

環境分析のための複素ロジスティック方程式

寺 田 宏 洲
西 垣 泰 幸
伊 藤 敏 和

目 次

- §1 はじめに
- §2 実ロジスティック方程式の解
- §3 複素ロジスティック方程式の解の発散

§1 はじめに

気象現象が予測不可能で不規則な動きをすることは古くから良く知られている。しかしながら複雑な気象現象を理論的に解明しようとする試みは、意外なことにきわめて新しい。

1963年に、E. Lorenz [1] は、流体力学のナビエ・ストークス偏微分方程式にヒントを得て、それを単純化した3次元非線型モデル（ローレンツモデル）を数値解析によって考察した。そこで彼は、初期値鋭敏性や分岐現象を発見し、系の複雑にしてカオティックな現象をコンピュータグラフィックで示したのである。ただこのローレンツモデルは3次元非線形であるため数学的な証明はきわめて困難である。1976年に、J. Guckenheimer [3] はローレンツモデルの本質的な現象を何ひとつ失うことなく2次元モデル（幾何学的ローレンツモデル）を考え、初期値鋭敏性や分岐現象を数学的に証明した。

一方、1975年に、T. Y. Li と J. A. Yorke [2] は人口増加モデルのロジスティック方程式 $\frac{dN}{dt} = aN(1-N)$ を差分化したロジスティック写像の式 $N_{n+1} = bN_n(1-N_n)$ を作り、この式のパラメーター b の変化に応じて閉区間 $[0, 1]$ 上で解は非常に複雑な（カオティックな）ふるまいを示した。[6]

我々はこれらの基礎研究を踏まえ、この論文で、変数 a, t, N をすべて複素数に拡張

した、複素ロジスティック方程式

$$\frac{dZ}{dT} = \alpha Z(1-Z)$$

を考察する。

結論から先に提示すると、本論文の分析を通じて我々が得た結果は、次の通りである。即ち、

「 $T=0$ で $Z_0 \neq 0, 1$ をとる初期条件のもとで、解

$$Z = \frac{\frac{Z_0}{1-Z_0}}{e^{-\alpha T} + \frac{Z_0}{1-Z_0}}$$

は可算無限個の点

$$\Omega = \left\{ T = -\frac{1}{\alpha} \left(\log_e \left| \frac{-Z_0}{1-Z_0} \right| + \sqrt{-1} \left(\arg \left(\frac{-Z_0}{1-Z_0} \right) + 2\pi k \right) \right) \mid k \text{ は整数} \right\}$$

で発散する」ということである。さらに発散する2点 A_0 と A_{-1} を結ぶ直線上での $|Z|$ の変化も考察した (図4をみよ)。

本論文での議論の展開は、以下の通りである。

§2では、基礎・先行研究としての実ロジスティック方程式の解の振る舞いをレビューする。その上で、

§3では、我々が初めて試みる複素ロジスティック方程式の解の振る舞いを §2の議論と比較しながら検討する。

言うまでもなく、論理の客観性を確保するために、数式と図との整合性には留意したつもりである。

§2 実ロジスティック方程式の解

実ロジスティック方程式^(注1)

$$(1) \quad \frac{dN}{dt} = aN(1-N), \quad a > 0$$

の初期値 N_0 をもつ解は

$$N_0 \neq 0, 1 \text{ ならば } N = \frac{\frac{N_0}{1-N_0}}{e^{-at} + \frac{N_0}{1-N_0}}$$

$$N_0 = 0 \quad \text{ならば} \quad N \equiv 0$$

$$N_0 = 1 \quad \text{ならば} \quad N \equiv 1$$

となる。これを図示すると図1となる。(t を $+\infty$ にとった時の N は1になるので、実ロジスティック方程式は、(1)式の表現で良い。)

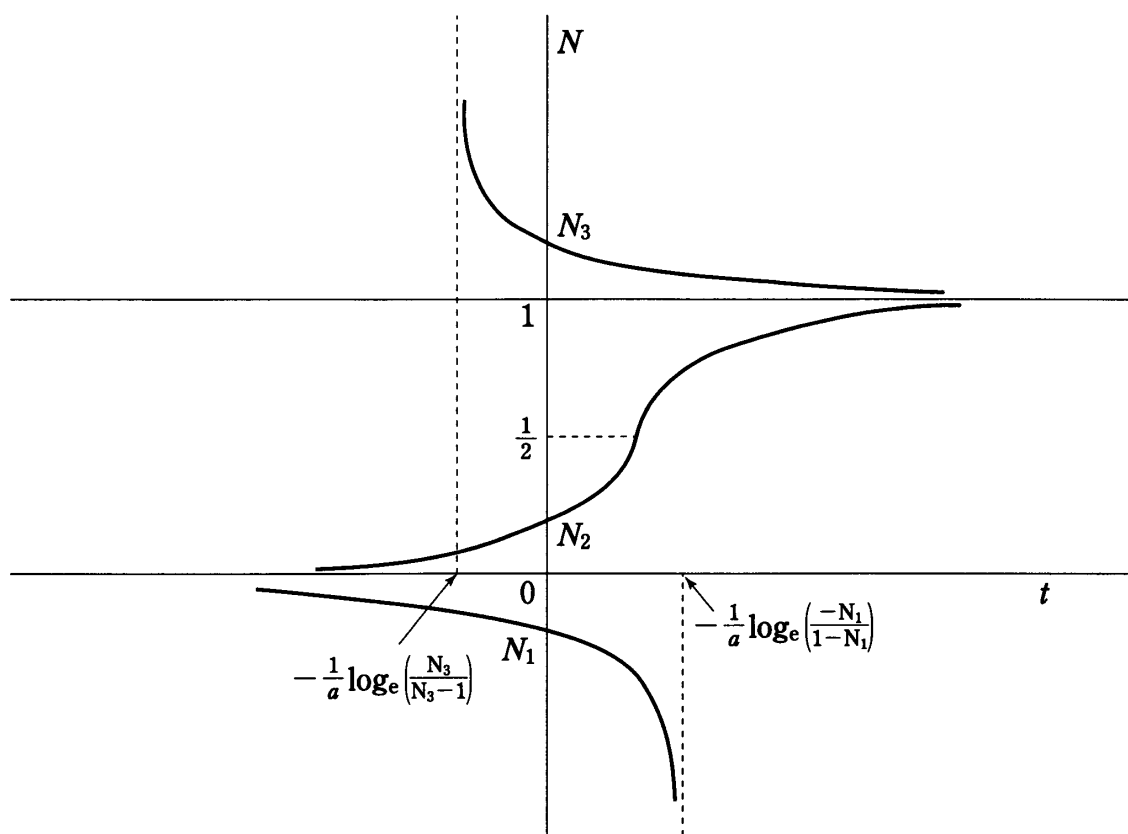


図 1

§3 複素ロジスティック方程式の解の発散

複素数 α , T , Z を $\alpha = a + b\sqrt{-1}$, $T = s + t\sqrt{-1}$, $Z = x + y\sqrt{-1}$ と実数表示する。
複素ロジスティック方程式

$$(3) \quad \frac{dZ}{dT} = \alpha Z(1-Z)$$

は $w = -\alpha(Z - \frac{1}{2})$ なる線形変換で

$$(3') \quad \frac{dw}{dT} = w^2 + \frac{\alpha^2}{4}$$

となる。(3')の差分方程式を作ると

$$(4) \quad W_{n+1} = W_n^2 + C$$

となる。この写像の Julia 集合 J_c の C をパラメーターにしたときの変化とこの写像を J_c 上に制限したときのカオティックなふるまいは多くの人々によって考察されている。

[4] [5] をみよ。

(3)式の解は、初期値を $Z_0 \neq 0, 1$ とすれば、

$$(5) \quad Z = \frac{\frac{Z_0}{1-Z_0}}{e^{-\alpha T} + \frac{Z_0}{1-Z_0}}$$

となる。よって分母を零にする T の値で解は発散する。その集合 Ω は

$$\begin{aligned}\Omega &= \left\{ T \in \mathbb{C} \mid e^{-\alpha T} + \frac{Z_0}{1-Z_0} = 0 \right\} \\ &= \left\{ -\frac{1}{\alpha} \left(\log_e \left| \frac{-Z_0}{1-Z_0} \right| + \sqrt{-1} \left(\arg \left(\frac{-Z_0}{1-Z_0} \right) + 2\pi k \right) \right) \mid k \text{ は整数} \right\}\end{aligned}$$

とかける。ここで、 $\arg \left(\frac{-Z_0}{1-Z_0} \right)$ は $\frac{-Z_0}{1-Z_0}$ の偏角を意味する。

さらに、 T -平面に Ω を表現すると以下のようになる。

$$\alpha T = -\log_e \left(\frac{-Z_0}{1-Z_0} \right)$$

の実表示をすると、

$$(as - bt) + \sqrt{-1}(bs + at) = -\log_e \left| \frac{-Z_0}{1-Z_0} \right| - \sqrt{-1} \left(\arg \left(\frac{-Z_0}{1-Z_0} \right) + 2\pi k \right)$$

となる。ここで、 k は任意の整数である。すなわち、

$$(6) \quad as - bt = -\log_e \left| \frac{-Z_0}{1-Z_0} \right|$$

$$(7) \quad bs + at = -\arg \left(\frac{-Z_0}{1-Z_0} \right) - 2\pi k$$

となる。これを図示すると、図 2 となり、 $\Omega = \{\dots, A_{-1}, A_0, A_1, A_2, \dots\}$ となる。

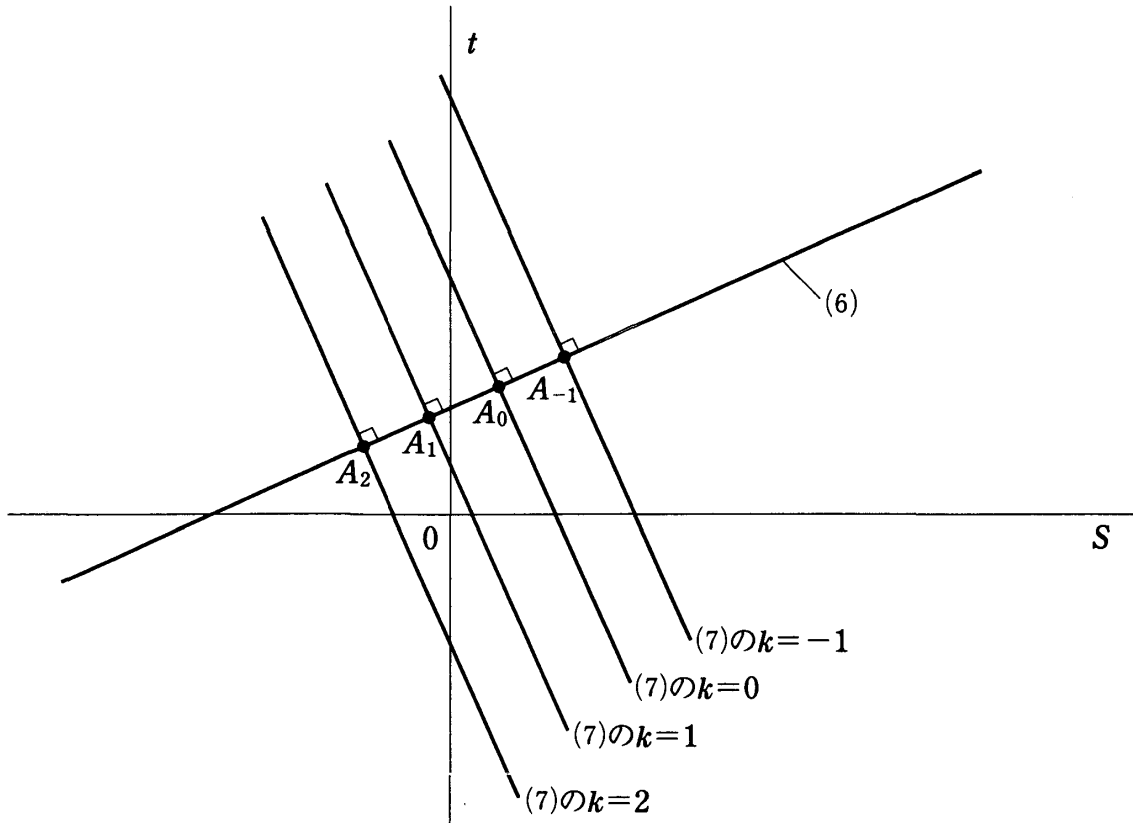


図 2

さらに、 $as - bt = -\log_e \left| \frac{-Z_0}{1-Z_0} \right|$ 上を点 A_0 から A_{-1} に動くとき、 Z は

$$Z = \frac{\frac{Z_0}{1-Z_0}}{\left| \frac{Z_0}{1-Z_0} \right| \left(e^{-(bs+at)\sqrt{-1}} + e^{\arg\left(\frac{Z_0}{1-Z_0}\right)\sqrt{-1}} \right)}$$

とかける。

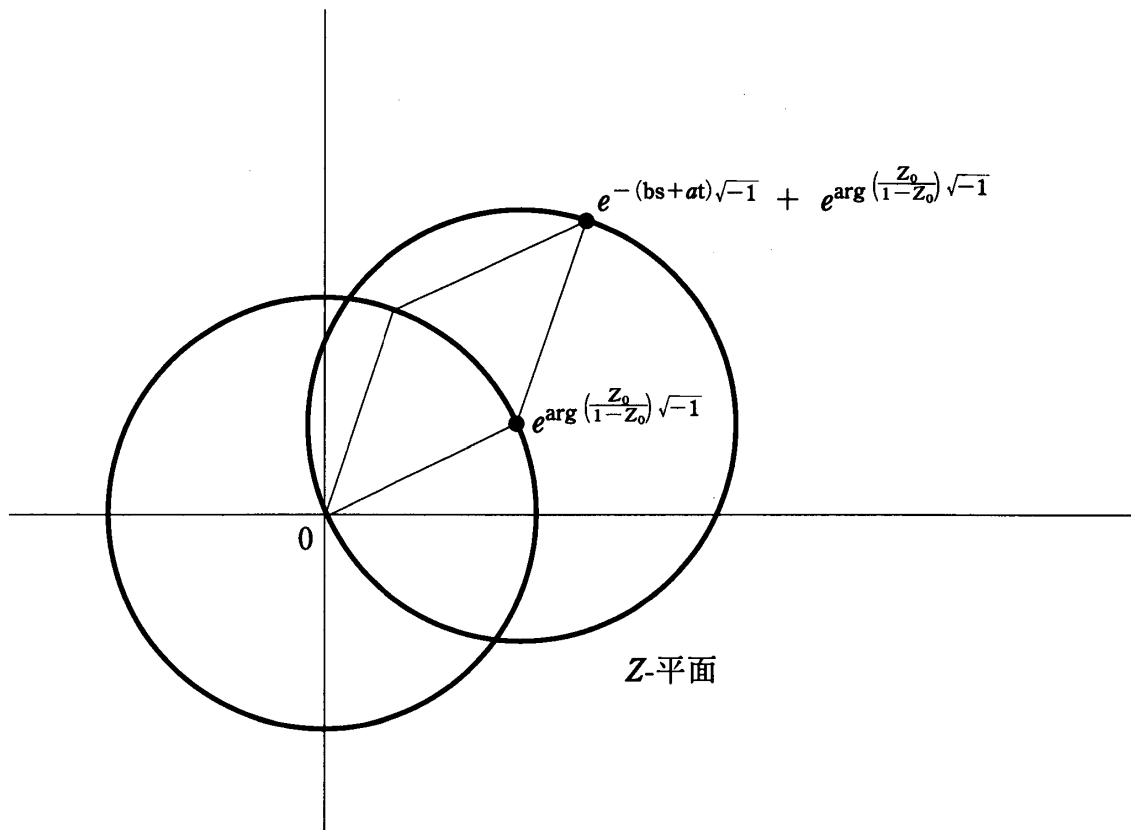


図 3

図 3 より、 $|Z|$ は A_0 で発散し、 A_0 から $\frac{A_0+A_{-1}}{2}$ までは単調減少して、 $\frac{A_0+A_{-1}}{2}$ で最小値 $\frac{1}{2}$ をとり、 $\frac{A_0+A_{-1}}{2}$ から A_{-1} までは単調増加していき、 A_{-1} で $|Z|$ は発散する。

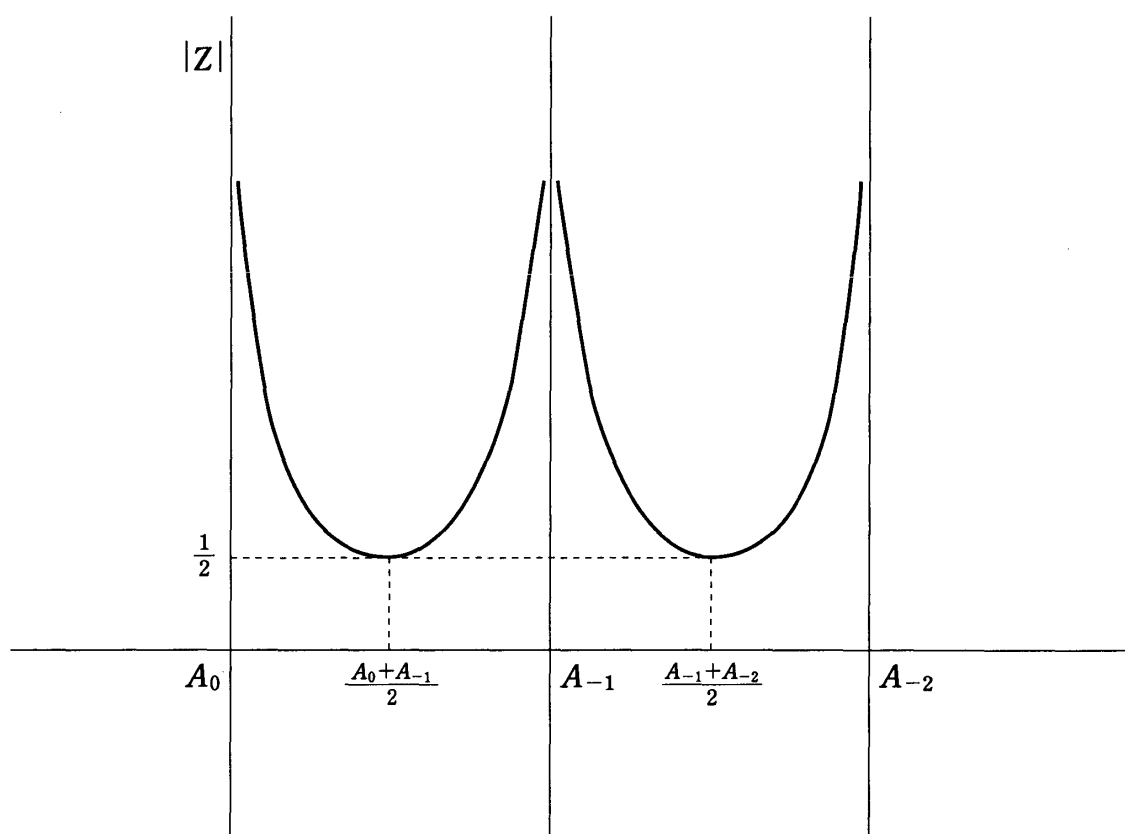


図 4

〔注 1〕

本来のロジスティック方程式は、 $\frac{dN}{dt} = a\left(1 - \frac{N}{K}\right)N$ である。この式の両辺に $\frac{1}{K}$ をかけ $\frac{d}{dt}\left(\frac{N}{K}\right) = a\left(1 - \frac{N}{K}\right)\frac{N}{K}$ と変形し、改めて $\frac{N}{K}$ を N として表示した式

$$(1) \quad \frac{dN}{dt} = a(1-N)N$$

を議論の出発点にする。

参考文献

- [1] E. Lorenz : Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmospheric Sciences*, 20(1963), 130-141.
- [2] Li, T. Y. and Yorke, J. A. : Period Three Implies Chaos. *American Mathematical Monthly* 82(1975), 985-992.
- [3] J. Guckenheimer : *A strange, strange attractor, in the Hopf bifurcation theorem and its applications*. ed. by J. E. Marsden and M. McCracken, Springer-Verlag, 1976, 368-381.
- [4] Mandelbrot, B. : *The Fractal Geometry of Nature*. Freeman, San Francisco, 1982.
- [5] Douady, A. and Hubbard, J. H. : *Etude dynamique des polynômes complexes I & II*. Publ. Math. d'Orsay (1984-85).
- [6] 寺田宏洲 : 「ロジスティックカーブとカオス」、『龍谷大学経済学論集』 第41巻、第3号 (2001年)、35-49.