複占における販売競争のゲーム理論的考察

中　川　義　行
山　下　章　夫

キーワード
複占　ピア・グループ　ナッシュ均衡　混合戦略
結合確率　マーケットシェア吸引形

1 はじめに

本稿[1]は，対等な 2 人のプレイヤーで構成される企業の，複占市場における販売競争をゲーム理論的に分析したものである。

中川・山下 [4] では，プレイヤーの戦略に依らず市場規模が一定であるという仮定の下で複占的競争を分析した。そこでは，両企業のプレイヤーが確率 1 で同じ広告費支出戦略を選択する Nash 均衡が存在することが示された。市場規模が一定という仮定は，分析の対象である市場が近似的に成熟している時期であることを意味する。

本稿では市場規模が広告費支出によって拡大する時期について，企業に属するプレイヤーの戦略の選択と均衡利得の関係をゲーム理論的に分析する。第 2 節では，2 人のプレイヤーで構成される企業が獲得するマーケットシェアを定式化する。各プレイヤーが選択する純粋戦略は，広告費支出の多寡である。それは，所謂，投票のようなものであり，その総意によって自己の属する企業の広告費支出戦略が決定される。市場規模は，各企業の広告費支出に依存して，その販売促進効果を通じて拡大され，それに伴って各企業が獲得する利得も変化する。そして，プレイヤーの利得関数は，所属する企業が獲得した利得に基づいて，社内における一定の分配規則によって決定される。各プレイヤーは，その利得関数を最大化しようとする。

広告費支出による市場規模の拡大効果を表すために，先行研究では例えば Karnani [1] では，対数線形の関数が仮定されている。そこでは，市場の総需要は総広告費支出の増加関数であり，かつその増加率は逓減するものと仮定されている。

本稿では，この効果が 1 次同次関数によって記述されるものと仮定する[2]。各企業の獲得するマーケットシェアは，Mills [2] や Monahan [3] らによる先行研究と同じく，マーケットシェア吸引形（*market share attraction form*）により決まるものと仮定する。第 3 節では，プレイヤーの戦略の選択とプレイヤーへの分配率の関係を定式化することによって，プレイヤーの利得関数を導く。第 4 節では，Nash 均衡の存在条件を考察する。第 5 節では，プレイヤーの戦略の選択と均衡利得

1)　本研究は，龍谷大学経営学会の研究部会「社会科学の研究や教育における Maxima の応用」の共同研究の一部である。
2)　企業の広告費支出の限界的な市場創出効果が一定であると仮定すれば，本稿の結論は，一般に同次関数について成り立つ。

の関係を考察する。そこでは，広告費の需要創出効果が相対的に低い企業でも，その効果が高い企業より大きな均衡利得を実現する Nash 均衡が存在することが示される。最後に第 6 節では，分析の含意と今後の課題を述べる。

2 戦略とマーケットシェア

本節では，マーケットシェアを巡る複数の企業間の競争について考える。各企業の行動は，そこに所属する互いに対等な複数のプレイヤーの総意によって決まるものと仮定する。企業やそこに所属する社員の駆け引きの様子は，例えばカードゲームのホイストやその派生系ゲーム[3]など，チームを組んで戦うものによく似ている。まず，その行動をゲーム理論的に定式化する。

$$M \coloneqq \{X_1, X_2, \ldots, X_N\}$$

を N 企業の集合とする。企業 X_m には n_m 人のプレイヤーが所属しており，

$$X_m \coloneqq \{\pi_1^m, \pi_2^m, \ldots, \pi_{n_m}^m\}$$

とする。但し，$X_m \cap X_\ell = \emptyset\,(m \neq \ell)$ とする[4]。本稿では，企業をピア・グループ，すなわちプレイヤーの間に組織的上下関係が無い，単純な寄り合い集団として捉えることを意味する。全てのプレイヤーは合理的かつ独立的に，すなわち自己の利得を最大化するように行動するものと仮定する。各プレイヤー π_i^m が取る純粋戦略は，π_i^m が選ぶ支出額を表し，それらの集合を η_i^m とする。

η_i^m の純粋戦略の数を ν_i^m として

$$\eta_i^m \coloneqq \{\sigma_{i,1}^m, \sigma_{i,2}^m, \ldots, \sigma_{i,\nu_i^m}^m\} \subset \mathbb{R}$$

と置く。但し，初めから昇順

$$\sigma_{i,1}^m < \sigma_{i,2}^m < \ldots < \sigma_{i,\nu_i^m}^m$$

に並べてあることにする。その η_i^m 上に定義された混合戦略として，確率分布関数 p_i^m を

$$\begin{array}{ccc} p_i^m : \eta_i^m & \hookrightarrow & \mathbb{R} \\ \cup & & \cup \\ \sigma_{i,j}^m & \mapsto & x_{i,j}^m \end{array}$$

として与える。但し，確率であることから $x_{i,j}^m \geqslant 0$ かつ $\sum_{j=1}^{\nu_i^m} x_{i,j}^m = 1$ とする。

このとき，企業 X_m としての純粋戦略 H_m は，直積集合

$$\begin{aligned} H_m &\coloneqq \prod_{i=1}^{n_m} \eta_i^m \\ &= \{(\sigma_{1,j_1}^m, \sigma_{2,j_2}^m, \ldots, \sigma_{n_m,j_{n_m}}^m) \mid \sigma_{i,j_i}^m \in \eta_i^m\} \subset \mathbb{R}^{n_m} \end{aligned}$$

3) 派生系では，コントラクト・ブリッジやナポレオンなどがよく知られている。それらの既存のゲームとは異なるが，チームとしての勝敗でチームスコアに大きく格差を付け，勝利への貢献度に応じて各プレイヤーにスコアが配分されるようなスコアリングルールを組み込まれたゲームをイメージしてもらうとよい。このときのチームを「企業」，チームに所属するプレイヤーを「社員」と考えているが，本稿のモデルは，そのような既存のカードゲームほど複雑ではない。

4) 要するに，同一のプレイヤーが互いに競合する企業に同時に所属しないことを意味する。

として与える。企業 X_m に属するすべてのプレイヤーが選択する戦略から決まるベクトルとして $\vec{\sigma}_m := (\sigma^m_{1,j_1}, \sigma^m_{2,j_2}, \ldots, \sigma^m_{n_m,j_{n_m}})$ と置き，集計ベクトル $\vec{1}$ と置く[5]。そして，企業 X_m としての支出額 C_m は，H_m の要素に作用素 τ

$$\begin{array}{ccc} \tau : H_m & \hookrightarrow & \mathbb{R} \\ \cup\!\!\!\cup & & \cup\!\!\!\cup \\ \vec{\sigma}_m & \mapsto & \vec{\sigma}_m \cdot \vec{1} = \sum_{i=1}^{n_m} \sigma^m_{i,j_i} \end{array}$$

を作用させる。企業 X_m としての混合戦略 $P^m(\vec{\sigma}_m)$ は，各プレイヤーの独立性から，結合確率

$$P^m(\vec{\sigma}_m) := \prod_{i=1}^{n_m} p^m_i(\sigma^m_{i,j_i}) \qquad (\text{但し，} \sigma^m_{i,j_i} \in \eta^m_i)$$

として与える。また，H_m の各成分に P^m を作用させた $P^m(H_m)$ に順序を入れて 1 階テンソル，すなわちベクトルに射影したものを $\vec{x}_m$ と書く。なお，結合確率であることから，

$$\sum_{m=1}^{N} P^m(\vec{\sigma}_m) = 1$$

が成り立つ。

企業 X_m の支出の期待値 E_m（以降，本稿では企業 X_m の期待支出と呼ぶ）は，H_m が離散的であるから，

$$E_m(X_m) := \sum_{m=1}^{N} \tau(\vec{\sigma}_m) P^m(\vec{\sigma}_m)$$

として与える。市場の総需要（市場規模）を Z として，本稿ではこれが各企業の期待支出に依存するものと考えて[6]，期待支出と創出される市場規模の関係が次の 1 次同次関数 F で表されるもの[7]と仮定する。

$$\begin{aligned} Z &= F(E_1, E_2, \ldots, E_N) \\ &= \sum_{m=1}^{N} \frac{\partial F}{\partial E_m} E_m \end{aligned} \qquad (1)$$

但し，すべての m について $\dfrac{\partial F}{\partial E_m} > 0$ であると仮定する。(1)の変形は，同次関数に関するオイラーの定理より与えられる。(1)において，各企業の期待支出 E_m の偏導関数は，それぞれの企業の期待支出が市場の総需要に与える限界的な効果であるが，それを定数 k_m と仮定する。換言すれば，k_m は追加的な微小期待支出額の波及効果であり，所謂，企業の「広告費支出効果の尺度」を意味す

---

5) 全ての成分が 1 であるベクトルのこと。ベクトルの成分の総和を求めるために，同じ次元の集計ベクトルと内積を取るという記法がある。

6) 期待値を独立変数とする関数は，熱力学などでは頻出の概念である。本来，分子の運動速度分布は温度から得られる正規分布で考えることが多いが，その期待値に基づいて気体の圧力を与えるときや，溶液の化学反応速度を与えるときなどで用いる。他にも，投資家の総資産を独立変数にもつ関数であれば，酔歩蹣跚（すいほばんさん）する証券価格とポートフォリオから得られる期待値の関数になっている。

7) 各企業の広告費支出と市場の総需要の関係については，文献 [1] では，$\left(\sum_{m=1}^{2} k_m C_m\right)^{\alpha}, (\alpha < 1)$ として定式化されている。この関数は α 次同次の関数である。

るものと解釈することができる。

次に，$G_m(E_1, E_2, \ldots, E_N)$ を企業 X_m の獲得するマーケットシェアとする。G_m について次の関係を仮定する。

$$\frac{\partial G_m}{\partial E_m} > 0$$ マーケットシェアは，自企業の期待支出の単調増加関数である。 (2)

$$\frac{\partial^2 G_m}{\partial E_m^2} < 0$$ マーケットシェアは，自企業の期待支出が増加するにつれて逓減する。 (3)

$$\frac{\partial G_m}{\partial E_\ell} < 0 \quad (m \neq \ell)$$ 自企業のマーケットシェアは，他企業の期待支出の単調減少関数である。 (4)

これらの性質を満たす関数の中で，本稿では企業 X_m の獲得するマーケットシェアは，k_m を含む形で次式で決まるものと仮定する[8)]。

$$G_m(E_1, E_2, \ldots, E_N) = \frac{k_m E_m}{\sum_{\ell=1}^{N} k_\ell E_\ell} \tag{5}$$

(5)は，条件(2)—(4)を満たす関数の一つであり，マーケットシェア吸引形と呼ばれている。

以下のモデルでは，

$$M := \{X_1, X_2\}$$
$$X_m := \{\pi_1^m, \pi_2^m\}$$
$$\eta_i^m := \left\{\frac{q}{2}, \frac{rq}{2}\right\} \qquad (\forall m, i\,; r > 1, q > 0)$$
$$p_i^m(x) := \{x_i^m, 1 - x_i^m\}$$

と置く。但し，q は一定の広告費支出額とし，r は q に対する比率を表すパラメタとする。そして，r によって，より多くの広告費を支出する戦略を表現するために，$r > 1$ を仮定する。r が大きい程，広告費支出水準は高い。この条件下で，企業 X_1 が実際に獲得することができるマーケットシェアは，以下の表で与えられる。

		C_2		
		rq	$\frac{(r+1)q}{2}$	q
C_1	rq	$\frac{k_1}{k_1 + k_2}$	$\frac{2k_1 r}{2rk_1 + (r+1)k_2}$	$\frac{k_1 r}{rk_1 + k_1}$
	$\frac{(r+1)q}{2}$	$\frac{(r+1)k_1}{(r+1)k_1 + 2rk_2}$	$\frac{k_1}{k_1 + k_2}$	$\frac{(r+1)k_1}{(r+1)k_1 + 2k_2}$
	q	$\frac{k_1}{k_1 + rk_2}$	$\frac{2k_1}{2k_1 + (r+1)k_2}$	$\frac{k_1}{k_1 + k_2}$

8)　この関数形はマーケットシェア吸引モデルにおいて，しばしば用いられる関数形である。例えば，文献 [2], [3] を参照。

このマーケットシェアの表を，次の行列 S^1 で表現する[9]。

$$S^1=\begin{bmatrix} \frac{k_1}{k_1+k_2} & \frac{2k_1r}{2rk_1+(r+1)k_2} & \frac{2k_1r}{2rk_1+(r+1)k_2} & \frac{rk_1}{rk_1+k_2} \\ \frac{(r+1)k_1}{(r+1)k_1+2rk_2} & \frac{k_1}{k_1+k_2} & \frac{k_1}{k_1+k_2} & \frac{(r+1)k_1}{(r+1)k_1+2k_2} \\ \frac{(r+1)k_1}{(r+1)k_1+2rk_2} & \frac{k_1}{k_1+k_2} & \frac{k_1}{k_1+k_2} & \frac{(r+1)k_1}{(r+1)k_1+2k_2} \\ \frac{k_1}{k_1+rk_2} & \frac{2k_1}{2k_1+(r+1)k_2} & \frac{2k_1}{2k_1+(r+1)k_2} & \frac{k_1}{k_1+k_2} \end{bmatrix}$$

企業 X_2 の獲得するマーケットシェア（これを S^2 とする）は，$[[1]]$ をすべての成分が 1 の適切な大きさの行列[10]とするとき，

$$S^2=[[1]]-S^1$$

で与えられる。

3 プレイヤーの利得

本節では，企業 $X_m(m\in\{1,2\})$ のプレイヤーの利得を定式化する。企業 X_m のプレイヤー π_1^m(resp. π_2^m) への分配率 s_1^m(resp. s_2^m) は自己の戦略の選択に依存するだけでなく，相手のプレイヤーの戦略（支出）の選択にも依存する。企業が市場で獲得するマーケットシェアは(5)で決定されるが，企業内のプレイヤーへの分配率は，次の決定方法に従うものと仮定する。

- 自己の戦略が rq のとき
  - ――相手の戦略が rq のとき，自己の分配率は $\frac{1}{2}$ である。
  - ――相手の戦略が q のとき，自己の分配率は θ_m である。
- 自己の戦略が q のとき
  - ――相手の戦略が rq のとき，自己の分配率は $1-\theta_m$ である。
  - ――相手の戦略が q のとき，自己の分配率は $\frac{1}{2}$ である。

但し，$0<\theta_m<1$ であり，$\theta_m\neq\frac{1}{2}$ を仮定する。この企業内の分配率がプレイヤーの支出割合に応じて決まる[11]ものとすれば θ_m は

$$\theta_m=\frac{rq}{rq+q}=\frac{r}{r+1}$$

9） 本質的には，2 × 2 × 2 × 2 の 4 階テンソルで 4 次元空間の中に成分を配置した形で記述されるべきであるが，紙面に印刷する都合上，計算結果として同値を与える形に順序を入れて 4 × 4 行列，すなわち 2 階テンソルに射影して記述した。

10） 集計ベクトルの「行列版」であり，誤解の余地がない限り，前後の演算の都合に応じて大きさを変化させられるものとする。

11） この定式化については，中川・山下 [4] を参照。

とすることができる。この場合，$1-\theta_m=\dfrac{r}{r+1}$ である。

このとき企業 X_m のプレイヤーの直面する分配率は次の分配率行列 μ_i^m で表される[12)]。

$$\mu_1^m=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{2} & \theta_m\\ 1-\theta_m & \dfrac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$\mu_2^m=[[1]]-\mu_1^m$$

この分配率行列の成分についての仮定は，プレイヤーが同じ戦略を用いるときは分配率は同じであるが，異なる戦略を用いるときは分配率に格差を認めていることである。

各プレイヤーの分配率の期待値を $s_i^m(x_1^m, x_2^m)$, $i\in\{1, 2\}$ とすると

$$s_i^m(x_1^m, x_2^m)=[x_1^m \quad 1-x_1^m]\mu_i^m\begin{bmatrix}x_2^m\\ 1-x_2^m\end{bmatrix}$$

である。

企業 X_m の利得 $M_m(E_1, E_2)$ は，

$$M_m(E_1, E_2)=F(E_1, E_2)G_m(E_1, E_2)$$

で与えられる。これを，直積空間 $C_1\times C_2$ に限定したものとして，S_1 同様，次の行列 M^1 を与える[13)]。

$$M^1=\begin{bmatrix}rqk_1 & rqk_1 & rqk_1 & rqk_1\\ \dfrac{(r+1)qk_1}{2} & \dfrac{(r+1)qk_1}{2} & \dfrac{(r+1)qk_1}{2} & \dfrac{(r+1)qk_1}{2}\\ \dfrac{(r+1)qk_1}{2} & \dfrac{(r+1)qk_1}{2} & \dfrac{(r+1)qk_1}{2} & \dfrac{(r+1)qk_1}{2}\\ qk_1 & qk_1 & qk_1 & qk_1\end{bmatrix}$$

また企業 2 の直面する市場需要 M^2 を同様にして求めると，

$$M^2=\begin{bmatrix}rqk_2 & \dfrac{(r+1)qk_2}{2} & \dfrac{(r+1)qk_2}{2} & qk_2\\ rqk_2 & \dfrac{(r+1)qk_2}{2} & \dfrac{(r+1)qk_2}{2} & qk_2\\ rqk_2 & \dfrac{(r+1)qk_2}{2} & \dfrac{(r+1)qk_2}{2} & qk_2\\ rqk_2 & \dfrac{(r+1)qk_2}{2} & \dfrac{(r+1)qk_2}{2} & qk_2\end{bmatrix}$$

である。M^1，M^2 は自企業の市場需要は相手企業の戦略に依存せず自企業の支出の k_m 倍になることを意味する。

---

12)　プレイヤーが 2 人だから 2 階テンソルとしての行列で収まっている。つまり，プレイヤーが n_m 人ならば自然に n_m 階テンソルで記述される。

13)　これも S_1 と同様の理由で，4 階テンソルを 2 階テンソル化している。

企業 X_m の市場需要の期待値を $f^m(x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_2^2)$ とすると，

$$\vec{x}_m := [x_1^m x_2^m, x_1^m(1 - x_2^m), (1 - x_1^m)x_2^m, (1 - x_1^m), (1 - x_2^m)]$$

として，

$$f^m(x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_2^2) = \vec{x}_1 M^m (\vec{x}_2)^T$$

である。このとき，企業 X_m のプレイヤー π_i^m の利得 $r_i^m(x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_2^2)$ は，それぞれ

$$r_i^m(x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_2^2) = s^m(x_1^m, x_2^m) f^m(x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_2^2) - \left(x_i^m \frac{rq}{2} + (1 - x_i^m)\frac{q}{2}\right) \qquad (6)$$

で与えられる。

(6)に定義式を代入して整理すると，$r_i^m(x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_2^2)$ において，相手の企業 $X_{m'}(m \neq m')$ のプレイヤーの独立変数 $x_1^{m'}$，$x_2^{m'}$ の係数が 0 であることが分かる。次節では，プレイヤーの利得最適化行動と Nash 均衡の存在条件を考察する。

4 Nash 均衡

本節では各企業のプレイヤーが，他のプレイヤーの戦略を所与として自己の利得を最大にする場合を考察する。各プレイヤーが利得を最大化するための 1 階の条件は，

$$\frac{\partial}{\partial x_1^1} r_1^1(x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_2^2) = \frac{k_1(2\theta_1 - 1)q(r-1)x_1^1}{2} + \frac{q(k_1 r - 2r + 4k_1\theta_1 - 3k_1 + 2)}{4} = 0, \qquad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2^1} r_2^1(x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_2^2) = \frac{k_1(2\theta_1 - 1)q(r-1)x_2^1}{2} + \frac{q(k_1 r - 2r + 4k_1\theta_1 - 3k_1 + 2)}{4} = 0, \qquad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1^2} r_1^2(x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_2^2) = \frac{k_2(2\theta_2 - 1)q(r-1)x_1^2}{2} + \frac{q(k_2 r - 2r + 4k_2\theta_2 - 3k_2 + 2)}{4} = 0, \qquad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2^2} r_2^2(x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_2^2) = \frac{k_2(2\theta_2 - 1)q(r-1)x_2^2}{2} + \frac{q(k_2 r - 2r + 4k_2\theta_2 - 3k_2 + 2)}{4} = 0 \qquad (10)$$

である。(7)—(10)を，$x_i^m, (m \in \{1, 2\}, i \in \{1, 2\})$ について解くと次式を得る。

$$x_1^1 = -\frac{4k_1\theta_1 + k_1 r - 2r - 3k_1 + 2}{2k_1(r-1)(2\theta_1 - 1)} \stackrel{\text{def}}{=} \delta_1, \qquad (11)$$

$$x_2^1 = -\frac{4k_1\theta_1 + k_1 r - 2r - 3k_1 + 2}{2k_1(r-1)(2\theta_1 - 1)} \stackrel{\text{def}}{=} \delta_1, \qquad (12)$$

$$x_1^2 = -\frac{4k_2\theta_2 + k_2 r - 2r - 3k_2 + 2}{2k_2(r-1)(2\theta_2 - 1)} \stackrel{\text{def}}{=} \delta_2, \qquad (13)$$

$$x_2^2 = -\frac{4k_2\theta_2 + k_2 r - 2r - 3k_2 + 2}{2k_2(r-1)(2\theta_2 - 1)} \stackrel{\text{def}}{=} \delta_2 \qquad (14)$$

(11)—(14)より，$x_1^1 = x_2^1$，$x_1^2 = x_2^2$ であることが確かめられる。

次にこれらの解が Nash 均衡であるための条件を考察する。δ_1，δ_2 が Nash 均衡であるための 2 階の条件は，各プレイヤーの利得関数の 2 階の偏導関数に関して，その均衡値 x_1^{1*}，x_2^{1*}，x_1^{2*}，x_2^{2*} が以下の条件を満たさなければならない。

$$\frac{\partial^2}{\partial(x_1^1)^2} r_1^1(x_1^{1*}, x_2^{1*}, x_1^{2*}, x_2^{2*}) = \frac{k_1(2\theta_1 - 1)q(r-1)}{2} < 0, \tag{15}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial(x_2^1)^2} r_2^1(x_1^{1*}, x_2^{1*}, x_1^{2*}, x_2^{2*}) = \frac{k_1(2\theta_1 - 1)q(r-1)}{2} < 0, \tag{16}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial(x_1^2)^2} r_1^2(x_1^{1*}, x_2^{1*}, x_1^{2*}, x_2^{2*}) = \frac{k_2(2\theta_2 - 1)q(r-1)}{2} < 0, \tag{17}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial(x_2^2)^2} r_2^2(x_1^{1*}, x_2^{1*}, x_1^{2*}, x_2^{2*}) = \frac{k_2(2\theta_2 - 1)q(r-1)}{2} < 0 \tag{18}$$

但し，(15)—(18)の偏導関数は $(x_1^{1*}, x_2^{1*}, x_1^{2*}, x_2^{2*}) = (\delta_1, \delta_1, \delta_2, \delta_2)$ で評価されている。(15)—(18)より Nash 均衡が一義的に存在するための条件は，

$$\theta_m < \frac{1}{2}, m \in \{1, 2\} \tag{19}$$

である。即ち，(11)—(14)は(19)の条件下で Nash 均衡の候補となるが，変数 $\delta_m (m \in \{1, 2\})$ が確率であることから，これらの解は $\delta_m \in [0, 1]$ のときに意味を持つ。次小節ではこの点を考察する。

4.1 解が閉区間に存在するための条件

(11)—(14)より，この条件は

$$0 \leqslant -\frac{k_m r - 2r + 4k_m\theta_m - 3k_m + 2}{2k_m(2\theta_m - 1)(r-1)} \leqslant 1 \tag{20}$$

$(m \in \{1, 2\})$ と同値である。$2\theta_m - 1 < 0$ であることに注意して，不等式(20)を θ_m に関して式を変形すると，

$$\theta_m \geqslant -\frac{3k_m + 2r - k_m r - 2}{4k_m} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_m, \tag{21}$$

$$\theta_m \leqslant -\frac{2r + k_m + k_m r - 2}{4k_m r} \stackrel{\text{def}}{=} \beta_m \tag{22}$$

を得る。但し，(21)，(22)の不等式の右辺の k の添え字 m は 1 または 2 をとるので，この不等式の右辺がそれぞれ m に依存すること明示するために α_m，β_m と置く。即ち，α_1(resp. α_2)，β_1(resp. β_2)は(21)，(22)において $m = 1$, (resp. $m = 2$) と置いた式である。α_m と β_m の大小を比較すると

$$\beta_m - \alpha_m = \frac{(k_m - 2)(r-1)^2}{4k_m r} \tag{23}$$

であることから，$k_m \leqslant 2$ と $\alpha_m \leqslant \beta_m$ が複号同順で同値となる。また条件(19)より α_m，β_m を $\frac{1}{2}$ と比較すると

$$\frac{1}{2} - \alpha_m = \frac{(k_m - 2)(r-1)}{4k_m}, \tag{24}$$

$$\frac{1}{2} - \beta_m = \frac{(k_m - 2)(r-1)}{4k_m r} \tag{25}$$

である。(24)，(25)において，$r>1$ であるから α_m，β_m と $\frac{1}{2}$ の大小も $k_m \leqq 2$ と $\alpha_m \leqq \frac{1}{2}$，$\beta_m \leqq \frac{1}{2}$ が複号同順で同値となる。これらを比較するために，$k_m \leqq 2$ について[14]場合分けを行う。

- $k_m < 2$ のとき(23)—(25)より

$$\alpha_m > \beta_m > \frac{1}{2} \tag{26}$$

を得る。δ が閉区間 $[0, 1]$ に存在するためには，(21)と(22)を満たす θ_m が存在しなければならないが，(26)よりそのような θ_m は存在しない。

- $k_m > 2$ のとき(23)—(25)より

$$\alpha_m < \beta_m < \frac{1}{2}$$

の関係を得る。この場合，θ_m は

$$\alpha_m \leqslant \theta_m \leqslant \beta_m \tag{27}$$

を満たす。(27)は(19)，(21)，(22)を満たす。

よって，パラメタ k_m，r，θ_m，$(m \in \{1, 2\})$ について

$$k_m > 2,$$
$$\frac{3k_m + 2r - k_m r - 2}{4k_m} \leqslant \theta_m \leqslant \frac{2r + k_m + k_m r - 2}{4k_m r}$$

が同時に成立するとき，(11)—(14)は Nash 均衡である。

5 戦略と利得

Nash 均衡における企業 $X_m(m \in \{1, 2\})$ のプレイヤーの戦略は，企業 X_m の広告費支出効果 k_m に依存する。k_m は，企業 X_m の需要創出効果である。この節では，需要創出効果の企業間格差がプレイヤーの利得および戦略とどのように関係しているかを考察する。

プレイヤーの利得は θ_m の狭義単調増加関数である。これは次のようにしてわかる。最適解(11)—(14)をプレイヤーの利得関数に代入すると

$$r_i^m(x_1^1(\theta_m), x_2^1(\theta_m), x_1^2(\theta_m), x_2^2(\theta_m)) = -\frac{(k_m-2)(k_m-1)q(r-1)}{4k_m(2\theta_m-1)} > 0 \tag{28}$$

を得る。(28)より

$$\frac{\partial r_i^m(x_1^1(\theta_m), x_2^1(\theta_m), x_1^2(\theta_m), x_2^2(\theta_m))}{\partial \theta_m} = -\frac{(k_m-2)(k_m-1)q(r-1)}{2k_m(2\theta_m-1)^2} > 0$$

を得る。したがって，r_i^m は θ_m の定義域において狭義単調増加関数であるから，$\theta_m = \beta_m$ のときプレイヤーの利得は最大になる。このときの各企業のプレイヤー π_i^m，$(i \in \{1, 2\})$ の利得 r_i^m は

---

14) $k_m = 2$ のとき，$\alpha_m = \beta_m$ である。この場合，$\theta_m = \frac{1}{2}$ となるので，条件(19)に反する。

$$r_i^m(x_1^{1*}, x_2^{1*}, x_1^{2*}, x_2^{2*}) = \frac{(k_m - 1)qr}{2}$$

である。ここで，企業 X_m と企業 $X_{m'}(m, m' \in \{1, 2\}, m \neq m')$ について，利得の単調増加性から θ_m，$\theta_{m'}$ の定義域の端点での場合分けを行う。

5.1 $\theta_m = \beta_m$ かつ $\theta_{m'} = \beta_{m'}$ の場合

このとき，プレイヤーの最適戦略は

$$x_1^{m*} = x_2^{m*} = 1, x_1^{m'*} = x_2^{m'*} = 1 \qquad (m, m' \in \{1, 2\}, m \neq m')$$

である。両企業のプレイヤーが共に努力する戦略を確率 1 で選択する場合，支出効果の大きい企業のプレイヤーの利得がより大きい。

5.2 $\theta_m = \alpha_m$ かつ $\theta_{m'} = \alpha_{m'}$ の場合

このとき，r_i^m の θ_m に関する単調性から，プレイヤーの利得は最小になる。各企業 X_m のプレイヤー π_i^m の最小の利得は

$$r_i^m(x_1^{1*}, x_2^{1*}, x_1^{2*}, x_2^{2*}) = \frac{(k_m - 1)q}{2}$$

である。$\theta_m = \alpha_m$ かつ $\theta_{m'} = \alpha_{m'}$ の場合，プレイヤーの最適戦略は

$$x_1^{m*} = x_2^{m*} = 0, x_1^{m'*} = x_2^{m'*} = 0 \qquad (m, m' \in \{1, 2\}, m \neq m')$$

である。両企業のプレイヤーが共に努力しない戦略を確率 1 で選択する場合，支出効果の大きい企業のプレイヤーの利得はより大きい。

5.3 $\theta_m = \beta_m$ かつ $\theta_{m'} = \alpha_{m'}$ の場合

この場合，プレイヤーの最適戦略は

$$x_1^{m*} = x_2^{m*} = 1, x_1^{m'*} = x_2^{m'*} = 0 \qquad (m, m' \in \{1, 2\}, m \neq m')$$

であり，企業 X_m のプレイヤーは努力する戦略を確率 1 で選択するが，企業 $X_{m'}$ のプレイヤーは努力しない戦略を確率 1 で選択する。このときプレイヤーの利得は

$$r_i^m(x_1^{1*}, x_2^{1*}, x_1^{2*}, x_2^{2*}) = \frac{1}{2}(k_m - 1)qr, \tag{29}$$

$$r_i^{m'}(x_1^{1*}, x_2^{1*}, x_1^{2*}, x_2^{2*}) = \frac{1}{2}(k_{m'} - 1)q \tag{30}$$

である。(30)から(29)を引くと

$$\frac{1}{2}(k_{m'} - 1)q - \frac{1}{2}(k_m - 1)qr = \frac{1}{2}q((k_{m'} - 1) - r(k_m - 1)) \tag{31}$$

を得る。したがって，企業 X_m のプレイヤーの利得と企業 $X_{m'}$ のプレイヤーの利得の大小関係は(31)より

$$r = \frac{k_{m'} - 1}{k_m - 1} \tag{32}$$

に依存する。仮定$r > 1$より，条件(32)は$k_{m'} > k_m$となる。したがって

• $1 < r \leqslant \dfrac{k_{m'} - 1}{k_m - 1}$ のとき

$$r_i^{m'}(x_1^{1*}, x_2^{1*}, x_1^{2*}, x_2^{2*}) = \frac{1}{2}(k_{m'}-1)q \geqslant \frac{1}{2}(k_m-1)qr = r_i^{m}(x_1^{1*}, x_2^{1*}, x_1^{2*}, x_2^{2*})$$

であり，

• $1 > \dfrac{k_{m'} - 1}{k_m - 1}$ のとき

$$r_i^{m'}(x_1^{1*}, x_2^{1*}, x_1^{2*}, x_2^{2*}) = \frac{1}{2}(k_{m'}-1)q < \frac{1}{2}(k_m-1)qr = r_i^{m}(x_1^{1*}, x_2^{1*}, x_1^{2*}, x_2^{2*})$$

である。

特に後者について，企業$X_{m'}$の支出効果$k_{m'}$（需要創出効果）が企業X_mのk_mより大きくとも，企業X_mのプレイヤーの利得が企業$X_{m'}$のプレイヤーの利得より大きくなるNash均衡が存在する。それは努力水準（広告費支出）が相対的に大であり，企業X_mのプレイヤーが努力する戦略を確率1で選択して，企業$X_{m'}$のプレイヤーが努力しない戦略を確率1で選択する場合である。

喩え話としては，Æsop物語の『兎と亀』を想起していただくと良いだろう。Æsop物語では数量的な捉え方をしていないが，本稿の視点から言えば，k_mは兎や亀の平均速度，qやrqは走行時間と擬えると，平均速度が低い亀であっても，走行時間次第では兎に勝つことを説明していると考えることができる。

6 結びに代えて

以上の分析の含意を述べて結びとしたい。本稿では市場における2企業間の競争をゲーム理論的に分析した。企業内のプレイヤーは互いに独立して自由意志で戦略を選択できる状況にあり，戦略の選択と同時に企業の広告費支出が決まる。そして，この広告費支出は需要創出効果をもち市場規模を拡大する。需要創出効果の企業間格差は，消費者が企業に対してもつブランドイメージにより生じるものと考えることができるであろう。

需要創出効果の異なる2企業が市場において競争する場合，各企業のプレイヤーが同じ戦略をとれば，需要創出効果の低い企業は競争に勝つことはできないが，その企業がより多くの利得を得るNash均衡が存在する。そのNash均衡は，両企業のプレイヤーにとって高い努力水準（広告費支出）が要求される状況で，需要創出効果の相対的に高い企業に属するプレイヤーが共に努力しない戦略を選択し，需要創出効果の相対的に低い企業に属するプレイヤーが共に努力する戦略を選択する均衡として特徴付けられる。『兎と亀』の喩え話では，兎が亀に対して油断をするような状況である。

また両企業のプレイヤーにとって低い努力水準（広告費支出）が要求される状況では，需要創出効果の相対的に低い企業に属するプレイヤーが共に努力する戦略を選択して，需要創出効果の相対的に高い企業に属するプレイヤーが共に努力しない戦略を選択したとしても，後者の企業がより多くの均衡利得を獲得できるNash均衡が存在する。これも喩え話で言うならば，兎はある程度までなら怠けても，亀との競争に勝つことができる。

以上の分析結果は，企業に属するプレイヤー相互の戦略の選択における結果として高い努力水準（広告費支出）が，競争において勝利を収めるための必要条件であることを意味する。本稿では2企業間の複占的競争を分析した。

今後の課題としては，より現実に近いモデルとして，

- 企業数 N が $N \geqslant 3$ の寡占的競争を考察すること。
- 企業 X_m 内のプレイヤー数 n_m が $n_m \geqslant 3$ の場合を考察すること。

などが残されている。

参 考 文 献

［1］ Karnani, A., “Equilibrium Market Share — A Measure of Competitive Strength”, Strategic Management Journal, Vol. 3, (1982).

［2］ Mills, H. D., “A study in promotional competition”, *Mathematical Models and Methods in Marketing,* Richard Irwin, Inc., Homewood, Illinois, (1961).

［3］ Monahan, G. E., “The Structure of Equilibria in Market Share Attraction Models”, *Management Science,* Vol. 33, (1987).

［4］ 中川義行・山下章夫，「複占モデルにおける企業間競争のゲーム理論的分析」，『龍谷大学経営学論集』，第49巻第4号，(2010)。

（受理　2011年4月22日）