデルを与えているのであるが、部分的な不均衡が全体的には調和している世界をつくり出すのに成功している。

経済学の理論体系は、かつて成功したが故に、今や失敗している。既存の理論体系のすべてをリニューアルする必要はないものの、重要な一点に於て、ポアンカレに学ぶことがきわめて大切であると痛感せざるを得ない。

〔注1〕

龍谷大学社会科学研究所では、2001年4月から2004年3月までの3年間、日本学術振興会と本学から研究補助金をもらって「21Cの地球環境と持続的発展」のテーマの下で、3つのグループに分かれて環境問題に関する研究活動を継続中である。われわれは、第1のグループで環境問題に関する理論的側面をいくつかの視点から分析・研究中である。なお、筆者たちは、複雑系の研究会をも同時に継続している。

〔注2〕

E. N. Lorenz (1963) "Deterministic Nonperiodic Flow" *Journal of the Atmospheric Sciences*, vol. 20, March, pp. 130-41.

〔注3〕

正確に言えば、A. ニュートン (1642-1727) は、流率法であり、G. ライプニッツ (1646-1726) は、無限小解析学という特徴をもった微分積分学を確立した。A. ニュートンの微分積分学はその後、物理の力学の方面で大いに威力を発揮することになったが、2つの側面で決定的な限界をもっていたのである。1つは、線形動学にはきわめて強いが、非線形動学には極めて弱いという側面である。もう一つは、ニュートン流の微積分学は、極大天体モデル（あるいは、2つ以上の n 個の天体運動モデル）と極小物質ミクロモデルでは、妥当しないことが分かってきたのである。前者は、20世紀のA. アインシュタイン (1880-1955) の相対性理論によって取って代わられたし、後者は、19世紀から20世紀にかけてのM. プランク (1858-1947)、J. J. トムソン (1856-1940)、N. ボーア (1885-1962) らによる量子力学によって取って代わられたのである。

R. L. Devaney, (1986): *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Benjamin / Cummings, Menlo Park, CA. pp. 4-6. (R. L. デバニー著、上江洌達也、重本和泰、久保博嗣、田崎秀一訳『カオス力学系の基礎』アジソン ウェスレイ パブリッシャーズ ジャパン発行、1997年、pp. 5-7.

〔注4〕

H. Poincaré (1882) 'Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle' *Journal Mathématiques Pures et Appliquées*, Année 1882年, pp. 279-82.

〔注5〕

見方によっては、H. ポアンカレの天才たる所以である。

〔注 6〕

$$(1, 1) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 8 - \frac{\sqrt{35}}{2} \cdot 2\left(\frac{1}{2} - 1\right) = 4 + \frac{\sqrt{35}}{2}$$

$$(1, 2) = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{35}}{2} - \frac{\sqrt{35}}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{35}}{2} = -\frac{35}{2} + 4\sqrt{35}$$

$$(2, 1) = \frac{\sqrt{35}}{2} \cdot 8 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 2\left(\frac{1}{2} - 1\right) = -\frac{1}{2} + 4\sqrt{35}$$

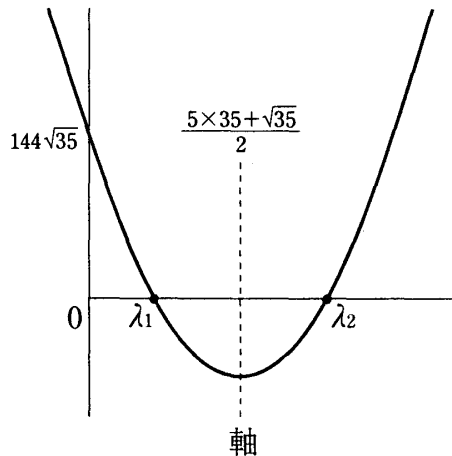
$$(2, 2) = \frac{\sqrt{35}}{2} \cdot 8 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{35}}{2} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{35}}{2} = 4 \times 35 + \frac{\sqrt{35}}{2}$$

〔注 7〕

$$\begin{aligned} & \left(4 + \frac{\sqrt{35}}{2}\right)\left(4 \times 35 + \frac{\sqrt{35}}{2}\right) - \left(4 + \frac{\sqrt{35}}{2} + 4 \times 35 + \frac{\sqrt{35}}{2}\right)\lambda + \lambda^2 \\ & - \left(\frac{35}{4} - 35 \times 2\sqrt{35} - 2\sqrt{35} - 6 \times 35\right) \\ & = 16 \times 35 + 2\sqrt{35} + 2 \times 35\sqrt{35} + \frac{35}{4} - (5 \times 35 + \sqrt{35})\lambda + \lambda^2 \\ & \quad - \frac{35}{4} + 2 \times 35\sqrt{35} + 2\sqrt{35} - 16 \times 35 \\ & = \lambda^2 - (5 \times 35 + \sqrt{35})\lambda + 144\sqrt{35} = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

〔注 8〕

⑬式の判別式をとると正となる。図示すると、



〔注 9〕

$$\begin{aligned} & \left(4 - \frac{\sqrt{35}}{2} - \lambda\right)\left(4 \times 35 - \frac{\sqrt{35}}{2} - \lambda\right) - \left(-\frac{35}{2} - 4\sqrt{35}\right)\left(-\frac{1}{2} - 4\sqrt{35}\right) \\ & = 16 \times 35 - 2\sqrt{35} - \lambda - 2 \times 35\sqrt{35} + \frac{35}{4} + \frac{\sqrt{35}}{2}\lambda - 4 \times 35\lambda + \frac{\sqrt{35}}{2}\lambda + \lambda^2 \\ & \quad - \left(\frac{35}{4} + 70\sqrt{35} + 2\sqrt{35} + 16 \times 35\right) \end{aligned}$$

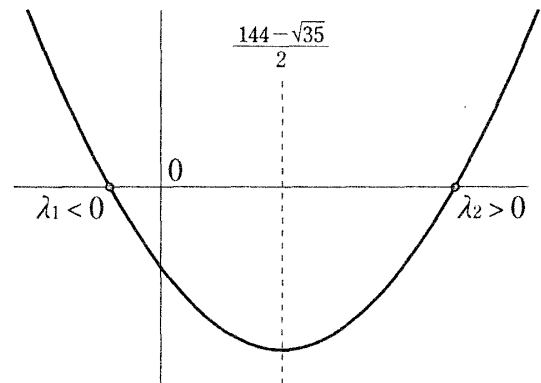
$$\begin{aligned}
&= \lambda^2 - \left(4 - \frac{\sqrt{35}}{2} + 4 \times 35 - \frac{\sqrt{35}}{2}\right) \lambda + 16 \times 35 - 2\sqrt{35} - 2 \times 35\sqrt{35} + \frac{35}{4} \\
&\quad - \frac{35}{4} - 70\sqrt{35} - 2\sqrt{35} - 16 \times 35 \\
&= \lambda^2 - (144 - \sqrt{35})\lambda - 144\sqrt{35} = 0
\end{aligned}$$

⑬

〔注10〕

⑬の判別式

$$\begin{aligned}
&= \left[-(144 - \sqrt{35})\right]^2 + 4 \times 144\sqrt{35} \\
&= 144^2 - 2 \times 144 \times \sqrt{35} + 35 + 4 \times 144\sqrt{35} \\
&= 144^2 + 35 + 2 \times 144\sqrt{35} > 0
\end{aligned}$$



〔注11〕

S. Wiggins (1990) : *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, published by Springer-Verlag, New York (S.

ウィギンス著、丹羽敏雄監訳『非線形の力学系とカオス 上』シュプリンガー・フェアラーク東京、1993年、pp. 82-220.)

Pierre. N. V. Tu (1992) : *Dynamical System : An Introduction with Applications in Economics and Biology*, published by Springer-Verlag Berlin (ピエール N. V. チュー著、永田、堂谷、笹倉、大阿久共訳『経済分析とダイナミカルシステム』文化書房博文社、1997年、pp. 252-4.)

H. W. Lorenz (1989, 93) : *Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion*, published by Springer-Verlag Berlin, Heidelberg (H. W. ローレンツ著、小野崎保、笹倉和幸訳『非線形経済動学とカオス』日本経済評論社、2000年、pp. 231-5.)

参考文献

1. L. Brand (1966) : *Differential and Difference Equations*, John Wiley & Sons, Inc., New York.
2. R. L. Devaney (1986) : *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Benjamin/Cummings, Menlo Park, CA. (R. L. デバニー著、上江洸達也、重本和泰、久保博嗣、田崎秀一訳『カオス力学系の基礎』アジソン ウェスレイ パブリッシング ジャパン発行、1997年。)
3. H. Poincaré (1882) 'Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle' *Mathématiques Pures et Appliquées*, Année 1882年。
4. S. Lefschetz (1962) : *Differential Equation : Geometric Theory*, Second Edition, Interscience, New York.
5. E. N. Lorenz (1963) "Deterministic Nonperiodic Flow" *Journal of the Atmospheric Science*, Vol. 20, March.
6. H. W. Lorenz (1989, 93) : *Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion*, Springer-Ver-

lag Berlin, Heiderberg (H. W. ローレンツ著、小野崎保、笹倉和幸訳
『非線形経済動学とカオス』日本経済評論社、2000年。)

7. Pierre. N. V. Tu (1992) : *Dynamical Systems : An Introduction with Applications in Economics and Biology*, Springer-Verlag Berlin (ピエール N. V. チュー著、永田、堂谷、笹倉、大阿久共訳『経済分析とダイナミカルシステム』文化書房博文社、1997年。)
8. S. Wiggins (1990) : *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer-Verlag, New York (S. ウィギンス著、丹羽敏雄監訳『非線形の力学系とカオス 上』シュプリンガー・フェアラーク東京、1993年。)